

2 Teoria das Placas Esbeltas

Este capítulo apresenta um resumo dos conceitos básicos da teoria não-linear de placas esbeltas. Vários autores apresentam uma explanação detalhada desta teoria: Timoshenko & Gere (1961), Brush & Almroth (1975), Szilard (1974) dentre outros. O texto aqui apresentado segue a formulação proposta por Brush & Almroth (1975) e Szilard (1974).

2.1. Flexão de Placas Retangulares

Considera-se inicialmente uma placa retangular plana de comprimento a , largura b e altura h , submetida a carregamentos axiais e a uma carga transversal, normal ao plano da placa de valor p . A posição da placa está definida por um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z , onde x e y estão no plano médio da placa e z é medido a partir deste plano médio, como mostrado na Figura 1.

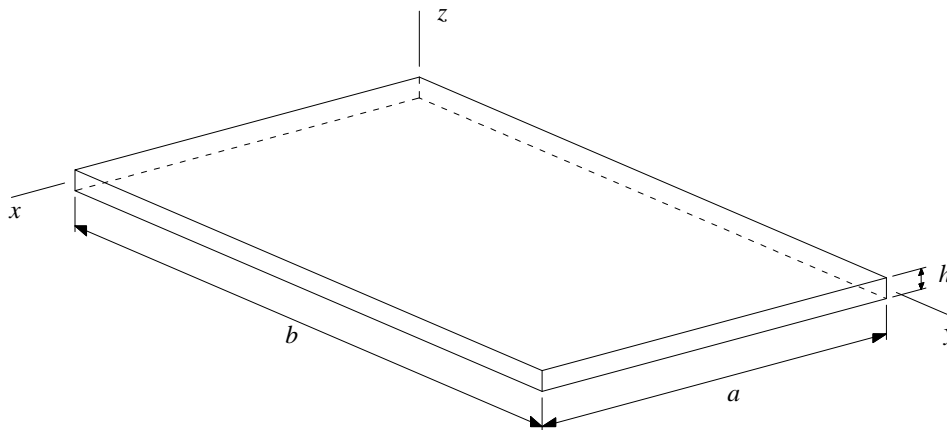


Figura 1 – Placa retangular.

O objetivo da teoria de placas é reduzir o problema tridimensional a um problema bidimensional aproximado (Brush & Almroth, 1975). As forças internas e momentos agindo nas laterais do elemento de placa, como mostra a Figura 2, estão expressos em termos de forças e momentos por unidade de comprimento ao longo da borda do elemento. A intensidade das forças e momentos que agem

sobre o elemento está relacionada com as tensões internas de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yz} dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y z dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} z dz & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{yx} z dz
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde N_x , N_y , N_{xy} e N_{yx} são as forças normais e cisalhantes no plano; Q_x e Q_y são as forças cisalhantes transversais; M_x e M_y , os momentos fletores e; M_{xy} e M_{yx} , os momentos torsores.

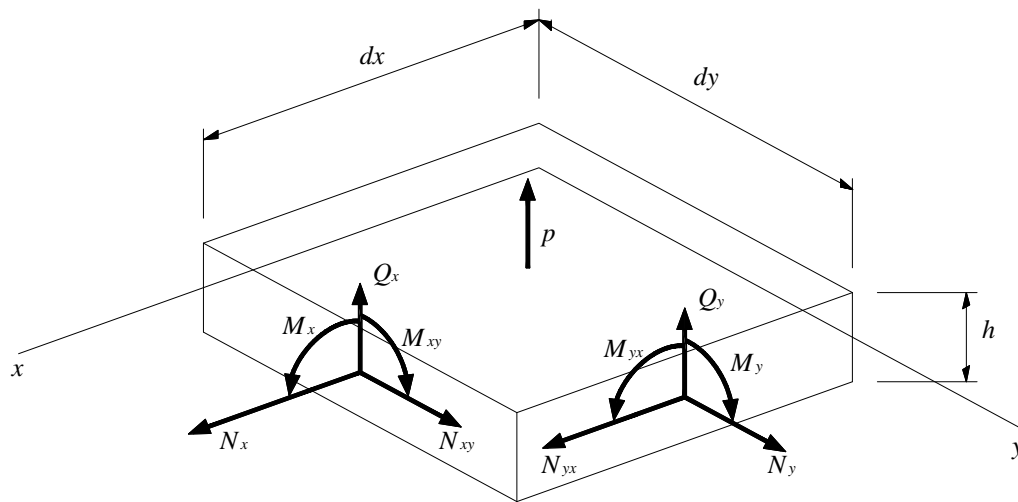


Figura 2 – Elemento de placa $dx dy$ na configuração indeformada

Os símbolos $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$, etc., correspondem às componentes de tensão em um ponto qualquer da espessura da placa, enquanto σ_x , τ_{xy} , etc., correspondem às componentes de tensão no plano médio ($z = 0$). Em geral, forças e momentos são funções das coordenadas x e y .

A teoria de placas esbeltas pode ser deduzida em termos das seguintes aproximações:

1. A espessura da placa é pequena se comparada com as outras dimensões;
2. O plano médio da placa não se alonga durante a flexão, permanece

- uma superfície neutra análoga ao eixo neutro de uma viga;
3. Uma normal ao plano médio indeformado permanece reta, normal, e inextensível durante a deformação, de modo que as deformações normais e cisalhantes transversais possam ser desprezadas ao se derivar as relações cinemáticas da placa;
 4. As seções planas giram durante a flexão, permanecendo normais à superfície neutra, de modo que as tensões e deformações sejam proporcionais à sua distância da superfície neutra;
 5. As tensões normais transversais são pequenas quando comparadas com outras componentes de tensões normais, de modo que podem ser desprezadas nas relações tensão-deformação.

Estas aproximações são conhecidas como hipóteses de *Kirchhoff* (NOVOZHILOV, 1953). Como consequência destas aproximações, as componentes de deslocamento em qualquer ponto da placa, \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , podem ser expressas em termos da sua correspondente no plano médio, u , v , w , (Figura 3) pelas relações:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u + z\beta_x \\ \bar{v} &= v + z\beta_y \\ \bar{w} &= w\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde β_x e β_y são as rotações relativas às direções x e y , respectivamente.

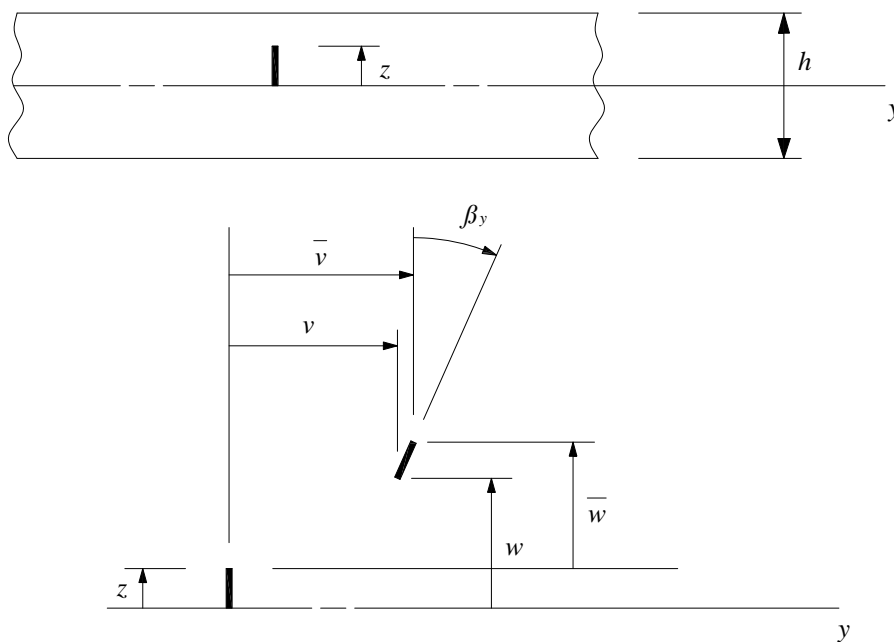


Figura 3 – Normal ao plano médio antes e depois da deformação.

Como uma primeira aproximação da teoria não-linear de placas, pode-se considerar que as deformações são pequenas quando comparadas com a unidade, que as rotações relativas aos eixos x e y são moderadamente pequenas, e que as rotações relativas ao eixo z são desprezíveis. As componentes de deformações $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ e $\bar{\gamma}_{xy}$, para qualquer fibra da placa são dadas em termos dos deslocamentos por:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \bar{u}_{,x} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,x}^2 \\ \bar{\varepsilon}_y &= \bar{v}_{,y} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,y}^2 \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} + \bar{w}_{,x} \bar{w}_{,y}\end{aligned}\quad (2.3)$$

onde considerou-se para esta classe de deformações $\beta_x = -w_{,x}$ e $\beta_y = -w_{,y}$.

Substituindo as eqs. (2.2) nas eqs. (2.3), tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z\kappa_x \\ \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y + z\kappa_y \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \gamma_{xy} + 2z\kappa_{xy}\end{aligned}\quad (2.4)$$

onde $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ e $\bar{\gamma}_{xy}$ são as deformações correspondentes a qualquer ponto da placa e ε_x , ε_y , γ_{xy} correspondem as deformações no plano médio somente. As grandezas κ_x , κ_y e κ_{xy} são as mudanças de curvatura.

Assim, podem-se determinar as relações cinemáticas que descrevem o comportamento geometricamente não-linear de placas esbeltas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} \beta_x^2 & \beta_x &= -w_{,x} & \kappa_x &= \beta_{x,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2} \beta_y^2 & \beta_y &= -w_{,y} & \kappa_y &= \beta_{y,y} \\ \gamma_{xy} &= (u_{,y} + v_{,x}) + \beta_x \beta_y & \kappa_{xy} &= \frac{1}{2} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x})\end{aligned}\quad (2.5)$$

A lei de Hooke generalizada para as componentes de deformação $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ e $\bar{\gamma}_{xy}$ em meio isotrópico tridimensional tem a forma

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_x - \nu (\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)] \\ \bar{\varepsilon}_y &= \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_y - \nu (\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x)] \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau}_{xy}\end{aligned}\quad (2.6)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de elasticidade.

Como consequência da segunda aproximação da teoria de placas

esbeltas, $\bar{\sigma}_z$ é desprezível. Assim, pelas eqs. (2.6), tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y) \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x) \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{xy}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Substituindo as eqs. (2.7) e (2.4) nas eqs. (2.1) e integrando as expressões resultantes, obtém-se:

$$\begin{aligned}N_x &= C (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) & M_x &= D (\kappa_x + \nu \kappa_y) \\ N_y &= C (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) & M_y &= D (\kappa_y + \nu \kappa_x) \\ N_{xy} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy} & M_{xy} &= D (1-\nu) \kappa_{xy}\end{aligned}\quad (2.8)$$

onde

$$C \equiv \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad \text{e} \quad D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

As equações (2.8) representam as relações constitutivas da placa.

2.2. Equações de Equilíbrio e Compatibilidade

Para que se possa levar em consideração a interação não-linear entre forças e rotações, as equações que representam o equilíbrio entre forças e momentos devem ser derivadas para um elemento de placa em uma configuração de pequenas deformações, como mostrado na Figura 4. A fim de simplificar os desenhos, forças e momentos são representados separadamente, e o elemento de placa aparece como um elemento de superfície com espessura nula. As forças, momentos e rotações variam ao longo do elemento e a notação N_x^* é usada para representar $(N_x + N_{x,x} dx)$, etc.

