

4 Exemplos de validação

Neste capítulo, são apresentados exemplos de validação com o objetivo de mostrar a eficiência da substituição de uma malha de elementos finitos por funções polinomiais demonstrando o bom funcionamento do programa realizado, utilizando Maple 9.0.

Os resultados obtidos são as cargas críticas de flambagem da peça com seus modos de instabilidade e as frequências naturais com seus respectivos modos de vibração.

4.1. Exemplo 1 – Elemento de Barber

Para validar o programa realizado, elabora-se um exemplo com cargas críticas analíticas conhecidas. Utiliza-se para a realização deste exemplo o elemento de Barber apresentado no capítulo anterior.

Neste exemplo, estuda-se o caso de uma coluna, engastada na base e livre no topo (pilar engastado-livre), com uma seção transversal constante, variando apenas o comprimento, e submetida a uma tensão distribuída no topo (σ_y), coeficiente de Poisson igual a zero e material isotrópico.

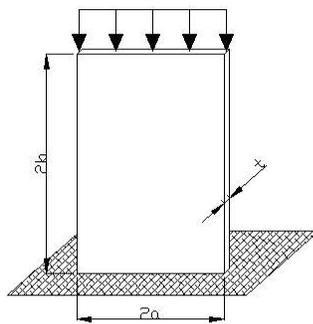


Figura 4-1 – Pilar analisado.

Para representar as condições de contorno na base da coluna foram restringidos os quatro graus de liberdade (dois de translações e dois de rotação),

como sendo molas rígidas, referente aos nós três e quatro, e os graus de liberdade referente ao lado engastado (duas translações – horizontal e vertical).

Os resultados analíticos da Teoria de Vigas para as cargas críticas, (Timoshenko e Gere, 1984), em função das características estruturais apresentadas são obtidos com as equações a seguir:

- Carga crítica de Euler desprezando o efeito de cisalhamento

$$P_{Euler} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad 4-1$$

- Carga crítica considerando o efeito de cisalhamento

$$P_{Euler \text{ com cisal.}} = \frac{P_{Euler}}{1 + \frac{n \cdot P_{Euler}}{A \cdot G}} \quad 4-2$$

onde,

P_{Euler} = carga crítica analítica de Euler, para uma coluna engastada-livre, desprezando o efeito de cisalhamento;

$P_{Euler \text{ com cisal.}}$ = carga crítica analítica considerando o efeito de cisalhamento;

L = comprimento;

A = área;

G = módulo de elasticidade transversal, dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad 4-3$$

n = fator numérico que depende da forma da seção transversal. Para seção transversal retangular $n=1,2$;

Os valores analíticos das frequências, desprezando o cisalhamento, para os três primeiros modos de flambagem são obtidos através da equação 4-4 (Weaver e Johnston, 1984).

$$\omega_i = \frac{\mu_i}{L^2} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} ; \begin{cases} \rightarrow \mu_1 = 3,516, \text{ para o } 1^\circ \text{ modo} \\ \rightarrow \mu_2 = 22,03, \text{ para o } 2^\circ \text{ modo} \\ \rightarrow \mu_3 = 61,70, \text{ para o } 3^\circ \text{ modo} \end{cases} \quad 4-4$$

onde,

μ_i = fator que varia de acordo com o modo i ;

E = módulo de elasticidade longitudinal;

I = momento de inércia da seção transversal;

ρ = densidade de massa;

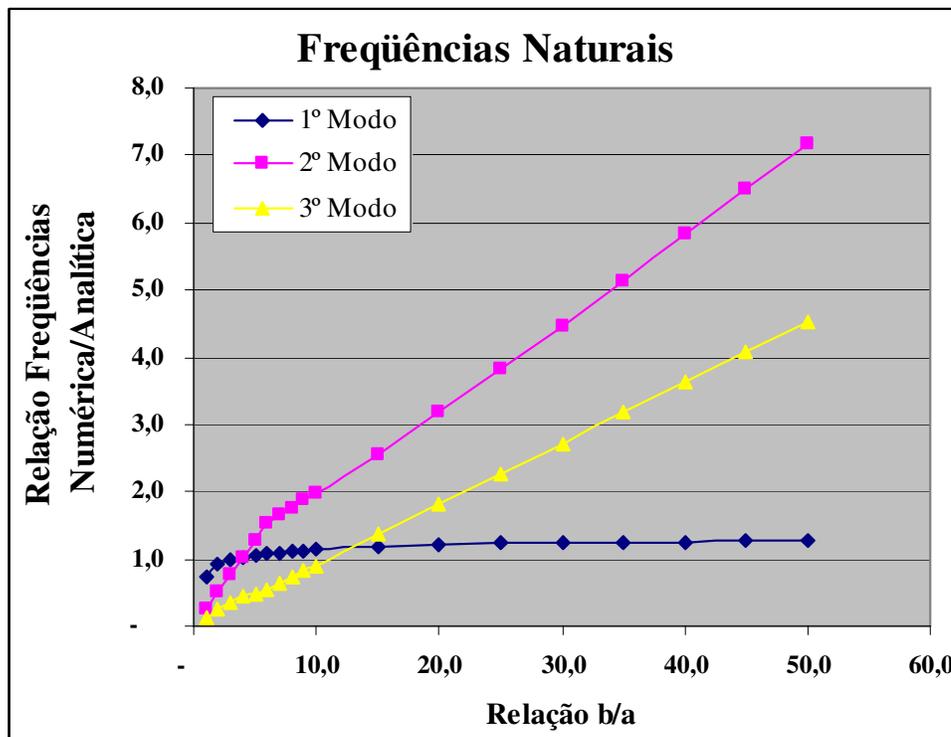
A Tabela 4 apresenta os valores da razão das três primeiras frequências numéricas em relação às analíticas. Os valores numéricos das mesmas representam os três primeiros modos de flambagem, ou seja, os três valores mais baixos do autovalor. Além da razão entre as frequências, apresenta-se a razão entre a primeira carga crítica numérica em relação à analítica (carga de Euler e carga de Euler com cisalhamento). Observou-se que o segundo e terceiro valores das cargas críticas numéricas se distanciavam bastante do primeiro e por isso não foram apresentados.

