

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Fábio Jorge Dias Machado**

## **Análise e Controle Passivo das Vibrações de Placas Retangulares**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Paulo Batista Gonçalves



**Fábio Jorge Dias Machado**

## **Análise e Controle Passivo das Vibrações de Placas Retangulares**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Paulo Batista Gonçalves**

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Raul Rosas e Silva**

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Giuseppe Barbosa Guimarães**

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Deane de Mesquita Roehl**

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Carlos Magluta**

COPPE/UFRJ

**José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 04 de julho de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Fábio Jorge Dias Machado**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná em fevereiro de 2005.

Ficha Catalográfica

MACHADO, Fábio Jorge Dias

Análise e Controle Passivo das Vibrações de Placas Retangulares / Fábio Jorge Dias Machado; orientador: Paulo Batista Gonçalves – Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2007.

v. 97f.:il; 29,7cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Instabilidade de Placas. 2. Dinâmica de Placas. 3. Vibração em Placas. 4. Controle Passivo. 5. Controle Estrutural. I. Gonçalves, Paulo Batista II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Reni e Célio,  
e à minha querida Tamara,  
pelo apoio e confiança.

## Agradecimentos

A Deus por ter dado forças para o cumprimento desta meta.

Ao meu orientador Professor Paulo Batista Gonçalves pelo estímulo e parceria para a realização deste trabalho.

À FAPERJ, ao CNPq, à CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos meus pais, pela educação, atenção e carinho de todas as horas.

Aos meus irmãos, pelo carinho e estímulo.

À minha querida Tamara pelo apoio e dedicação.

Aos meus amigos e colegas da PUC-Rio, em especial à Marianna, Antônio, Leonardo Erik, Johan, Paola, Diego, Frederico e Renata.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio pelos ensinamentos e pela ajuda.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

## Resumo

MACHADO, Fábio Jorge Dias. Gonçalves, Paulo B. **Análise e Controle Passivo das Vibrações de Placas Retangulares**. Rio de Janeiro, 2007. 97p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho é apresentado um método numérico de resolução para a equação diferencial de placas: o método de Galerkin Iterativo. O método é utilizado para obtenção das cargas críticas de flambagem e das frequências naturais para placas retangulares com condições de contorno arbitrárias. São determinados ainda os modos de vibração de placas para diversas condições de contorno. É também apresentada uma análise do comportamento estático e dinâmico de placas planas retangulares. Utilizando-se dos resultados obtidos nesta análise e do método de Galerkin Iterativo, analisa-se a influência dos carregamentos axiais sobre as propriedades de vibração de uma placa com diversas condições de contorno, como proposta de um meio de controle passivo de vibrações em placas retangulares. Realiza-se uma análise linear para o carregamento no plano médio da placa e outra não-linear no caso de placas submetidas a carregamentos excêntricos, ou seja, fora do plano médio da placa. Mostra-se que o método de Galerkin Iterativo permite a obtenção de modos de vibração ortogonais possibilitando a resolução de problemas dinâmicos através do método de superposição de modos. Além disso, mostra-se que o método de controle passivo de vibrações em placas, através da aplicação de forças de compressão no plano, reduz a amplitude da resposta na região de ressonância.

## Palavras-chave

Instabilidade de Placas; Dinâmica de Placas; Vibração em Placas; Controle Passivo; Controle Estrutural.

## Abstract

MACHADO, Fábio Jorge Dias. Gonçalves, Paulo B. (advisor). **Vibration Analysis and Passive Control of Rectangular Plates**. Rio de Janeiro, 2007. 97p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The aim of this work is to present a procedure for the solution of differential equations for plates: the Iterative Galerkin method. With the aid of this method, the buckling loads and natural frequencies of plates are obtained for plates with arbitrary sets of boundary conditions. The vibration modes of plates with various boundary conditions are obtained and compared with results found in literature. An analysis of the static and dynamic behavior of unloaded and in-plane loaded rectangular plates is presented. The use of in-plane loads as a passive vibration control technique for rectangular plates is investigated using the results obtained by the Iterative Galerkin's method. A linear analysis is conducted for loads applied on the plate mid-surface and a non-linear one for plates with in-plane eccentric loads. Moreover, it is shown that the Iterative Galerkin method leads to a set of orthogonal vibration modes allowing the use of superposition methods in the solution of dynamic problems. Furthermore, the results show that the proposed passive vibration control through the use of in-plane compression loads, decrease the response in the resonance region.

## Keywords

Buckling of Plates; Dynamic Analysis of Plates; Vibration of Plates; Passive Control; Structural Control.