As rotações β_x e β_y são muito pequenas, portanto, os senos e cossenos podem ser substituídos pelo valor do ângulo e pela unidade, respectivamente. Os termos quadráticos que representam a interação não-linear entre os esforços cisalhantes e as rotações são assumidos como sendo desprezíveis. Deste modo, o somatório de forças na direção x é

$$-N_x dy + (N_x + N_{x,x} dx) dy - N_{yx} dx + (N_{yx} + N_{yx,y} dy) dx = 0 \quad (2.9)$$

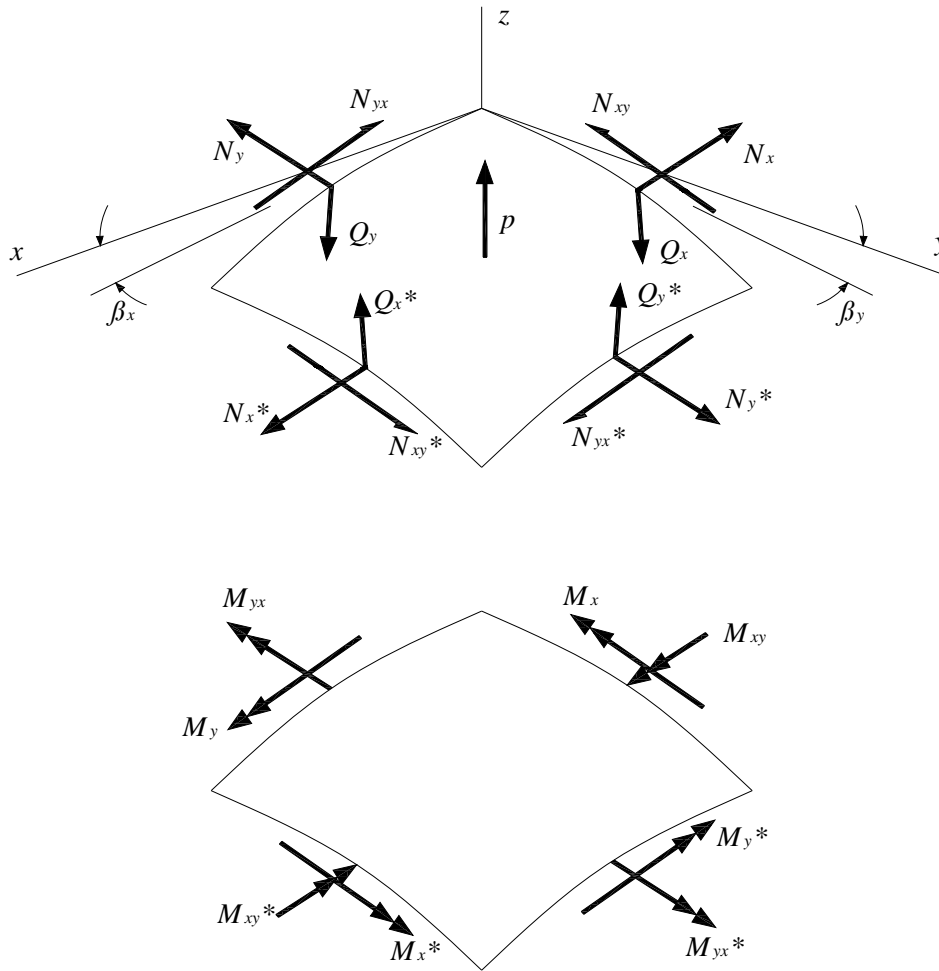


Figura 4 – Elemento de placa na configuração deformada.

Eliminando a parcela $dx dy$, a eq. (2.9) se torna:

$$N_{x,x} + N_{yx,y} = 0 \quad (2.10)$$

Do mesmo modo, pelo somatório de forças na direção y , obtém-se:

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (2.11)$$

O somatório de forças na direção do eixo z , após algumas manipulações matemáticas, é dado pela eq. (2.12), como segue:

$$\begin{aligned} & -\left(N_{x,x} + N_{xy,y}\right)\beta_x - \left(N_{yx,x} + N_{y,y}\right)\beta_y - N_x\beta_{x,x} \\ & - N_{xy}\beta_{y,x} - N_{yx}\beta_{x,y} - N_y\beta_{y,y} + Q_{x,x} + Q_{y,y} = -p \end{aligned} \quad (2.12)$$

Os termos contendo derivadas de N_x , N_{xy} , N_{yx} e N_y na eq. (2.12) se reduzem a zero como consequência das eqs. (2.10) e (2.11). Estes termos serão desprezados de agora em diante.

O somatório de momentos relativos aos eixos x e y , respectivamente, são os seguintes:

$$\begin{aligned} -M_{xy,x} - M_{y,y} + Q_y &= 0 \\ M_{yx,y} + M_{x,x} - Q_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

A sexta equação de equilíbrio $\sum M_z = 0$, resulta numa identidade e não traz nenhuma nova informação.

Substituindo as eqs. (2.13) na eq. (2.12) e desprezando os termos que contêm N_x , N_{xy} , N_{yx} e N_y , obtém-se, para a última equação a seguinte expressão:

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - N_x \beta_{x,x} - N_{xy} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) - N_y \beta_{y,y} = -p \quad (2.14)$$

Introduzindo as relações cinemáticas e constitutivas adequadas para os momentos e rotações, a eq. (2.14) se reduz a

$$D\nabla^4 w - (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) = p \quad (2.15)$$

onde

$$\nabla^4 w = w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} \quad (2.16)$$

Após estas simplificações as equações de equilíbrio podem ser escritas de uma forma relativamente compacta

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (2.17)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (2.18)$$

$$D\nabla^4 w - (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) = p \quad (2.19)$$

As equações não-lineares de equilíbrio aparecem como um sistema de três equações diferenciais não-lineares. Pode ser derivado um sistema mais simples, com duas equações e duas variáveis através das funções de tensão de Airy, definidas pelas seguintes relações:

$$N_x = f_{,yy} \quad N_y = f_{,xx} \quad N_{xy} = -f_{,xy} \quad (2.20)$$

onde $f = f(x, y)$. Estas expressões satisfazem as eqs. (2.17) e (2.18).

Introduzindo as eqs. (2.20) na eq. (2.19), tem-se:

$$D\nabla^4 w - (f_{,yy} w_{,xx} - 2f_{,xy} w_{,xy} + f_{,xx} w_{,yy}) = p \quad (2.21)$$

Mas, para consideração da compatibilidade geométrica, das eqs. (2.5), tem-se que

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - \gamma_{xy,xy} = w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} \quad (2.22)$$

Das eqs. (2.8), tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (f_{,yy} - \nu f_{,xx}) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (f_{,xx} - \nu f_{,yy}) \quad \gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh} f_{,xy}$$

Assim,

$$\nabla^4 f - Eh(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy}) = 0 \quad (2.23)$$

As eqs. (2.21) e (2.23) formam um sistema de duas equações com duas variáveis, w e f . Elas são chamadas de equações de equilíbrio e compatibilidade, respectivamente. Tais equações são conhecidas como as equações não-lineares de von Kármán. A solução destas equações permite analisar o comportamento não-linear de placas esbeltas, sendo esta a teoria usada no presente estudo.

2.3.

Critério de equilíbrio adjacente

Para estudar a possível existência de uma configuração de equilíbrio adjacente, aplicam-se pequenos incrementos às variáveis de deslocamento e avaliam-se as duas configurações adjacentes através dos deslocamentos antes e depois do incremento como segue.

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u_0 + u_1 \\ v &\rightarrow v_0 + v_1 \\ w &\rightarrow w_0 + w_1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde o incremento de deslocamento (u_1, v_1, w_1) é arbitrariamente pequeno, e (u_0, v_0, w_0) e (u, v, w) representam duas configurações de equilíbrio adjacentes.

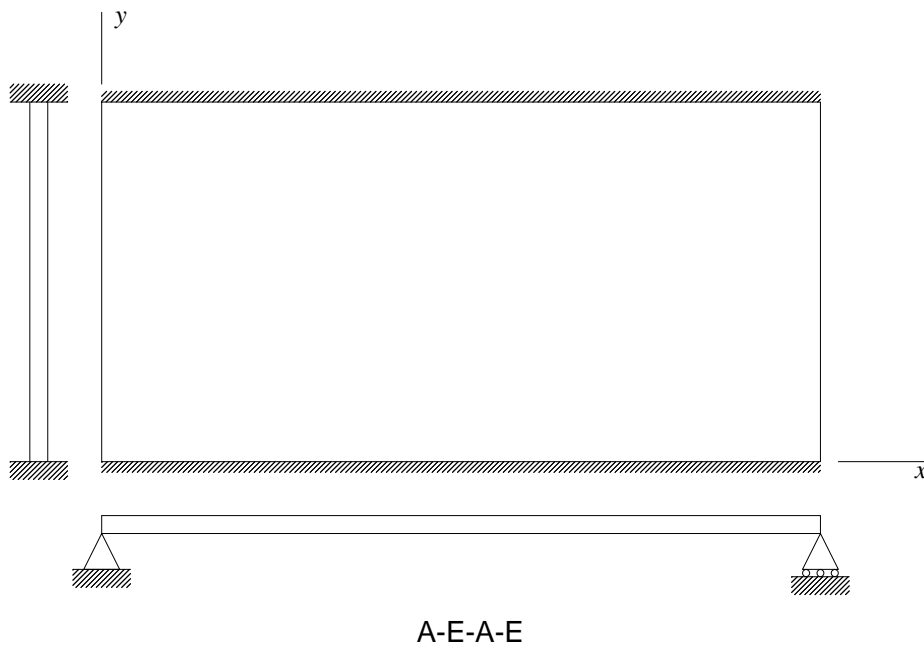
Introduzindo as eqs. (2.24) nas eqs. (2.17), (2.18) e (2.19) e linearizando as equações resultantes, têm-se as equações de equilíbrio crítico de uma placa esbelta submetida à carregamentos no plano:

$$\begin{aligned} N_{x1,x} + N_{xy1,y} &= 0 \\ N_{xy1,x} + N_{y1,y} &= 0 \\ D\nabla^4 w_1 - (N_{x0}w_{1,xx} + 2N_{xy0}w_{1,xy} + N_{y0}w_{1,yy}) &= p \end{aligned} \quad (2.25)$$

A Tabela 1 apresenta um resumo das possíveis condições de contorno usadas na solução das equações de placas planas esbeltas. Na Figura 5 tem-se um exemplo das condições de apoio de uma placa onde a nomenclatura A-E-A-E corresponde às condições de apoio em $x=0, y=0, x=a, y=b$, sendo A=Apoiado, E=Engastado e L=Livre. Estas abreviações são utilizadas de agora em diante.

Tabela 1 – Condições de contorno para placas esbeltas.

Tipo de Suporte em $x = a$	Expressão matemática
Simplesmente Apoiada - A	$(w)_{x=a} = 0;$ $(M_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$
Engastada - E	$(w)_{x=a} = 0; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$
Livre - L	$(M_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$ $(Q_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)_{x=a} = 0$

Figura 5 – Placa apoiada nas faces $x = 0, a$ e engastada nas faces $y = 0, b$.

2.4.

Aplicações da Equação de Estabilidade

2.4.1.

Método de Lévy – Determinação da Carga Crítica

Como primeiro exemplo de aplicação da equação de estabilidade linear, será utilizada uma placa plana simplesmente apoiada nos quatro lados e submetida a uma força de compressão P_x uniformemente distribuída ao longo

dos lados $x = 0, a$, como mostra a Figura 6. Fazendo uma análise do equilíbrio da placa utilizando as eqs. (2.17) e (2.18), obtém-se:

$$N_{x0} = -\frac{P_x}{b} \quad N_{xy0} = N_{y0} = 0$$

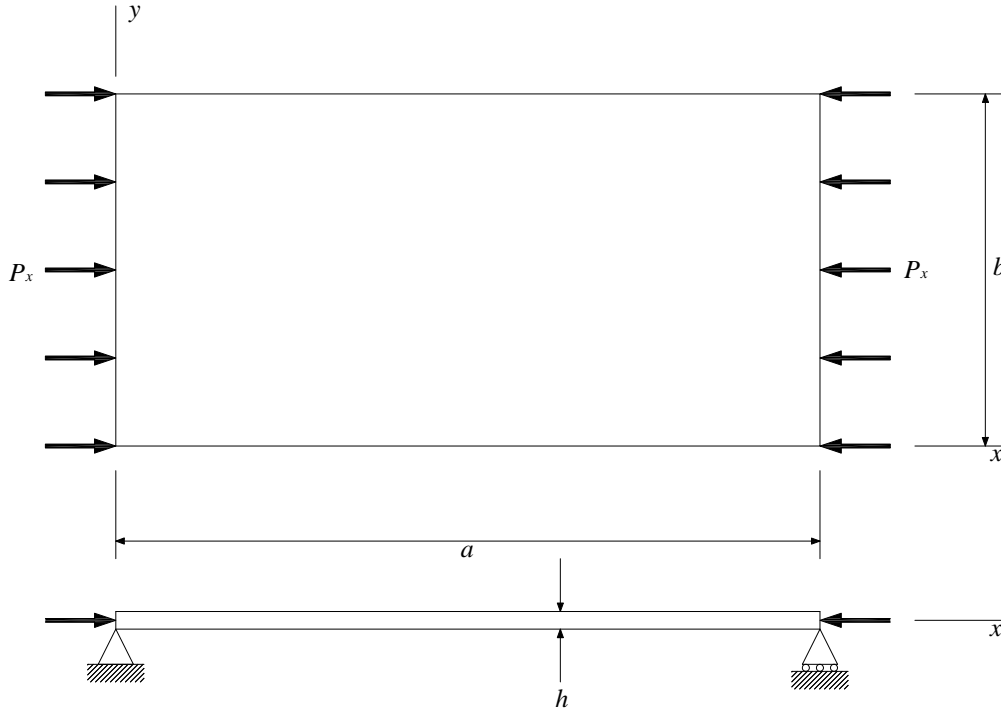


Figura 6 – Placa submetida à compressão no plano.