Os gráficos das Figura 4-2 e Figura 4-3 representam a razão entre as frequências numéricas e analíticas e a razão entre as cargas críticas numéricas e analíticas em relação a razão b/a , respectivamente, da coluna engastada-livre, mostrada na Figura 4-1, utilizando funções polinomiais de quarto grau.

Analisando os gráficos, observa-se que as frequências naturais e as cargas críticas apresentam erros que aumentam quando se aumenta a esbeltez. Portanto, para obter valores adequados ao se usar o elemento de Barber, é necessário aumentar o grau das funções polinomiais (isto é, inserir mais funções adicionais). Um estudo mais otimizado do procedimento de refinamento iria requerer uma escolha de funções a partir de indicadores de erro nos modos de flambagem. Entretanto, para efeitos práticos deste trabalho, o refinamento é feito de forma simplesmente seqüencial, buscando-se reduzir o erro nas frequências e cargas críticas.

Tabela 4 – Cargas críticas e frequências naturais, utilizando funções polinomiais de 4º grau ($\nu=0$).

$\frac{b}{a}$	Relação entre Frequências Numéricas e Analíticas			Cargas Críticas	
	1º Modo	2º Modo	3º Modo	$\frac{P_{cr}}{P_{Euler}}$	$\frac{P_{cr}}{P_{Euler}}$ com cisalhamento
1,0	0,725212	0,254370	0,121495	0,48986250	0,73159995
2,0	0,926178	0,508740	0,256379	0,85814600	0,96401552
3,0	0,997416	0,763109	0,357251	0,95010739	1,00220285
4,0	1,034355	1,017479	0,432542	0,98726104	1,01771065
5,0	1,059807	1,271849	0,491891	1,00880405	1,02871705
6,0	1,080422	1,517692	0,544937	1,02417290	1,03821204
7,0	1,098405	1,643096	0,635760	1,03636406	1,04680131
8,0	1,114539	1,760805	0,726582	1,04652604	1,05459541
9,0	1,129126	1,874919	0,817405	1,05518824	1,06161682
10,0	1,142306	1,987827	0,908228	1,06263957	1,06788349
15,0	1,190598	2,565246	1,362342	1,08744126	1,08982628
20,0	1,218286	3,177775	1,816456	1,10012223	1,10147945
25,0	1,234612	3,817188	2,270570	1,10726281	1,10813707
30,0	1,244710	4,474149	2,724684	1,11146933	1,11207876
35,0	1,251648	5,142436	3,178798	1,11477541	1,11522449
40,0	1,255726	5,818535	3,632912	1,11582398	1,11616813
45,0	1,259562	6,500135	4,087026	1,11823725	1,11850976
50,0	1,261132	7,185635	4,541140	1,11778272	1,11800336

Figura 4-2 – Relação de Frequências Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 4º grau ($A_x = A_y = 1$ e $L_x = L_y = 1$) e com $\nu=0$.