# Sumário

1	Introdução	17
2	Teoria das Placas Esbeltas	20
2.1.	Flexão de Placas Retangulares	20
2.2.	Equações de Equilíbrio e Compatibilidade	24
2.3.	Critério de equilíbrio adjacente	27
2.4.	Aplicações da Equação de Estabilidade	28
2.4.1.	Método de Lévy – Determinação da Carga Crítica	28
2.4.2.	Método de Galerkin Iterativo – Determinação da Carga Crítica	31
2.5.	Análise Dinâmica de Placas	34
2.5.1.	Equação Diferencial de Movimento	34
2.5.2.	Determinação das Frequências e Modos Naturais de Vibração	35
2.5.3.	Vibração Livre	45
2.5.4.	Vibração Forçada	49
3	Controle Passivo com Carregamento no Plano	55
3.1.	Conceitos Básicos	55
3.2.	Análise de Placas carregadas axialmente	55
3.3.	Galerkin Iterativo para placa carregada no plano	63
4	Controle Passivo com Carregamento Excêntrico	72
4.1.	Conceitos Básicos	72
4.2.	Determinação da equação da deformada da placa	72
4.3.	Determinação das frequências naturais e dos modos de vibração	74
5	Considerações Finais	80
5.1.	Conclusões	80
5.2.	Sugestões	82
6	Referências Bibliográficas	83

7 Apêndice	86
7.1. Primeira iteração	86
7.2. Segunda iteração	92

## Lista de figuras

Figura 1 – Placa retangular.	20
Figura 2 – Elemento de placa $dx dy$ na configuração indeformada	21
Figura 3 – Normal ao plano médio antes e depois da deformação.	22
Figura 4 – Elemento de placa na configuração deformada.	25
Figura 5 – Placa apoiada nas faces $x = 0, a$ e engastada nas faces $y = 0, b$ .	28
Figura 6 – Placa submetida à compressão no plano.	29
Figura 7 – Placa carregada em sua configuração de flambagem.	30
Figura 8 – Valores críticos da tensão axial para placas simplesmente apoiadas submetidas a forças de compressão.	31
Figura 9 – Fluxograma do Método de Galerkin Iterativo	40
Figura 10 – Seis primeiros modos de vibração para uma placa engastada nos quatro lados (E-E-E-E)	43
Figura 11 – Seis primeiros modos de vibração para uma placa engastada nas extremidades $x = 0$ e $y = 0$ ; e simplesmente apoiada em $x = a$ e $y = b$ (E-E-A-A)	46
Figura 12 – Amplitude de vibração de uma placa em vibração livre não-amortecida em função do tempo	48
Figura 13 – Amplitude de vibração de uma placa em vibração livre amortecida em função do tempo	48
Figura 14 – Espectro de resposta para o carregamento $F(t) = F_{0j} \text{sen } \omega_j t$ para a placa sem amortecimento	51
Figura 15 - Espectro de resposta para o carregamento $F(t) = F_{0j} \text{sen } \omega_j t$ para a placa amortecida	52
Figura 16 - Amplitude de vibração de uma placa em vibração forçada não-amortecida em função do tempo	53
Figura 17 – Amplitude de vibração de uma placa em vibração forçada amortecida em função do tempo	54
Figura 18 – Quadrado da frequência natural $\omega$ x carregamento $N_x$ para a placa simplesmente apoiada.	57
Figura 19 – Deslocamentos da placa simplesmente apoiada sem carregamento axial.	58
Figura 20 – Deslocamentos da placa simplesmente apoiada com 5% da carga	

crítica.	59
Figura 21 – Deslocamentos da placa simplesmente apoiada com 10% da carga crítica.	59
Figura 22 – Velocidades da placa simplesmente apoiada sem carregamento axial.	59
Figura 23 – Velocidades da placa simplesmente apoiada com 5% da carga crítica.	60
Figura 24 – Velocidades da placa simplesmente apoiada com 10% da carga crítica.	60
Figura 25 – Acelerações da placa simplesmente apoiada sem carregamento axial.	61
Figura 26 – Acelerações da placa simplesmente apoiada com 5% da carga crítica.	61
Figura 27 – Acelerações da placa simplesmente apoiada com 10% da carga crítica.	61
Figura 28 – Variação da amplitude com o aumento do carregamento axial.	62
Figura 29 – Variação da velocidade com o aumento do carregamento axial.	62
Figura 30 – Variação da aceleração com o aumento do carregamento axial.	63
Figura 31 – Deslocamentos em função da frequência para cada valor de $\sigma_x / \sigma_{xc}$ .	64
Figura 32 – Frequência natural em função do carregamento uniaxial para placa sem carregamento e com carregamento excêntrico.	78
Figura 33 – Frequência natural em função da excentricidade do carregamento.	78