Substituindo as equações acima na eq. (2.19), obtém-se a equação:

$$D\nabla^4 w + \frac{P_x}{b} w_{,xx} = 0 \quad (2.26)$$

As condições de contorno para a placa simplesmente apoiada são $w = M_x = 0$ em $x = 0, a$ e $w = M_y = 0$ em $y = 0, b$, onde, pelas eqs. (2.5) e (2.8), $M_x = -EI(w_{,xx} + \nu w_{,yy})$ e $M_y = -EI(w_{,yy} + \nu w_{,xx})$. Conseqüentemente as condições de contorno podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} w = w_{,xx} &= 0 \quad \text{em } x = 0, a \\ w = w_{,yy} &= 0 \quad \text{em } y = 0, b \end{aligned} \quad (2.27)$$

A eq. (2.26) é uma equação diferencial com coeficientes constantes. Para este conjunto de condições de contorno tem-se a seguinte solução exata:

$$w = C_1 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

onde C_1 é uma constante. Substituindo na eq. (2.26) tem-se

$$D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{P_x}{b} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \quad (2.29)$$

Os valores de P_x para os quais a eq. (2.26) possui soluções não-triviais são

$$\frac{P_x}{b} = \left(\frac{\pi a}{m} \right)^2 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (2.30)$$

O valor da carga crítica corresponde ao menor autovalor da equação. Para todos os valores de a e b o menor autovalor é obtido considerando $n = 1$.

$$\frac{P_x}{b} = \left(\frac{\pi a}{m} \right)^2 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

A eq. (2.31) pode ser expressa da seguinte forma:

$$N_{cr} = k_c \frac{\pi^2 D}{b} \quad (2.32)$$

onde

$$k_c = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (2.33)$$

O coeficiente k_c é uma função da relação a/b e do parâmetro m .

A Figura 7 mostra uma placa carregada em sua configuração de flambagem.

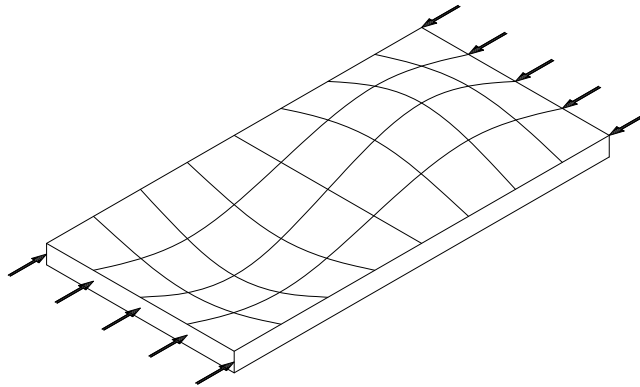


Figura 7 – Placa carregada em sua configuração de flambagem.

A Figura 8 mostra a variação do fator k_c em função da relação a/b , para diversos valores de m . Tem-se assim que o valor de m correspondente à carga crítica depende da relação a/b .

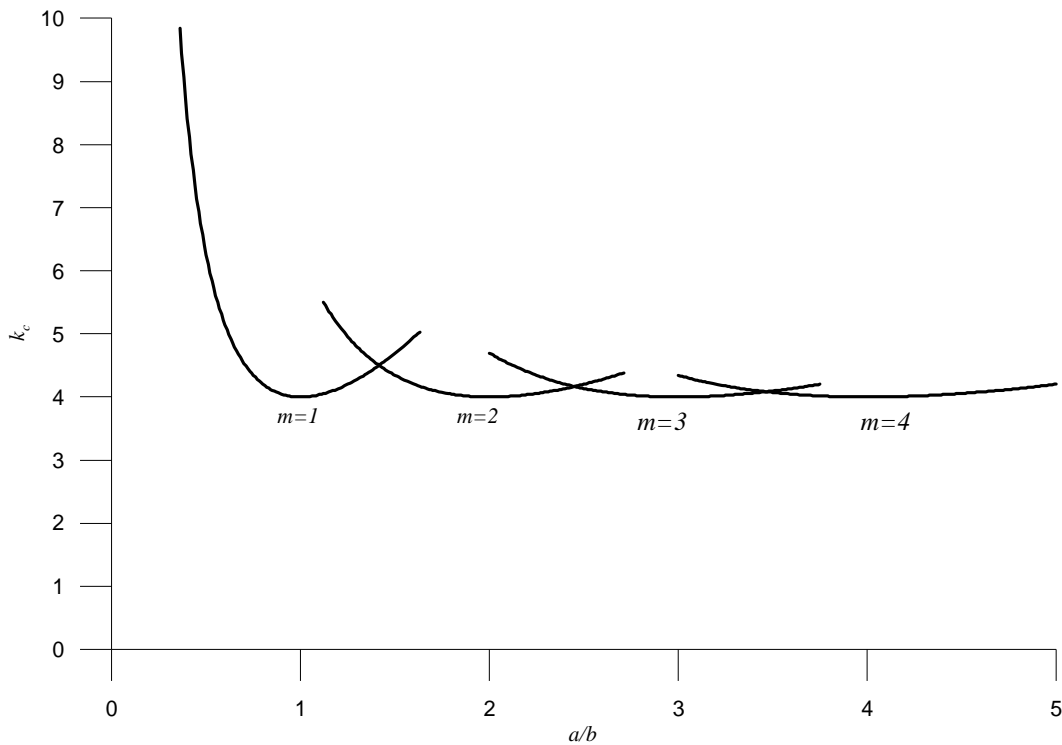


Figura 8 – Valores críticos da tensão axial para placas simplesmente apoiadas submetidas a forças de compressão.

2.4.2.

Método de Galerkin Iterativo – Determinação da Carga Crítica

A forma simples da eq. (2.28), aplicável à condição em que os lados da placa são simplesmente apoiados não é válida para outras condições de contorno.

Como um exemplo mais geral, considera-se uma força P_x aplicada em uma placa simplesmente apoiada nas bordas $x=0, a$, mas com outras condições de contorno em $y=0, b$ e isenta de esforços de cisalhamento. A menor carga crítica para estas condições de contorno, evidentemente, correspondem aos bordos livres em $y=0, b$.

Neste caso a placa pode ser tratada como uma coluna, onde a rigidez à flexão EI é substituída por Db . Então, tem-se:

$$N_{cr} = m^2 \frac{\pi^2 Db}{a^2} \quad (2.34)$$

Este tipo de placa por ser chamado de “*pilar parede*”. O menor autovalor da eq. (2.34) corresponde a $m=1$.

No caso mais geral, a equação diferencial e as condições de contorno em $x = 0, a$ são satisfeitas pela solução da seguinte forma:

$$W(x, y) = Y(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.35)$$

onde $m = 1, 2, 3, \dots$

Introduzindo a eq. (2.35) na equação diferencial de equilíbrio de placas, obtém-se a equação diferencial ordinária de quarta ordem a seguir:

$$Y_{,yyyy} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y_{,yy} + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{P_x}{Db}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] Y = 0 \quad (2.36)$$

A eq. (2.36) é uma equação diferencial com coeficientes constantes. Consequentemente, sua solução é prontamente expressada por condições arbitrárias em $y = 0, b$. A equação característica associada com a eq. (2.36) é:

$$\lambda^4 - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \lambda^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{P_x}{Db}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] = 0 \quad (2.37)$$

As raízes da eq. (2.37) são

$$\lambda = \pm \left[\frac{m\pi}{a} \left(\frac{m\pi}{a} \pm \sqrt{\frac{P_x}{Db}} \right) \right]^{1/2} \quad (2.38)$$

Mas da eq. (2.34) tem-se que $(P_x/Db)^{1/2} = m\pi/a$ para um pilar parede e $(P_x/Db)^{1/2} > m\pi/a$ para todas as outras condições de apoio em $y = 0, b$. Consequentemente, em todos os outros casos as raízes (2.38) podem ser escritas como:

$$\lambda = \lambda_1, -\lambda_1, i\lambda_2, -i\lambda_2$$

onde λ_1 e λ_2 são reais e positivos e dados por

$$\lambda_1 = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{P_x}{Db}} \right]^{1/2} \quad (2.39)$$

$$\lambda_2 = \left[-\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{P_x}{Db}} \right]^{1/2} \quad (2.40)$$

Nesta notação, a solução da eq. (2.36) pode ser escrita como

$$Y(y) = C_1 \sin(\lambda_1 y) + C_2 \cos(\lambda_1 y) + C_3 \sinh(\lambda_2 y) + C_4 \cosh(\lambda_2 y) \quad (2.41)$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes a serem determinadas a partir das condições de contorno em $y = 0, b$.

Como um exemplo, considera-se uma placa engastada nas faces $y = 0, b$ e apoiada nas faces carregadas (Figura 5). As equações para a condição de apoio em $y = 0, b$ são

$$w = w_{,y} = 0 \quad (2.42)$$

Estas equações representam deflexão nula, $w = 0$ e rotação nula, $w_{,y} = 0$ em $y = 0, b$. Aplicando as condições descritas na eq. (2.42), obtém-se quatro equações homogêneas:

$$\left. \begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ C_1 \lambda_1 + C_3 \lambda_2 &= 0 \\ C_1 \sin(\lambda_1 b) + C_2 \cos(\lambda_1 b) + C_3 \sinh(\lambda_2 b) + C_4 \cosh(\lambda_2 b) &= 0 \\ C_1 \cos(\lambda_1 b) \lambda_1 - C_2 \sin(\lambda_1 b) \lambda_1 + C_3 \cosh(\lambda_2 b) \lambda_2 + C_4 \sinh(\lambda_2 b) \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

onde λ_1 e λ_2 são dados pelas Equações (2.39) e (2.40).

Para se obter uma solução não-trivial o determinante dos coeficientes das equações (2.43) deve ser nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \sin(\lambda_1 b) & \cos(\lambda_1 b) & \sinh(\lambda_2 b) & \cosh(\lambda_2 b) \\ \cos(\lambda_1 b) \lambda_1 & -\sin(\lambda_1 b) \lambda_1 & \cosh(\lambda_2 b) \lambda_2 & \sinh(\lambda_2 b) \lambda_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.44)$$

Expandindo o determinante, obtém-se a seguinte equação característica:

$$2\lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1 \cos(\lambda_1 b) \cosh(\lambda_2 b) \lambda_2 - \sin(\lambda_1 b) \lambda_1^2 \sinh(\lambda_2 b) + \sin(\lambda_1 b) \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 b) \quad (2.45)$$

Resolvendo a eq. (2.45) para λ_1 e λ_2 , obtém-se uma expressão implícita para o parâmetro de carga adimensional $P_x b/D$ em termos do parâmetro do número de ondas senoidais m , do coeficiente de Poisson ν , e da relação a/b .

Cálculos mostram que, para todos os valores de a/b , a carga mínima ocorre para $m = 1$. Os resultados podem ser então, expressos na forma

$$N_{cr} = k_c \frac{\pi^2 D}{b} \quad (2.46)$$

onde k_c é o coeficiente de flambagem adimensional para a carga de compressão.

