

4

Graduação com Poucos Dados

Conforme visto na fundamentação teórica, diversas formas de construção de tábuas biométricas podem ser utilizadas. No Brasil, para a mortalidade de válidos, Beltrão e Sugahara (2002a e 2002b) utilizaram o modelo de Heligman e Pollard. Neves (2004) utilizou modelos dinâmicos paramétricos sob a ótica bayesiana. Já Ribeiro (2006) construiu tábuas seletas através de GLM para mensurar a mortalidade de inválidos. Nos Estados Unidos a SOA utilizou o modelo de Whittaker-Henderson Tipo B na construção das tábuas CSO-2001 e RP-2000.

Na implementação prática desses modelos é necessário que haja uma grande quantidade de observações para que de acordo com a Lei dos Grandes Números as taxas brutas apresentem um padrão de comportamento. No entanto, é bastante comum que atuários se deparem com uma realidade onde a experiência a ser inferida é pequena, comprometendo ou até inviabilizando o processo de graduação através da utilização das técnicas tradicionais, abordadas na seção 3.

A prática observada no meio atuarial é que na situação em que há poucos dados, utilizam-se os testes de adequação da seção 2.4 a fim de se averiguar um grande número de tábuas biométricas, construídas com base em outras populações, e por conseguinte escolher a que fornece o melhor ajuste, ao invés de graduar sua própria tábua. Por vezes, agravamentos e desagravamentos também são utilizados, ao se aplicar uma constante multiplicativa a cada probabilidade. Porém, essa técnica gera inconsistências na graduação do final da tábua biométrica.

Este estudo propõe uma solução alternativa a esse problema, onde uma tábua biométrica nova é construída a partir dos dados disponíveis em quantidade reduzida. Propõe-se a utilização da Teoria da Credibilidade combinada à teoria tradicional de graduação de tábuas biométricas.

Esta metodologia pode ser aplicada ao caso onde um ressegurador deseja avaliar a experiência de um novo cliente, sendo esta pequena, e compará-la à sua

tábua de referência construída pela experiência geral aferida até então, com o objetivo de conceder descontos ou até mesmo agravar o prêmio, tornando-o assim mais próximo da realidade da empresa a ser segurada.

Outra aplicação é a utilização por parte das entidades fechadas de previdência complementar (fundos de pensão). A utilização de tábuas biométricas diferenciadas para cada patrocinadora (ou até mesmo plano) cuja experiência observada é pequena, representa uma forma mais precisa de precificação e projeção de receitas e despesas.

É possível também utilizar essa técnica no setor público, como nos regimes próprios, onde se excetuando as grandes capitais e estados, há sempre problemas quanto à insuficiência de dados observados sobre mortalidade e entrada em invalidez de seus participantes.

Será, portanto, utilizada neste estudo a Teoria da Credibilidade Maior Exatidão ou Teoria da Credibilidade Européia que é a mais aceita por possui maior embasamento teórico matemático. As principais teorias existentes são desenvolvidas em Pereira (1998). Na Teoria da Credibilidade Maior Exatidão pretende-se determinar um estimador de Credibilidade que seja linear em função dos dados, minimizando o erro quadrático da estimação.

A forma da Teoria da Credibilidade com abordagem na Estatística Clássica, de acordo com o desenvolvido por Hardy e Panjer (1988) é aplicada aos dados e os resultados são expostos na seção 7.2.2. Este método é uma extensão do modelo de Bühlmann-Straub (1970). Outras extensões foram propostas e podem ser obtidas em Mano (1996), as quais utilizam técnicas de regressão e incorporam tendências e efeitos inflacionários.

Neste estudo, uma experiência menor, sem credibilidade total, é combinada a uma maior, gerando como resultado uma medida de comparação simples e direta entre as duas. Parte-se da situação em que se possui um banco de dados com a experiência de N companhias/regiões (setores) agrupados por anos de observação. Sendo assim, a experiência pequena de um novo setor será investigada.

No modelo adotado por este estudo, define-se S_{ij} como a variável aleatória que representa o número de eventos observados (óbitos, na aplicação proposta) para o setor i no ano j , sendo $i = 1, 2, \dots, N$ e $j = 1, 2, \dots, n_i$. Já P_{ij} é o

número esperado de eventos observados, de acordo com a expectativa da tábua de referência construída com a experiência passada e possuidora de credibilidade total.