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Condições de contorno para placas esbeltas.	28
Tabela 2 - Valores numéricos do fator $k_c$ na eq. (2.46).	34
Tabela 3 - Funções polinomiais de vigas.	38
Tabela 4 - Funções obtidas para $X(x)$ e $Y(y)$ nas três primeiras iterações.	39
Tabela 5 – Parâmetro de Freqüência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\bar{m}/D}$ para placa engastada nos quatro lados e $a/b = 2/3$	41
Tabela 6 – Modos de vibração para uma placa engastada nos quatro lados (E-E-E-E)	42
Tabela 7 – Modos de vibração para uma placa engastada nas extremidades $x = 0$ e $y = 0$ ; e simplesmente apoiada em $x = a$ e $y = b$ (E-E-A-A)	44
Tabela 8 – Parâmetro de Freqüência $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\bar{m}/D}$ para placa do tipo E-E-A-A e $a/b = 1,5$	45
Tabela 9 – Freqüências naturais da placa com carregamento axial. ( Hz ) $a/b = 2/3$	58
Tabela 10 – Freqüências Naturais e Modos de vibração para uma placa engastada (E-E-E-E) e sem carregamento axial	65
Tabela 11 – Freqüências Naturais e Modos de vibração para uma placa engastada (E-E-E-E) e com carregamento de $0,10N_{xc}$	67
Tabela 12 – Freqüências Naturais e Modos de vibração para uma placa engastada (E-E-E-E) e com carregamento de $0,30N_{xc}$	69
Tabela 13 – Deflexões no centro de uma placa retangular simplesmente apoiada e submetida a um carregamento $N_y$ aplicado com excentricidade $e$ . (Timoshenko & Woinowski-Krieger, 1959).	74

## Lista de Símbolos

### Romanos

$a, b$	Dimensões da placa nas direções $x$ e $y$ respectivamente
$h$	Altura da placa na direção $z$
$p$	Carga aplicada transversalmente ao plano da placa
$x, y, z$	Eixos cartesianos
$N_x, N_y$	Forças normais no plano da placa
$N_{cr}$	Carga crítica de flambagem
$N_{xy}, N_{yx}$	Forças cisalhantes no plano da placa
$Q_x, Q_y$	Forças cisalhantes transversais ao plano da placa
$M_x, M_y$	Momentos fletores
$M_{xy}, M_{yx}$	Momentos torsores
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Componentes de deslocamento em qualquer ponto da espessura da placa nas direções $x, y$ e $z$ respectivamente
$u, v, w$	Componentes de deslocamento no plano médio da placa nas direções $x, y$ e $z$ respectivamente
$u_1, v_1, w_1$	Incrementos de deslocamento nas direções $x, y$ e $z$ respectivamente
$u_0, v_0, w_0$	Deslocamentos iniciais nas direções $x, y$ e $z$ respectivamente
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$C$	Rigidez extensional
$D$	Rigidez a flexão
$f$	Função de tensão de Airy
$P_x$	Força distribuída uniformemente nas extremidades da placa
$c_1, c_2, \dots, C_1, C_2, \dots$	Constantes numéricas
$m, n, j, k$	Inteiros positivos
$I$	Momento de inércia

$k_c$	Coeficiente de flambagem
$W(x, y), w(x, y)$	Funções de deslocamento em $z$
$X(x), Y(y)$	Funções de deslocamento em $z$ nas direções $x$ e $y$ respectivamente
$t$	Tempo
$\bar{m}$	Massa por unidade de área
$p_z^*$	Força de inércia
$p(x)$	Função peso para o método de Galerkin Iterativo
$k$	Coeficiente de rigidez
$c, c_{cr}$	Coeficiente de amortecimento
$F$	Força
$Z_{mn}(\omega)$	Impedância mecânica
$e$	Excentricidade
$c_w$	Amplitude do modo de vibração
$A_1, A_2$	Constantes
<b>Gregos</b>	
$\alpha$	Ângulo
$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$	Componente de tensão normal em qualquer ponto da espessura da placa
$\sigma_x, \sigma_y$	Componente de tensão normal no plano médio da placa na direção $x$
$\bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yx}, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$	Componente de tensão cisalhante em qualquer ponto da espessura da placa
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Componentes de tensão cisalhante no plano médio da placa
$\beta_x, \beta_y$	Rotações relativas
$\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}$	Deformações específicas em qualquer ponto da placa
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\nabla^4$	$\nabla^2 \cdot \nabla^2$ onde $\nabla^2$ corresponde ao operador Laplaciano
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$	Parâmetro de frequência e autovalores das funções características

$\theta(t)$	Função deslocamento no tempo
$\omega$	Frequência natural
$\Omega$	Frequência natural normalizada
$\xi$	Taxa de amortecimento
$\mu$	Amplitude da deformação no centro da placa
$\zeta$	Amplitude do modo de vibração

*If human life were long enough to find the  
ultimate theory, everything would have been  
solved by previous generations. Nothing  
would be left to be discovered*

Stephen Hawking