Este procedimento pode ser estendido para as demais condições de contorno em y , como mostram os valores de k_c para as condições de apoio estudadas e para relação $a/b = 1, 0$, apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Valores numéricos do fator k_c na eq. (2.46).

Condições de contorno	k_c	
	Presente Trabalho	Brush & Almroth (1975) ¹
A-E-A-E	7,6913	7,7
A-E-A-L	1,6983	1,7
A-A-A-E	5,7402	5,8
A-A-A-L	1,4342	1,5
A-L-A-L	1,0000	-
A-A-A-A	4,0000	4,0

¹Os valores foram obtidos graficamente.

2.5.

Análise Dinâmica de Placas

2.5.1.

Equação Diferencial de Movimento

Para determinação da equação diferencial de movimento de placas, basicamente dois métodos podem ser utilizados. Tanto pode ser aplicado o princípio do equilíbrio dinâmico de D'Alembert ou usar uma formulação baseada em uma formulação de energia. Para se escrever a equação de movimento de placas deve-se introduzir o conceito de força de inércia, que é definido como sendo

$$p_z^* = -\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\bar{m} \ddot{w} \quad (2.47)$$

onde \bar{m} é a massa por unidade de área.

Na análise dinâmica de placas, as cargas laterais, e conseqüentemente as deformações resultantes, são funções do tempo. Uma maneira conveniente de expressar esta dependência do tempo é através das séries de Fourier. Portanto, a função da carga, por exemplo, pode ser escrita como

$$p_z(x, y, t) = p_z(x, y)(\theta t) = p_z(x, y) \sum_n P_n \sin p_n t \quad (2.48)$$

Partindo da equação diferencial de equilíbrio estático adicionando a força de inércia (eq. (2.47)), a equação diferencial de movimento forçado não-amortecido é obtida como sendo:

$$D\nabla^4 w(x, y, t) = p_z(x, y, t) - \bar{m} \ddot{w} = 0 \quad (2.49)$$

onde x e y são as coordenadas cartesianas no plano médio da superfície.

Para o caso de vibração livre, a força externa p_z é igual a zero, e a

equação diferencial de movimento não-amortecido se torna

$$D\nabla^4 w + \bar{m}\ddot{w} = 0 \quad (2.50)$$

2.5.2.

Determinação das Freqüências e Modos Naturais de Vibração

2.5.2.1.

Método de Lévy

A vibração livre não-amortecida de placas retangulares consiste basicamente em um problema de valor de contorno da física matemática. Desde que a solução para a vibração livre de placas resulte em uma equação diferencial homogênea (eq. (2.50)), os métodos conhecidos para solução da equação bi-harmônica podem ser utilizados. Os efeitos da inércia rotacional são aqui desprezados.

Uma solução para a eq. (2.50) pode ser proposta da seguinte forma

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)\theta(t) \quad (2.51)$$

onde $X(x)Y(y)$ representam os modos de vibração, enquanto que os deslocamentos em função do tempo, $\theta(t)$, são considerados como harmônicos:

$$\theta(t) = \text{sen } \omega t \quad \theta(t) = \cos \omega t \quad (2.52)$$

A solução deve satisfazer as condições de contorno da placa e as condições iniciais do movimento em $t = 0$. Estas condições são: $(w)_{t=0}$ e $(\dot{w})_{t=0}$. Substituindo a eq. (2.51) na eq. (2.50), a equação diferencial para vibração livre torna-se:

$$X_{,xxxx}Y_{,y} + 2X_{,xx}Y_{,yyy} + X_{,x}Y_{,yyyy} - \frac{\bar{m}\omega^2}{D}XY = 0 \quad (2.53)$$

Para placas simplesmente apoiadas, a solução exata da eq. (2.53) é dada pela série dupla de Fourier, conhecida como solução de Navier, como segue:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.54)$$

onde $m = 1, 2, 3, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$. Substituindo a eq. (2.54) na eq. (2.53), tem-se,

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{\bar{m}\omega^2}{D} = 0 \quad (2.55)$$

logo,

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right] \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} \quad (2.56)$$

onde $m = 1, 2, 3, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$.

O primeiro modo de vibração corresponde a uma única onda senoidal nas direções x e y , respectivamente. Este modo está associado à frequência natural em que $m = 1$ e $n = 1$. Fazendo tanto m ou n igual a 2 e o outro igual a 1, os próximos dois modos são obtidos e assim sucessivamente.

Da mesma forma que na análise da estabilidade, pode-se resolver a equação de movimento pelo método de Lévy no caso de placas simplesmente apoiadas em dois lados opostos. Assumindo agora que os lados simplesmente apoiados são em $x = 0, a$, a solução da equação diferencial é dada pela eq. (2.35):

$$W(x, y) = Y(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Esta expressão, substituída na eq. (2.53), resulta em

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{d^4 Y}{dy^4} - \frac{\bar{m} \omega^2}{D} Y = 0 \quad (2.57)$$

A solução geral para Y é:

$$Y(y) = C_1 \sin \lambda_1 y + C_2 \cos \lambda_1 y + C_3 \sinh \lambda_2 y + C_4 \cosh \lambda_2 y \quad (2.58)$$

onde

$$\lambda_1 = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\bar{m}}{D}} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2}} \quad (2.59)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\omega \sqrt{\frac{\bar{m}}{D}} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2}} \quad (2.60)$$

As constantes (C_1 , C_2 , C_3 e C_4) são determinadas a partir das condições de contorno em $y = 0, b$. As condições de contorno permitem obter a equação característica de onde ω pode ser determinado.

Pode-se tomado como exemplo o caso de uma placa simplesmente apoiada nos lados $x = 0, a$, engastada em $y = 0$ e livre em $y = b$. As condições de contorno para os lados $y = 0$ e $y = b$ são, respectivamente

$$w = w_{,y} = 0 \quad (2.61)$$

$$w_{,yy} + \nu w_{,xx} = w_{,yyy} + (2 - \nu) w_{,xxy} = 0 \quad (2.62)$$

Aplicando as condições de contorno ((2.61) e (2.62)) à eq. (2.35), obtém-se um sistema de equações homogêneo como segue:

$$\left. \begin{aligned}
C_2 + C_4 &= 0 \\
C_1\lambda_1 + C_3\lambda_2 &= 0 \\
\left[\left(-\lambda_1^2 - \nu \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \sin(\lambda_1 b) \right] C_1 + \left[\left(-\lambda_1^2 - \nu \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \cos(\lambda_1 b) \right] C_2 + \\
\left[\left(\lambda_2^2 - \nu \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \sinh(\lambda_2 b) \right] C_3 + \left[\left(\lambda_2^2 - \nu \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \cosh(\lambda_2 b) \right] C_4 &= 0 \\
\left\{ \lambda_1 \left[-\lambda_1^2 - (2-\nu) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right] \cos(\lambda_1 b) \right\} C_1 + \left\{ \lambda_1 \left[\lambda_1^2 + (2-\nu) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right] \sin(\lambda_1 b) \right\} C_2 + \\
\left\{ \lambda_2 \left[\lambda_2^2 - (2-\nu) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right] \cosh(\lambda_2 b) \right\} C_3 + \left\{ \lambda_2 \left[\lambda_2^2 - (2-\nu) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right] \sinh(\lambda_2 b) \right\} C_4 &= 0
\end{aligned} \right\} (2.63)$$

Resolvendo a equação característica, obtida a partir da premissa de que o determinante dos coeficientes do sistema homogêneo seja nulo, podem ser calculados os valores de λ_1 e λ_2 , obtendo-se as frequências naturais e os modos de vibração, uma vez que se pode determinar a função $Y(y)$.

2.5.2.2.

Método de Galerkin Iterativo

Para se resolver os casos onde as condições de contorno não se encaixam em nenhum dos casos descritos anteriormente, como, por exemplo, uma placa retangular totalmente engastada em seus quatro lados, deve-se utilizar outras metodologias de análise.

A solução de uma equação diferencial parcial em duas dimensões pode encontrada através do método de separação de variáveis (2.64), onde $X(x)$ e $Y(y)$ são funções nas direções x e y , respectivamente. No caso da placa, tem-se

$$W(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.64)$$

Neste trabalho será utilizado o método de Galerkin para se encontrar as frequências naturais e os modos de vibração. O método de Galerkin é uma generalização e simplificação do princípio dos trabalhos virtuais (Szilard, 1974). Neste trabalho o emprego do método consiste basicamente em encontrar analiticamente uma função $Y(y)$, dada uma função aproximada $X(x)$ que atenda às condições de contorno apresentadas e seja solução da equação diferencial de placas.

Resolvendo a eq. (2.65), obtém-se uma equação diferencial homogênea que permite determinar analiticamente a função $Y(y)$.

$$\int_0^a \left[W_{,xxxx} + 2W_{,xy} + W_{,yyyy} - \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} W \right] \cdot p(x) dx \quad (2.65)$$

onde a é a dimensão da placa na direção do eixo x e $p(x)$ é a função peso que é aqui considerada igual a $X(x)$. A equação diferencial obtida a partir deste método é similar à equação encontrada para o método de Lévy e pode ser resolvida da mesma maneira.

É inicialmente utilizada uma solução polinomial para $X(x)$ que atenda às condições de contorno impostas pelo problema. Estas equações são determinadas a partir da equação da linha elástica de vigas. Na Tabela 3 estão descritas as funções utilizadas neste trabalho que atendem as condições de contorno.

Tabela 3 - Funções polinomiais de vigas.

Condições de contorno	Funções polinomiais
Engastado-Engastado	$X(x) = -\frac{16x^4}{a^4} + \frac{32x^3}{a^3} - \frac{16x^2}{a^2}$
Engastado-Livre	$X(x) = -\frac{x^4}{3a^4} + \frac{4x^3}{3a^3} - \frac{2x^2}{a^2}$
Engastado-Apoiado	$X(x) = -\frac{2x^4}{a^4} + \frac{5x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2}$
Apoiado-Livre	$X(x) = -\frac{x}{a}$

Uma vez obtida a primeira função $Y(y)$, através da primeira iteração do método, pode-se seguir o mesmo procedimento para se encontrar uma função mais precisa para $X(x)$. De posse desta função, é seguido o mesmo procedimento novamente obtendo resultados mais precisos até que o resíduo seja desprezível.

Tomando como exemplo uma placa engastada em seus quatro lados, assume-se a solução inicial da equação diferencial como sendo:

$$W(x, y) = \left(-\frac{16x^4}{a^4} + \frac{32x^3}{a^3} - \frac{16x^2}{a^2} \right) Y(y) \quad (2.66)$$

Aplicando o método de Galerkin na direção x , tem-se que o resultado da eq. (2.65) é uma equação diferencial homogênea de quarta ordem, com coeficientes constantes (eq. (2.67)), a saber:

$$c_1 Y_{,yyyy} + c_2 Y_{,yy} + c_3 \omega^2 Y + c_4 Y = 0 \quad (2.67)$$

onde c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes que dependem apenas das propriedades físicas da placa considerada e foram adotadas para ajudar nas simplificações.

Resolvendo a eq. (2.67), obtém-se:

$$Y(y) = C_1 \sin \lambda_1 y + C_2 \cos \lambda_1 y + C_3 \sinh \lambda_2 y + C_4 \cosh \lambda_2 y \quad (2.68)$$

onde λ_1 e λ_2 são funções das propriedades físicas consideradas e da frequência natural. As constantes (C_1 , C_2 , C_3 e C_4) são determinadas a partir das condições de contorno em $y = 0, b$.

Aplicando as condições de contorno à eq. (2.64), obtém-se um sistema homogêneo, da mesma forma como foi obtido para os casos descritos na seção anterior.

A solução da equação característica permite determinar os valores numéricos de λ_1 e λ_2 e, a partir destes, calcular as frequências naturais e determinar os valores das constantes (C_1 , C_2 , C_3 e C_4), obtendo-se assim os modos de vibração. Na Tabela 4 são apresentados os resultados obtidos para as funções $X(x)$ e $Y(y)$ nas três iterações realizadas para cada função. Estas funções representam o 1º modo de vibração. Podemos verificar claramente que existe uma convergência nas funções, validando o método utilizado.

Na Figura 9 é mostrado um fluxograma do método de Galerkin Iterativo, mostrando os passos necessários para se chegar à solução do problema.