Hardy e Panjer mencionam esta definição, mas também outra onde X_{ij} é tida como a sinistralidade na quantia monetária despendida pelo número de óbitos ocorridos. Essa é utilizada no caso aplicado a seguradoras do Canadá cujos resultados estão expostos no artigo mencionado.

$X_{ij} = \frac{S_{ij}}{P_{ij}}$ é a razão entre o número de eventos ocorridos e esperados, dados i e j , representando uma espécie de sinistralidade. Para a variável X_{ij} , assumem-se as seguintes hipóteses:

1. A distribuição de X_{ij} depende do parâmetro de risco θ_i e seu volume P_{ij} ;
2. Os parâmetros de risco θ_i são independentes e identicamente distribuídos;
3. Dado θ_i , as variáveis X_{ij} são independentes para $j = 1, 2, \dots, n_i$, sendo que:

$$E[X_{ij} | \theta_i] = \mu(\theta_i) \quad e \quad Var[X_{ij} | \theta_i] = \frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_{ij}};$$

4. O quarto momento é dado por $\mu_4[X_{ij} | \theta_i] = \frac{3}{P_{ij}^2} \sigma^4(\theta_i)$;
5. Os pares $(\theta_i, X_{ij}), (\theta_k, X_{kl})$ são independentes para $k \neq i$.

Dentre estas cinco hipóteses existem algumas interpretações e justificativas que devem ser comentadas. As duas primeiras hipóteses são as do modelo clássico de Bühlmann (1967). A terceira hipótese é assumida por Straub no modelo de Bühlmann-Straub (1970) de Credibilidade, onde são atribuídos

pesos à $Var[X_{ij} | \theta_i] = \frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_{ij}}$.

Já a quarta hipótese pressupõe que não há excesso de curtose em relação à distribuição Normal para os riscos individuais.

Por fim, a quinta hipótese pressupõe que as observações dos setores são independentes com o passar dos anos, exceto com relação a θ_i . Sendo assim, o

improvement não é considerado, ao se definir X_{ij} como a sinistralidade sobre o número de eventos (óbitos). Já se fosse definido X_{ij} como a sinistralidade na quantia monetária despendida pelo número de óbitos ocorridos (Reais), a inflação, além do *improvement*, seria desconsiderada no modelo.

O objetivo é descobrir a melhor estimativa para $E[X_{in_i+1} | \theta_i] = \mu(\theta_i)$. O estimador de Bühlmann-Straub $\tilde{\mu}_i$ de $\mu(\theta_i)$ é linear em $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ e minimiza o erro quadrático $E[(\tilde{\mu}_i - \mu(\theta_i))^2]$ ao se encontrar o zero da primeira derivada. Conseqüentemente, chega-se à eq. (36) de credibilidade, onde Z_i - eq. (38) - é o fator de credibilidade do setor i e $\hat{\mu}$ - eq. (37) - representa a experiência de todos os setores.

$$\tilde{\mu}_i = Z_i \cdot \bar{X}_i + (1 - Z_i) \cdot \hat{\mu} \text{ e } Var(\mu_i) = (1 - Z_i) Var[\mu(\theta_i)] \quad (36)$$

$$\hat{\mu} = E[\mu(\theta_i)] = E[E[X_{ij} | \theta_i]] = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i \cdot \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^N Z_i} \quad (37)$$

$$Z_i = \frac{P_i}{P_i + \phi}, \text{ onde } P_i = \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij} \text{ e } \phi = \frac{E[\sigma^2(\theta_i)]}{Var[\mu(\theta_i)]} \quad (38)$$

A Teoria da Credibilidade nos revela que quanto maior a exposição de um determinado setor, maior é a credibilidade individual Z_i do mesmo. Por outro lado, quanto menor a variância dentro do setor com o passar dos anos, também maior será a credibilidade individual. Já quanto à variância entre os setores, observa-se que dados cujas dispersões são muito grandes levarão a uma menor credibilidade para a experiência geral $\hat{\mu}$.