Os valores calculados para as frequências naturais são mostrados na Tabela 5, onde os resultados encontrados neste trabalho são comparados com os publicados por Leissa (1969). As porcentagens representam a diferença entre os resultados.

Tabela 4 - Funções obtidas para $X(x)$ e $Y(y)$ nas três primeiras iterações.

Função em x	Função em y
$-\frac{16x^4}{a^4} + \frac{32x^3}{a^3} - \frac{16x^2}{a^2}$	$0,7677 \sin(0,2693y) - 0,3700 \cos(0,2693y)$ $-0,3698 \sinh(0,5590y) + 0,3700 \cosh(0,5590y)$
$0,5768 \sin(0,4515x) - 0,4728 \cos(0,4515x)$ $-0,4692 \sinh(0,5551x) + 0,4728 \cosh(0,5551x)$	$0,7696 \sin(0,2690y) - 0,3687 \cos(0,2690y)$ $-0,3685 \sinh(0,5617y) + 0,3687 \cosh(0,5617y)$
$0,5768 \sin(0,4515x) - 0,4728 \cos(0,4515x)$ $-0,4692 \sinh(0,5550x) + 0,4728 \cosh(0,5550x)$	$0,7696 \sin(0,2690y) - 0,3687 \cos(0,2690y)$ $-0,3686 \sinh(0,5617y) + 0,3686 \cosh(0,5617y)$

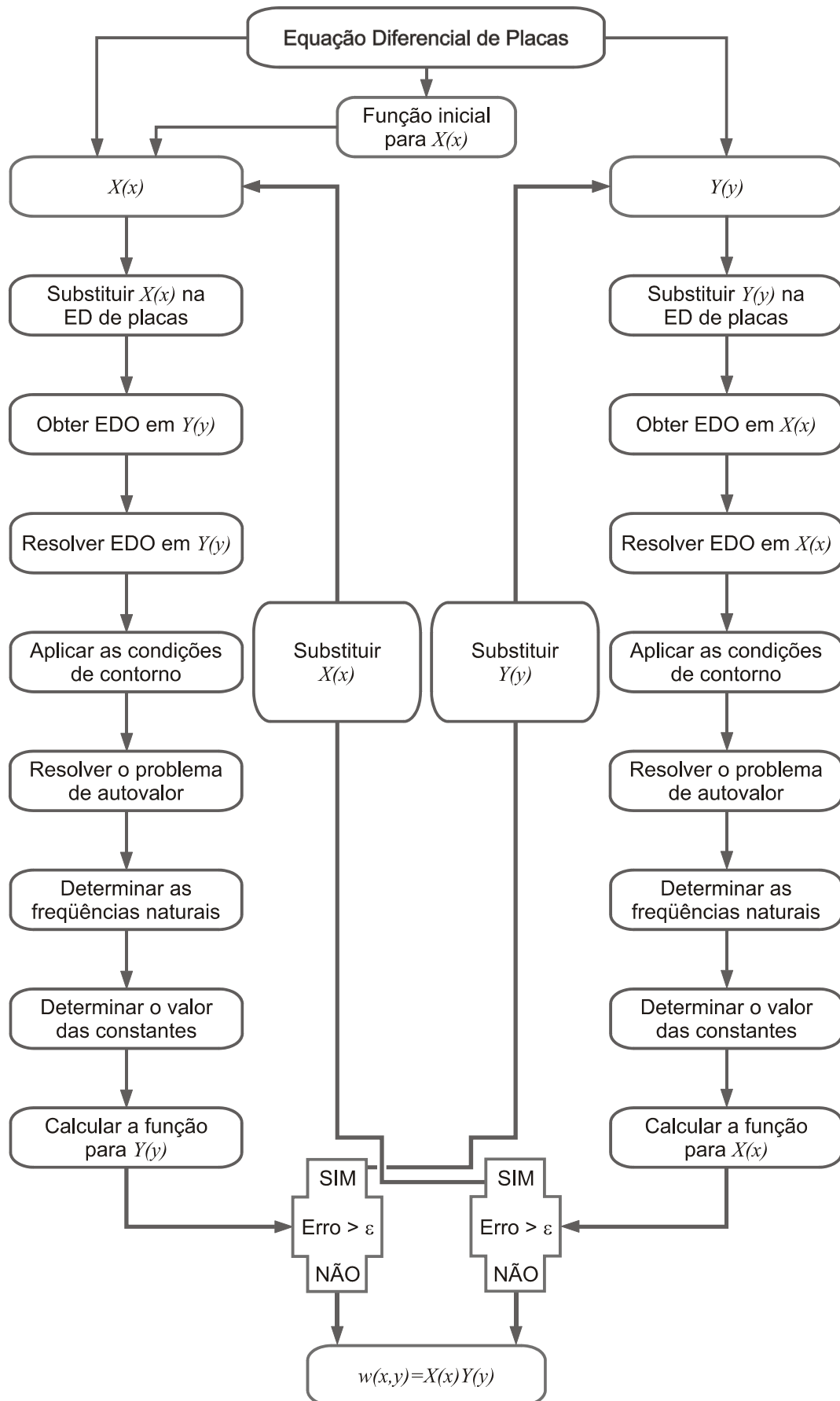


Figura 9 – Fluxograma do Método de Galerkin Iterativo

Os valores calculados para as frequências naturais são mostrados na Tabela 5, onde os resultados deste trabalho são comparados com os publicados por Leissa (1969). As porcentagens representam a diferença entre os resultados.

Tabela 5 – Parâmetro de Frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\bar{m}/D}$ para placa engastada nos quatro lados e $a/b = 2/3$

Seqüência Modal	(m,n)	Presente trabalho	Leissa	Diferença
1	(1,1)	27,012	27,010	0,006
2	(1,2)	41,715	41,716	-0,003%
3	(2,1)	66,130	66,143	-0,020%
4	(1,3)	66,533	66,552	-0,029%
5	(2,2)	79,815	79,850	-0,043%
6	(1,4)	100,821	100,85	-0,029%

Na Tabela 6 são apresentadas as funções obtidas pelo método de Galerkin Iterativo para os seis primeiros modos de vibração. Considera-se uma placa com dimensões $a = 10$ m, $b = 15$ m e $h = 0,20$ m e com $\bar{m} = 5$ kN/m², $E = 30$ GPa e $\nu = 0,3$. A representação gráfica destes modos é apresentada na Figura 10.

O método de Galerkin Iterativo permite obter modos de vibração ortogonais. Esta propriedade favorece a resolução dos problemas de vibração discutidos nos capítulos subseqüentes através da superposição das soluções obtidas para cada modo.

A ortogonalidade dos modos pode ser demonstrada através da integral do produto entre dois distintos modos de vibração aqui obtidos. Como exemplo, far-se-á esta verificação para os dois primeiros modos de vibração obtidos para a placa totalmente engastada (E-E-E-E) do exemplo anterior. Da Tabela 6 tem-se:

$$\begin{aligned}
 w(x, y)_{1,1} = & [0,577 \sin(0,451x) - 0,473 \cos(0,451x) \\
 & - 0,469 \sinh(0,555x) + 0,473 \cosh(0,555x)] \\
 & \cdot [0,769 \sin(0,269y) - 0,369 \cos(0,269y) \\
 & - 0,369 \sinh(0,562y) + 0,369 \cosh(0,562y)]
 \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned}
 w(x, y)_{1,2} = & [0,725 \sin(0,414x) - 0,397 \cos(0,414x) \\
 & - 0,397 \sinh(0,757x) + 0,397 \cosh(0,757x)] \\
 & \cdot [0,627 \sin(0,502y) - 0,450 \cos(0,502y) \\
 & - 0,450 \sinh(0,699y) + 0,450 \cosh(0,699y)]
 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Tabela 6 – Modos de vibração para uma placa engastada nos quatro lados (E-E-E-E)

(m,n)	Modo $w(x, y) = X(x) * Y(y)$
(1,1)	$w(x, y) = [0,577 \sin(0,451x) - 0,473 \cos(0,451x) - 0,469 \sinh(0,555x) + 0,473 \cosh(0,555x)]$ $\cdot [0,769 \sin(0,269y) - 0,369 \cos(0,269y) - 0,369 \sinh(0,562y) + 0,369 \cosh(0,562y)]$
(1,2)	$w(x, y) = [0,725 \sin(0,414x) - 0,397 \cos(0,414x) - 0,397 \sinh(0,757x) + 0,397 \cosh(0,757x)]$ $\cdot [0,627 \sin(0,502y) - 0,450 \cos(0,502y) - 0,450 \sinh(0,699y) + 0,450 \cosh(0,699y)]$
(2,1)	$w(x, y) = [0,529 \sin(0,778x) - 0,490 \cos(0,778x) - 0,490 \sinh(0,839x) + 0,490 \cosh(0,839x)]$ $\cdot [0,921 \sin(0,241y) - 0,225 \cos(0,241y) - 0,225 \sinh(0,988y) + 0,225 \cosh(0,988y)]$
(1,3)	$w(x, y) = [0,834 \sin(0,387x) - 0,319 \cos(0,387x) - 0,319 \sinh(1,012x) + 0,319 \cosh(1,012x)]$ $\cdot [0,570 \sin(0,721y) - 0,474 \cos(0,721y) - 0,474 \sinh(0,866y) + 0,474 \cosh(0,866y)]$
(2,2)	$w(x, y) = [0,598 \sin(0,760x) - 0,463 \cos(0,760x) - 0,463 \sinh(0,983x) + 0,463 \cosh(0,983x)]$ $\cdot [0,791 \sin(0,475y) - 0,353 \cos(0,475y) - 0,353 \sinh(1,064y) + 0,353 \cosh(1,064y)]$
(1,4)	$w(x, y) = [0,895 \sin(0,370x) - 0,257 \cos(0,370x) - 0,257 \sinh(1,288x) + 0,257 \cosh(1,288x)]$ $\cdot [0,543 \sin(0,935y) - 0,485 \cos(0,935y) - 0,485 \sinh(1,048y) + 0,485 \cosh(1,048y)]$

onde as eqs. (2.69) e (2.70) representam o 1º e o 2º modos de vibração, respectivamente.

Para que os modos sejam ortogonais o resultado da integral do produto dos modos no domínio deve ser nulo. Para o caso estudado tem-se o seguinte resultado:

$$\int_0^a \int_0^b w(x, y)_{1,1} w(x, y)_{1,2} dx dy = 0,000014887 \quad (2.71)$$

Como o resultado da integral da eq. (2.71) é muito próximo de zero pode-se afirmar que os modos obtidos através do método de Galerkin são ortogonais. Esta propriedade pode ser usada para terminar o processo iterativo.

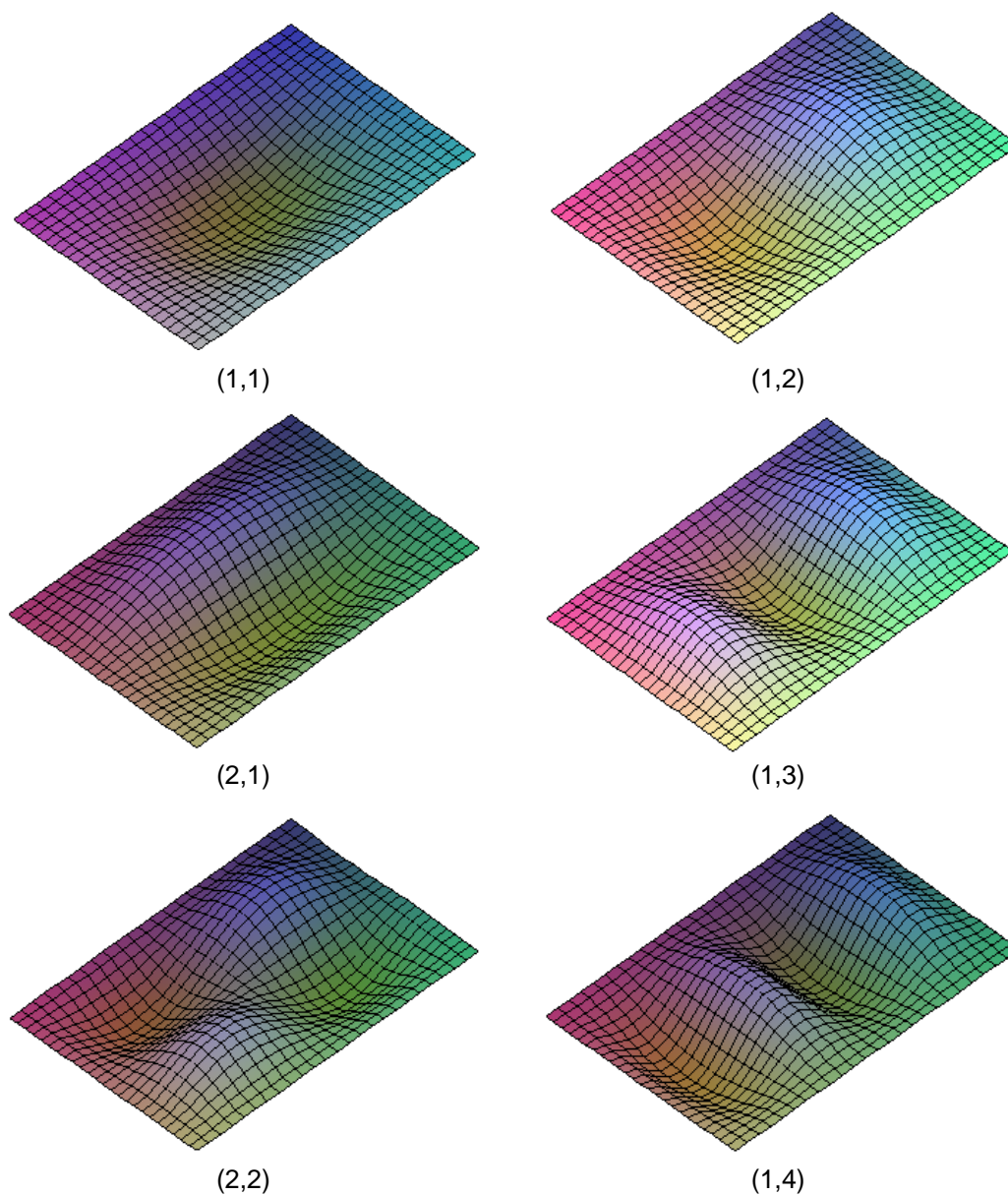


Figura 10 – Seis primeiros modos de vibração para uma placa engastada nos quatro lados (E-E-E-E)

Tabela 7 – Modos de vibração para uma placa engastada nas extremidades $x = 0$ e $y = 0$; e simplesmente apoiada em $x = a$ e $y = b$ (E-E-A-A)

(m,n)	Modo $w(x, y) = X(x) * Y(y)$
(1,1)	$w(x, y) = [0,791 \sin(0,237x) - 0,353 \cos(0,237x) - 0,353 \sinh(0,532x) + 0,353 \cosh(0,532x)] \cdot [0,598 \sin(0,380y) - 0,462 \cos(0,380y) - 0,463 \sinh(0,492y) + 0,463 \cosh(0,492y)]$
(2,1)	$w(x, y) = [0,637 \sin(0,460x) - 0,445 \cos(0,460x) - 0,445 \sinh(0,657x) + 0,445 \cosh(0,657x)] \cdot [0,752 \sin(0,361y) - 0,381 \cos(0,361y) - 0,381 \sinh(0,713y) + 0,381 \cosh(0,713y)]$
(1,2)	$w(x, y) = [0,926 \sin(0,225x) - 0,219 \cos(0,225x) - 0,219 \sinh(0,953x) + 0,219 \cosh(0,953x)] \cdot [0,533 \sin(0,703y) - 0,489 \cos(0,703y) - 0,489 \sinh(0,766y) + 0,489 \cosh(0,766y)]$
(3,1)	$w(x, y) = [0,574 \sin(0,674x) - 0,473 \cos(0,674x) - 0,473 \sinh(0,819x) + 0,473 \cosh(0,819x)] \cdot [0,851 \sin(0,348y) - 0,303 \cos(0,348y) - 0,303 \sinh(0,977y) + 0,303 \cosh(0,977y)]$
(2,2)	$w(x, y) = [0,799 \sin(0,446x) - 0,348 \cos(0,446x) - 0,348 \sinh(1,025x) + 0,348 \cosh(1,025x)] \cdot [0,610 \sin(0,693y) - 0,458 \cos(0,693y) - 0,458 \sinh(0,923y) + 0,458 \cosh(0,923y)]$
(4,1)	$w(x, y) = [0,545 \sin(0,886x) - 0,484 \cos(0,886x) - 0,484 \sinh(0,999x) + 0,484 \cosh(0,999x)] \cdot [0,905 \sin(0,341y) - 0,245 \cos(0,341y) - 0,245 \sinh(1,257y) + 0,245 \cosh(1,257y)]$

Como segundo exemplo, considera-se uma placa engastada nas extremidades $x=0$ e $y=0$; e simplesmente apoiada em $x=a$ e $y=b$ (E-E-A-A). Desta vez as dimensões adotadas para a placa são $a=15$ m, $b=10$ m e $h=0,20$ m. Para o material, tem-se: $\bar{m}=5$ kN/m², $E=30$ GPa e $\nu=0,3$. Na Tabela 7 são apresentadas as funções que descrevem os seis primeiros modos de vibração e na Tabela 8 são apresentados os valores do parâmetro de frequência obtidos, para este caso, comparados com os publicados por Leissa (1969).

Tabela 8 – Parâmetro de Frequência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\bar{m}/D}$ para placa do tipo E-E-A-A e $a/b=1,5$

Seqüência Modal	(m,n)	Presente trabalho	Leissa	Diferença
1	(1,1)	44,895	44,893	0,005%
2	(2,1)	76,554	76,554	0,000%
3	(1,2)	122,324	122,330	-0,005%
4	(3,1)	129,399	129,410	-0,008%
5	(2,2)	152,535	152,580	-0,030%
6	(4,1)	202,654	202,660	-0,003%

Na Figura 11 estão representados graficamente os modos de vibração obtidos para a placa engastada nas extremidades $x=0$ e $y=0$; e simplesmente apoiada em $x=a$ e $y=b$ (E-E-A-A), considerada neste exemplo.

2.5.3. Vibração Livre

Seja inicialmente uma placa plana esbelta simplesmente apoiada. Se uma excitação inicial arbitrária for dada a esta placa, o movimento de vibração livre resultante será uma superposição dos modos de vibração desta placa. Considerando a equação diferencial de movimento de placas com condições iniciais quaisquer:

$$D\nabla^4 w + \bar{m}\ddot{w} = 0 \quad (2.72)$$

a solução é dada por

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.73)$$

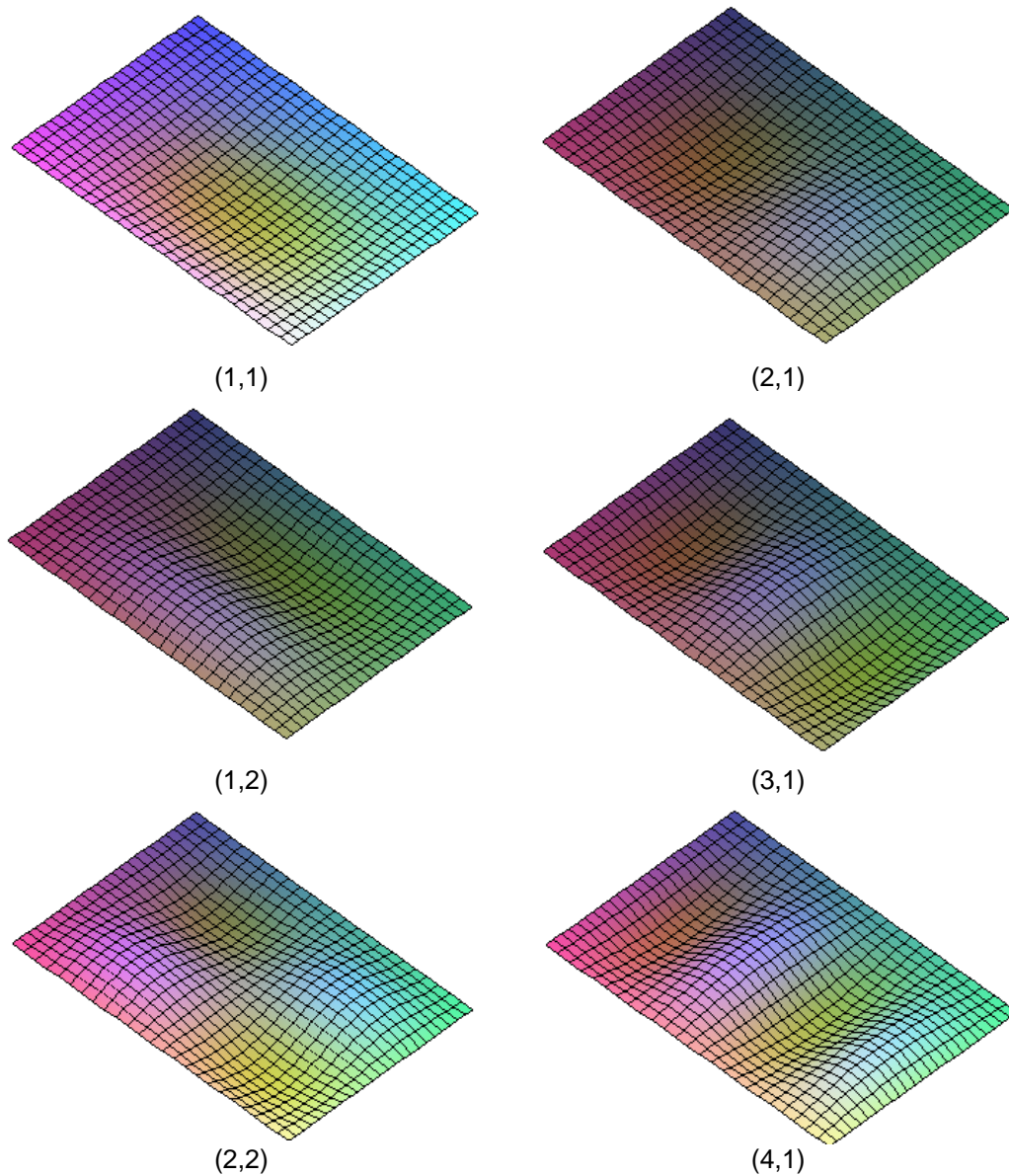


Figura 11 – Seis primeiros modos de vibração para uma placa engastada nas extremidades $x = 0$ e $y = 0$; e simplesmente apoiada em $x = a$ e $y = b$ (E-E-A-A)

onde cada modo satisfaz a equação (2.72) e condições de contorno (2.27).

Substituindo a eq. (2.73) na eq. (2.72), obtém-se a equação diferencial ordinária no tempo que governa o movimento da placa em função dos modos de vibração:

$$\bar{m}_{mn} \ddot{w}_j(t) + k_{mn} w_j(t) = 0 \quad (2.74)$$

onde

$$k_{mn} = \pi^4 D \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 \quad (2.75)$$

A eq. (2.74) pode ser escrita na forma matricial como segue:

$$[\bar{m}]\ddot{\vec{w}}(t) + [k]\vec{w}(t) = 0 \quad (2.76)$$

Para se obter a equação diferencial para vibração livre amortecida basta adicionar uma força de amortecimento ao sistema. Esta força é considerada proporcional à velocidade e pode ser expressa por

$$F = -c\dot{w} \quad (2.77)$$

onde c é a constante de amortecimento ou coeficiente de amortecimento viscoso e o sinal negativo indica que a força de amortecimento age na direção oposta a direção da velocidade. O coeficiente c pode ser definido como

$$c = 2\xi\omega\bar{m} \quad (2.78)$$

onde ξ é a relação entre o coeficiente de amortecimento viscoso c e o coeficiente de amortecimento crítico c_{cr} .

O termo correspondente à força de amortecimento pode ser escrito na forma matricial como segue:

$$[c]\dot{\vec{w}}(t) \quad (2.79)$$

Desta forma a eq. (2.76) se torna

$$[\bar{m}]\ddot{\vec{w}}(t) + [c]\dot{\vec{w}}(t) + [k]\vec{w}(t) = 0 \quad (2.80)$$

A partir da eq. (2.80), pode-se obter n modos desacoplados no espaço, desta forma pode ser utilizado o conceito de superposição como em qualquer problema linear.