De fato, na eq. (38) define-se ϕ como a divisão da variância dentro de cada setor - $E[\sigma^2(\theta_i)]$ - pela variância entre os setores - $Var[\mu(\theta_i)]$, confirmando a idéia do parágrafo anterior. Para a obtenção destes valores necessita-se de um cálculo numérico recursivo na variância S_i^2 exposta nas eq. (39) e (41).

$$E[\sigma^2(\theta_i)] = \hat{\sigma}^2 = E[P_{ij} \cdot \text{Var}[X_{ij} \setminus \theta_i] \setminus X_i] = \frac{\sum_{i=1}^N C_i \cdot S_i^2}{\sum_{i=1}^N C_i} \quad (39)$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \text{ onde } \bar{X}_i = \frac{1}{P_i} \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij} X_{ij} \quad (40)$$

$$C_i = \frac{1}{1 + \frac{2}{n_i - 1} \varphi}, \text{ onde } \varphi = \frac{E[\sigma^4(\theta_i)]}{\text{Var}[\sigma^2(\theta_i)]} \quad (41)$$

Para a definição de $E[\sigma^2(\theta_i)]$ na equação (39), utilizou-se a forma dada por Centeno (1989), onde $\tilde{\sigma}_i^2 = C_i \cdot s_i^2 + (1 - C_i) \cdot E[\sigma^2(\theta_i)]$, utilizando as eq. (40) e (41). A eq. (40) leva em consideração a ponderação dos pesos do número de eventos ocorridos derivados das diferentes exposições (hipótese de Straub).

Nas eq. (42), (43) e (44), as estatísticas não-viesadas de $E[\sigma^4(\theta_i)]$ e $\text{Var}[\sigma^2(\theta_i)]$ foram obtidas também a partir de Centeno (1989).

$$E[\sigma^4(\theta_i)] = \hat{\sigma}^4 = \frac{\sum_{i=1}^N (n_i - 1) \cdot (S_i^2)^2}{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)} \quad (42)$$

$$\text{Var}[\sigma^2(\theta_i)] = \hat{v}_{\sigma^2} = \frac{\left\{ \left[\sum_{i=1}^N (n_i - 1) \cdot (S_i^2 - \hat{\sigma}^2)^2 \right] - 2\hat{\sigma}^4 \cdot (N - 1) \right\}}{R} \quad (43)$$

$$R = \sum_{i=1}^N (n_i - 1) - \frac{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)^2}{\sum_{i=1}^N (n_i - 1)} \quad (44)$$

Já para a definição de $\text{Var}[\mu(\theta_i)]$, nas eq. (45) e (46), foi utilizada a estatística não-viesada em Klugman et al (1997).

$$\text{Var}[\mu(\theta_i)] = \hat{v}'' = \frac{\bar{P} \cdot \Psi - \hat{\sigma}^2}{\Pi \cdot \bar{P}} \quad (45)$$

$$\Psi = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{P_{ij}}{\bar{P}} \cdot (X_{ij} - \hat{\mu})^2}{\left(\sum_{i=1}^N n_i\right) - 1} \quad \Pi = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{P_i}{\bar{P}} \left(1 - \frac{P_i}{\bar{P}}\right)}{\left(\sum_{i=1}^N n_i\right) - 1} \quad (46)$$

Depois de efetuados os cálculos, é obtido o número $\tilde{\mu}_i$ que ao ser multiplicado pela tábua de referência construída com base na experiência maior, de credibilidade total, representará a tábua biométrica que reflete a nova experiência avaliada.

A hipótese inerente a esta metodologia, e necessária devido à pouca quantidade de dados, é que as taxas de cada um dos setores desenhem o mesmo formato ao longo das idades, ou seja, a mortalidade estimada por esse procedimento sempre desenhará uma curva “paralela” à tábua biométrica de referência. Essa imposição é necessária e corresponde a um artifício para diminuir a variância do estimador das taxas, tornando a tábua teoricamente consistente.

A conclusão sobre esse processo de graduação é que se o valor encontrado de $\tilde{\mu}_i$ for maior que um, pode-se dizer que a nova experiência do setor i é a tábua de referência agravada em $100 \cdot (\tilde{\mu}_i - 1) \%$. Se for menor que um a nova experiência é a tábua de referência desagravada em $100 \cdot (1 - \tilde{\mu}_i) \%$.