O sistema de equações da eq. (2.76), pode ser reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Este sistema reduzido está representado na eq. (2.81).

$$\begin{cases} \dot{X}_j = X_{j+1} \\ \dot{X}_{j+1} = -\omega_k^2 X_j \end{cases} \quad j=1,3,5,\dots \quad k=1,2,3,\dots \quad (2.81)$$

onde $X_j = w_{jm}(t)$, $X_{j+1} = \dot{w}_{jm}(t)$.

Pode-se utilizar, por exemplo, o método de Runge-Kutta (Kreyszig, 1999; Kreyszig et al, 1994; Boyce & DiPrima, 1997) para se obter numericamente a solução da eq. (2.81), esta solução está representada graficamente na Figura 12.

O sistema de equações diferenciais ordinárias para vibração livre amortecida é obtido a partir da eq. (2.80) e está representado na eq. (2.82).

$$\begin{cases} \dot{X}_j = X_{j+1} \\ \dot{X}_{j+1} = -\omega_k^2 X_j - 2\xi\omega_k X_{j+1} \end{cases} \quad j=1,3,5,\dots \quad k=1,2,3,\dots \quad (2.82)$$

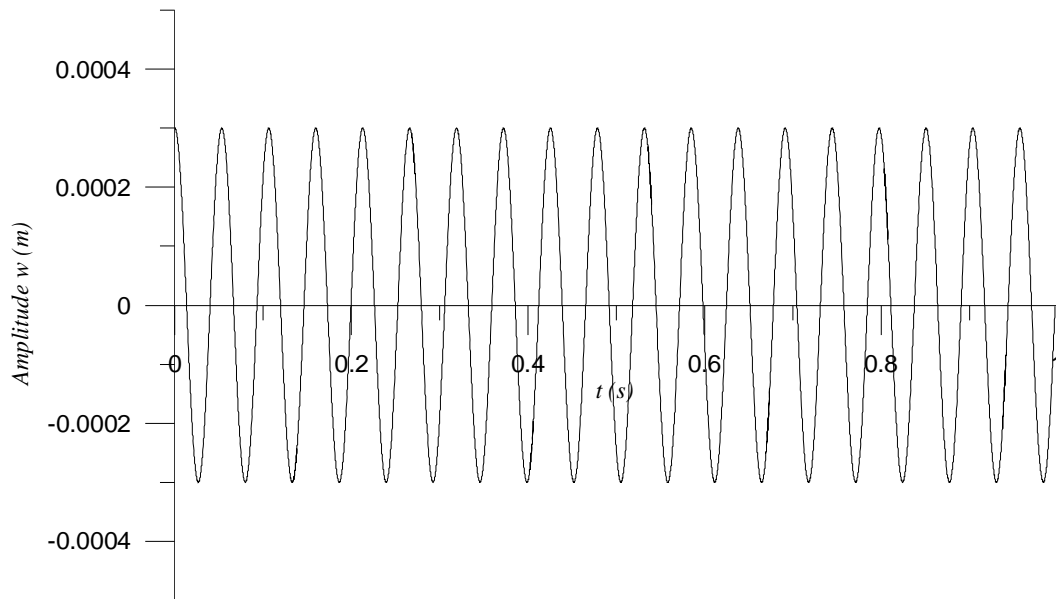


Figura 12 – Amplitude de vibração de uma placa em vibração livre não-amortecida em função do tempo

Da mesma forma obtém-se a representação gráfica da solução da eq. (2.82) através do método de Runge-Kutta, como mostrado na Figura 13.

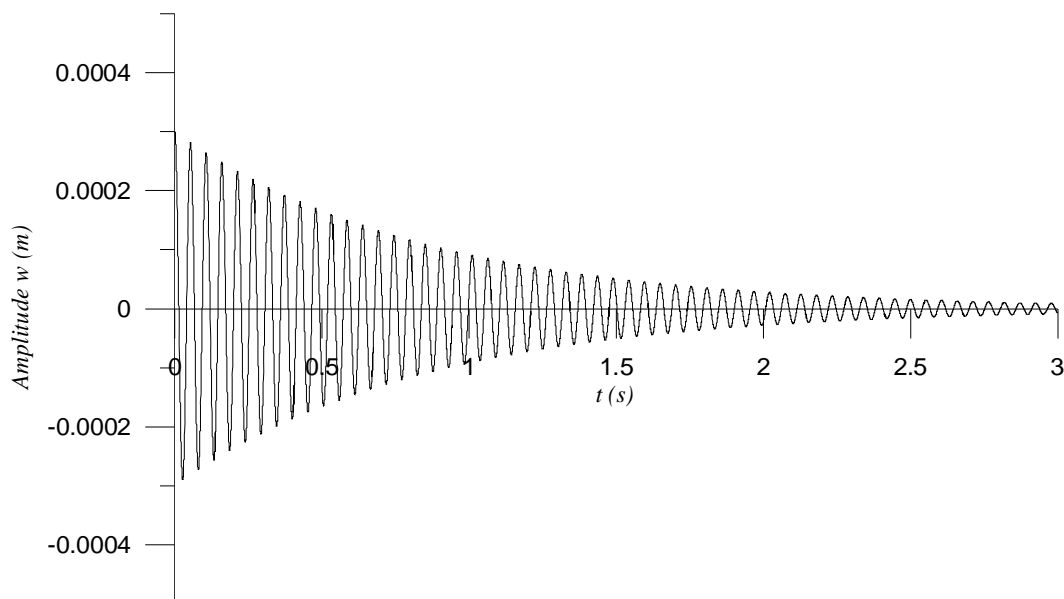


Figura 13 – Amplitude de vibração de uma placa em vibração livre amortecida em função do tempo

A resposta do sistema w_j também pode ser determinada resolvendo diretamente a eq. (2.76), encontrando uma solução que satisfaça a equação diferencial. A solução da eq. (2.76) pode ser escrita como

$$w_{mn}(t) = W_j e^{i\omega t} \quad (2.83)$$

onde W_j é, em geral, uma variável complexa que depende de ω e dos parâmetros do sistema. Substituindo a eq. (2.83) na eq. (2.76), tem-se:

$$\left[\left(-\omega^2 \bar{m}_{mn} + k_{mn} \right) \right] \{ \bar{W}_j \} = 0 \quad (2.84)$$

onde $\left[\left(-\omega^2 \bar{m}_{mn} + k_{mn} \right) \right]$ é uma matriz diagonal.

Assim pode-se obter n equações homogêneas. Pode-se que a eq. (2.84) é satisfeita pela solução trivial $W_j = 0$, o que implica que, neste caso, a vibração da placa é nula. Para uma solução não trivial, o determinante do coeficiente de W_{mn} deve ser nulo:

$$\det \left[\left(-\omega^2 \bar{m}_{mn} + k_{mn} \right) \right] = 0 \quad (2.85)$$

ou

$$\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(-\omega^2 \bar{m}_{mn} + k_{mn} \right) = 0 \quad (2.86)$$

A eq. (2.86) é conhecida como *equação característica* porque a solução desta equação resulta nas freqüências naturais da placa. As soluções da eq. (2.86) são dadas por

$$\omega_{mn}^2 = \frac{k_{mn}}{\bar{m}} = \pi^4 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 \frac{D}{\bar{m}} \quad (2.87)$$

A solução encontrada para a eq. (2.87) é idêntica à encontrada na seção 2.5.2.1 utilizando o método de Lévy.

2.5.4. Vibração Forçada

Será analisada agora a resposta dinâmica de uma placa sob a ação de uma força harmônica aplicada transversalmente ao plano da placa. A vibração da placa é regida pela freqüência da excitação e a amplitude será máxima quando esta freqüência for igual a uma das freqüências naturais da placa. O método de resolução é análogo ao exposto anteriormente para vibração livre, acrescentando-se à equação diferencial de movimento da placa o termo não-homogêneo referente ao carregamento

$$D\nabla^4 w + \bar{m}\ddot{w} = p \quad (2.88)$$

sendo p função de x , y e t .

A obtenção das equações de movimento a partir dos modos de vibração

da placa é feita de maneira análoga à vibração livre. Definindo p como sendo

$$p(x, y, t) = P(x, y)e^{i\omega_f t} \quad (2.89)$$

e

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{0j} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.90)$$

onde ω_f é a frequência da excitação e F_{0j} é a amplitude do carregamento.

Aplicando o método de Galerkin à eq. (2.88), ou seja, multiplicando ambos os lados por $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ e integrando de $x=0$ até a e $y=0$ até b , obtém-se as equações de movimento de 2ª ordem da placa simplesmente apoiada e não-amortecida:

$$\bar{m}_{mn} \ddot{w}_j(t) + k_{mn} w_j(t) = F_{0j} e^{i\omega_f t} \quad (2.91)$$

onde

$$k_{mn} = \pi^4 D \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2 \quad (2.92)$$

A solução particular da eq. (2.91) pode ser escrita para o estado permanente como sendo

$$w_{mn}(t) = W_j e^{i\omega_f t} \quad (2.93)$$

Substituindo a eq. (2.93) na eq. (2.91), obtém-se o sistema simplificado

$$\left[(-\omega_f^2 \bar{m}_{mn} + k_{mn}) \right] \{ \vec{W}_j \} = \{ \vec{F}_{0j} \} \quad (2.94)$$

onde $\left[(-\omega_f^2 \bar{m}_{mn} + k_{mn}) \right]$ é uma matriz diagonal.

A partir da eq. (2.94), pode-se definir a impedância mecânica $Z_{mn}(\omega_f)$ como

$$Z_{mn}(\omega_f) = -\omega_f^2 \bar{m}_{mn} + k_{mn} \quad (2.95)$$

e escrever a eq. (2.94) como

$$\left[Z(\omega_f) \right] \vec{W} = \vec{F}_0 \quad (2.96)$$

Resolvendo a eq. (2.96), obtém-se

$$\vec{W} = \left[Z(\omega_f) \right]^{-1} \vec{F}_0 \quad (2.97)$$

onde a inversa da matriz de impedância é dada por

$$\left[Z_{mn}(\omega_f) \right]^{-1} = \left[\frac{1}{-\omega_f^2 \bar{m}_{mn} + k_{mn}} \right] \quad (2.98)$$

e fazendo $k_{mn}/\bar{m}_{mn} = \omega_j^2$ tem-se

$$\left[Z_{mn}(\omega_f) \right]^{-1} = \left[\frac{1}{-\omega_f^2 + \omega_j^2} \right] \quad (2.99)$$

As eqs. (2.99) e (2.97) levam à solução

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_{0j}}{-\omega_f^2 + \omega_j^2} \quad (2.100)$$

Finalmente substituindo a eq. (2.100) na eq. (2.93), pode-se encontrar a solução completa para $w(t)$. A Figura 14 mostra o espectro de resposta considerando os quatro primeiros modos de vibração. Os trechos onde o valor da amplitude tende ao infinito correspondem aos picos de ressonância, ou seja, a frequência da excitação se iguala à frequência da placa.

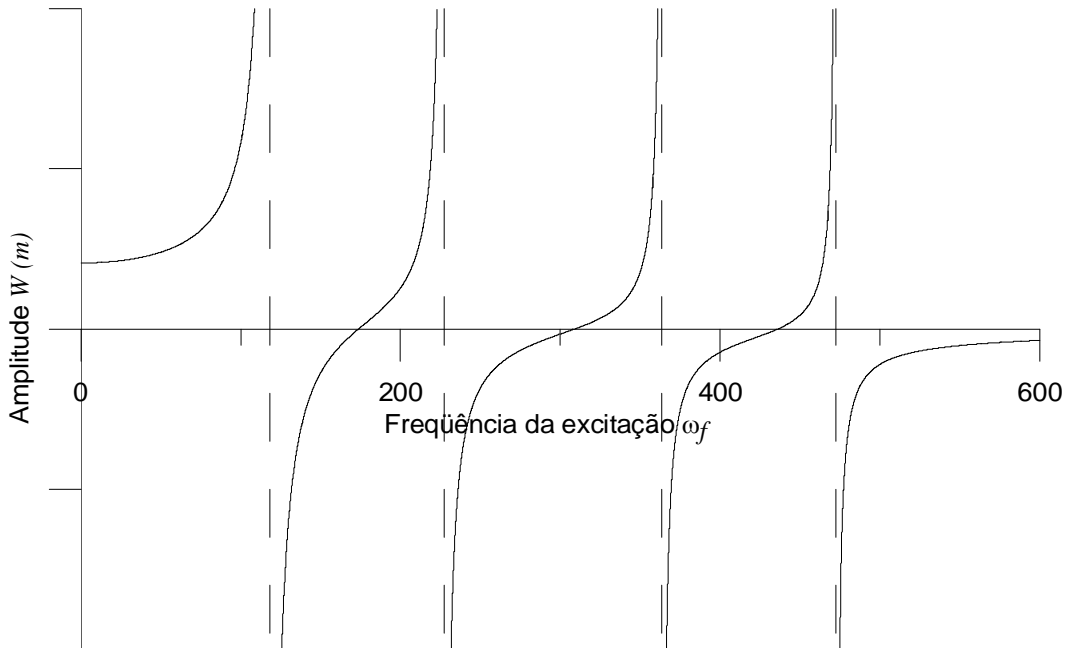


Figura 14 – Espectro de resposta para o carregamento $F(t) = F_{0j} \sin \omega_f t$ para a placa sem amortecimento

Será analisada agora a resposta da placa sob vibração forçada amortecida que pode ser obtida a partir da equação

$$\bar{m}_{mn} \ddot{w}_j(t) + c_{mn} \dot{w}_j(t) + k_{mn} w_j(t) = F_{0j} e^{i\omega_f t} \quad (2.101)$$

A solução particular da eq. (2.101) também é harmônica e pode ser assumida como sendo

$$w_j(t) = W_j e^{i\omega_f t} \quad (2.102)$$

onde W_j é uma constante a ser determinada e representa a amplitude do movimento harmônico em estudo. Substituindo a eq. (2.102) na eq. (2.101), tem-se

$$\left(-\omega_f^2 \bar{m}_{mn} + i\omega_f c_{mn} + k_{mn}\right) \{\vec{W}_j\} = \{\vec{F}_{0j}\} \quad (2.103)$$

Novamente obtém-se a matriz de impedância do sistema amortecido $Z_{mn}(i\omega_f)$, agora definida como

$$Z_{mn}(i\omega_f) = -\omega_f^2 \bar{m}_{mn} + i\omega_f c_{mn} + k_{mn} \quad (2.104)$$

Deste modo, a solução da eq. (2.103) pode ser escrita como

$$[Z(i\omega_f)] \vec{W} = \vec{F}_0 \quad (2.105)$$

e a eq. (2.105) pode ser resolvida para se obter

$$\vec{W} = [Z(i\omega_f)]^{-1} \vec{F}_0 \quad (2.106)$$

onde a inversa da matriz de impedância é dada por

$$[Z_{mn}(\omega_f)]^{-1} = \left[\frac{1}{-\omega_f^2 \bar{m}_{mn} + i\omega_f c_{mn} + k_{mn}} \right] \quad (2.107)$$

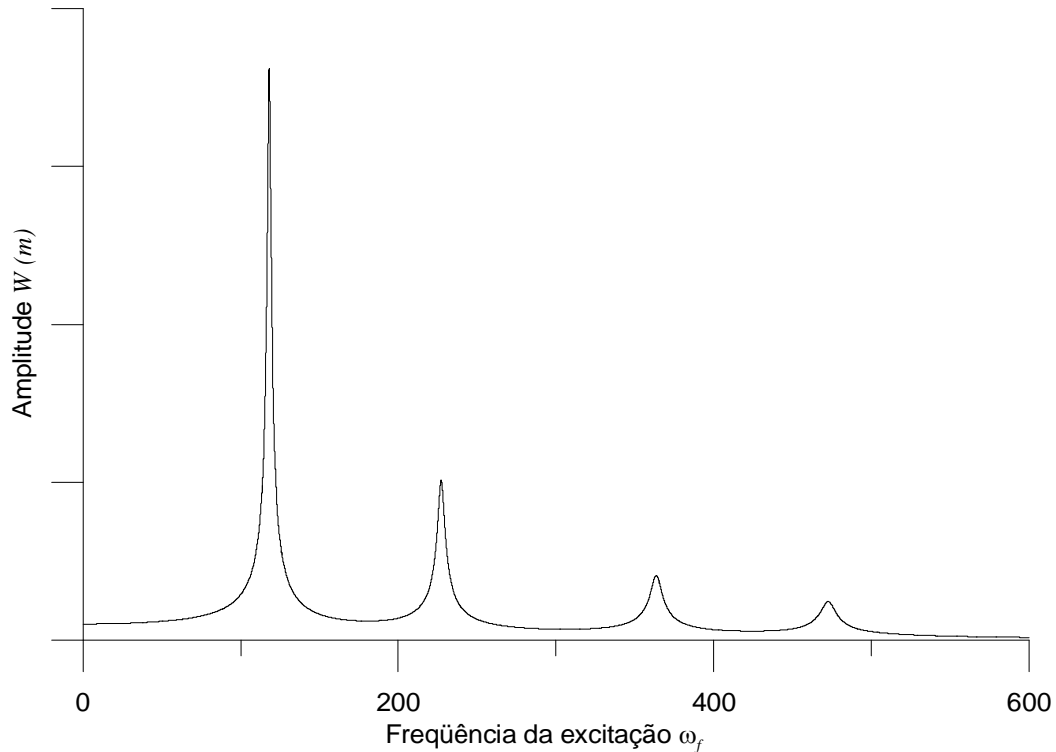


Figura 15 - Espectro de resposta para o carregamento $F(t) = F_{0j} \sin \omega_f t$ para a placa amortecida

Fazendo $k_{mn}/\bar{m}_{mn} = \omega_j^2$ $c_{mn} = 2\xi\omega_j i\omega_f$, tem-se

$$[Z_{mn}(\omega_f)]^{-1} = \left[\frac{1}{-\omega_f^2 + 2\xi\omega_j i\omega_f + \omega_j^2} \right] \quad (2.108)$$

As eqs. (2.99) e (2.97) levam à solução

$$W_j = \frac{F_{0j}}{-\omega_f^2 + 2\xi\omega_j i\omega_f + \omega_j^2} \quad (2.109)$$

A Figura 15 mostra o espectro de resposta para a placa amortecida. Pode-se notar claramente os picos de ressonância relativos às quatro primeiras frequências da placa.

Para se obter a resposta do sistema em função do tempo a eq. (2.101) pode ser transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias com quatro equações, considerando apenas os dois primeiros modos de vibração. A eq. (2.110) mostra este sistema para a placa em vibração forçada e sem amortecimento.

$$\begin{cases} \dot{X}_j = X_{j+1} \\ \dot{X}_{j+1} = -\omega_k^2 X_j + F_{0k} \sin \omega_f t \end{cases} \quad j = 1, 3, 5, \dots \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.110)$$

A solução da eq. (2.110) através do método de Runge-Kutta permite obter a amplitude do movimento harmônico resultante. Pode-se perceber claramente na Figura 16 que o movimento está em ressonância, pois a amplitude cresce indefinidamente com o tempo.

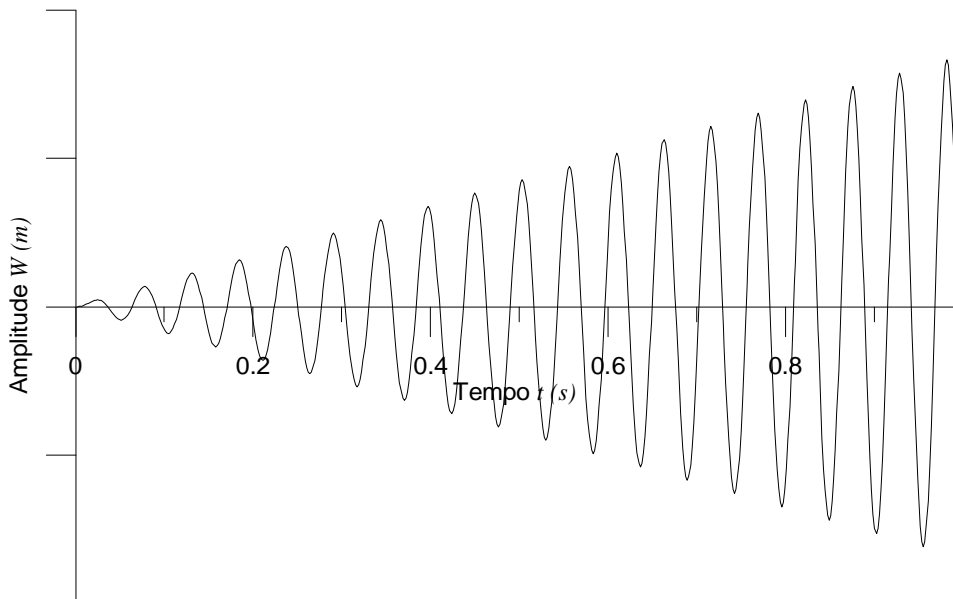


Figura 16 - Amplitude de vibração de uma placa em vibração forçada não-amortecida em função do tempo

O sistema de equações diferenciais ordinárias para vibração forçada amortecida é dado por

$$\begin{cases} \dot{X}_j = X_{j+1} \\ \dot{X}_{j+1} = -\omega_k^2 X_j - 2\xi\omega_k X_{j+1} + F_{0k} \sin \omega_f t \end{cases} \quad j=1,3,5,\dots \quad k=1,2,3,\dots \quad (2.111)$$

Novamente a solução destas equações através do método de Runge-Kutta fornece a amplitude do movimento da placa em função do tempo. A representação gráfica deste movimento pode ser vista na Figura 17. O amortecimento na placa faz com que a amplitude da vibração estabilize em um valor constante na fase permanente do movimento.

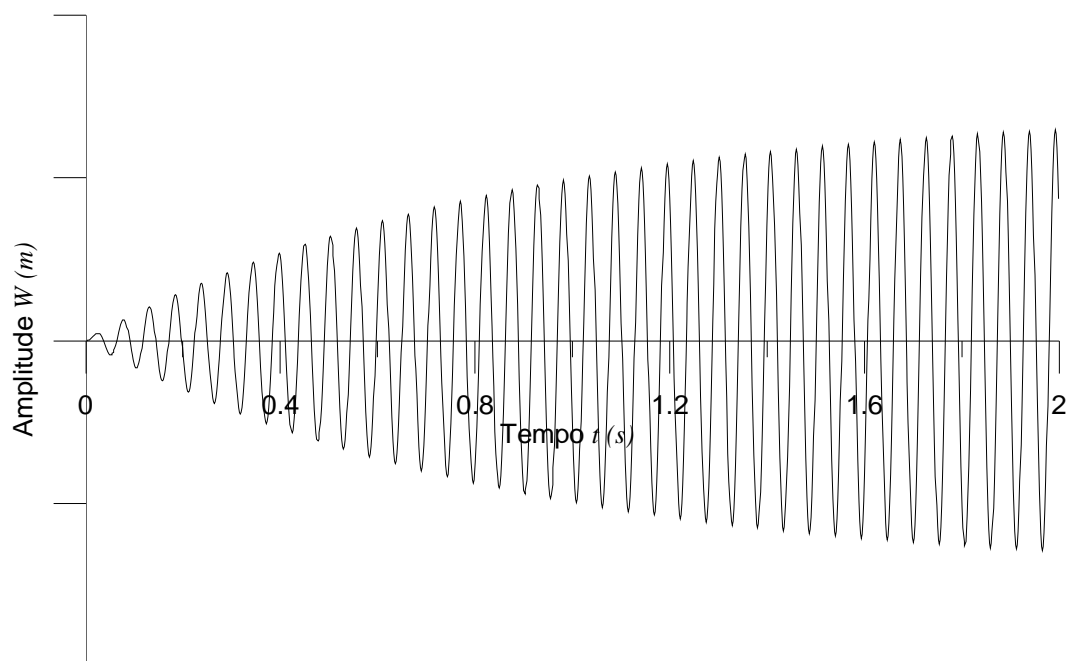


Figura 17 – Amplitude de vibração de uma placa em vibração forçada amortecida em função do tempo