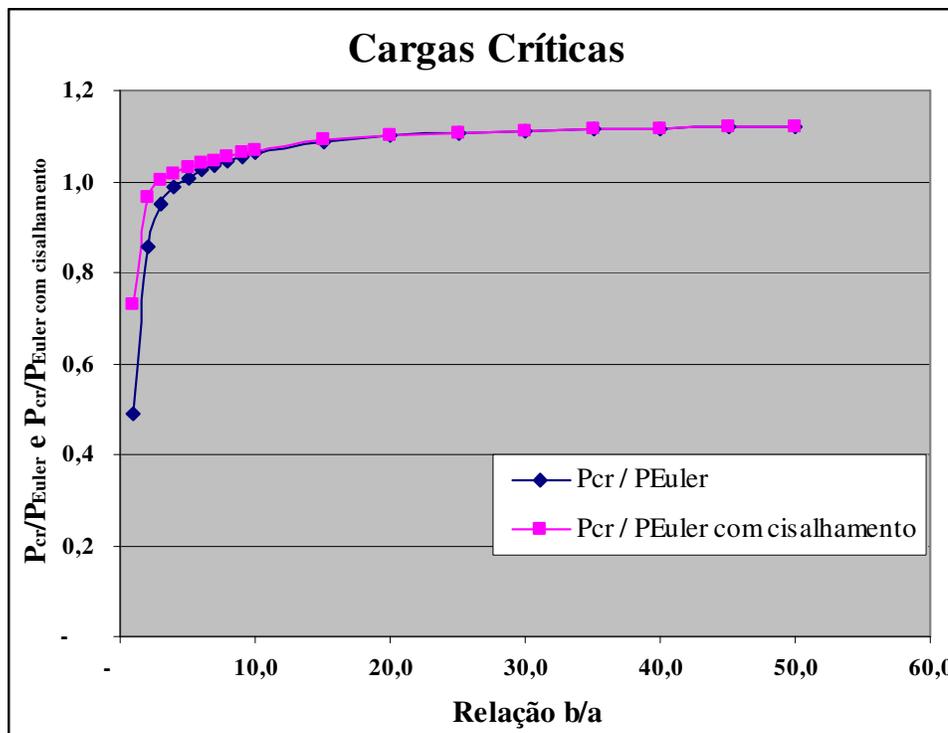


Figura 4-3 – Relação de Cargas Críticas Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 4º grau ($Ax = Ay = 1$ e $Lx = Ly = 1$) e com $\nu = 0$.

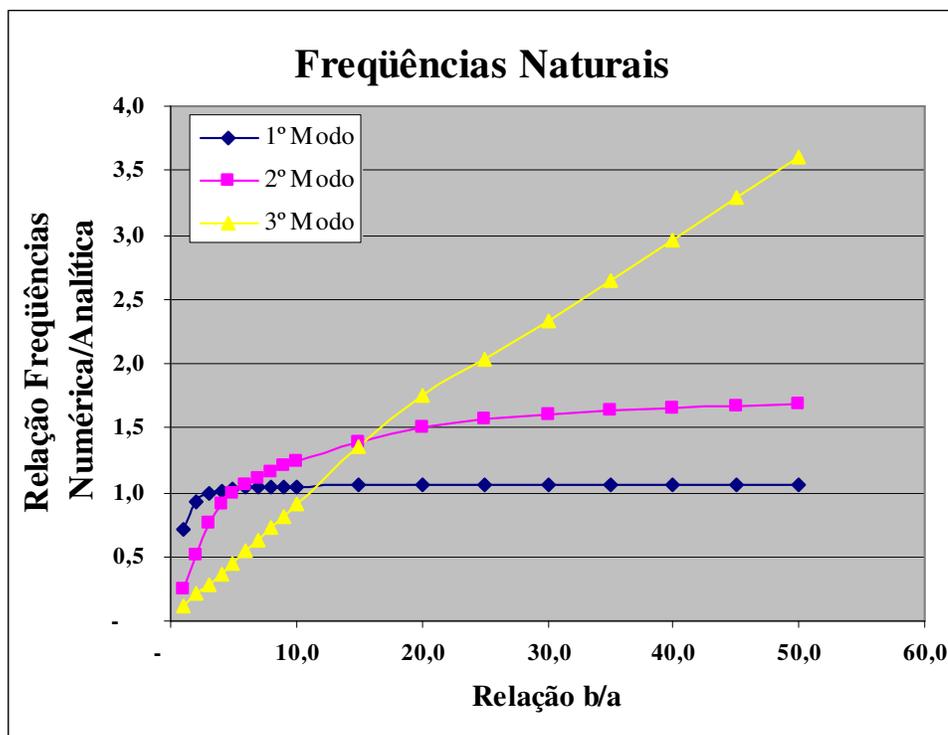
Na Tabela 5 são apresentados os valores da razão das três primeiras frequências naturais numéricas em relação às analíticas e a razão entre a primeira carga crítica numérica em relação à analítica, utilizando funções polinomiais até o quinto grau.

Os gráficos das Figura 4-4 e Figura 4-5 representam a razão entre as frequências naturais numéricas e analíticas e a razão entre as cargas críticas numéricas e analíticas em relação a razão b/a , respectivamente, do pilar engastado-livre, mostrado na Figura 4-1, utilizando funções polinomiais de quinto grau.

Analisando os gráficos, observa-se que ao utilizar funções polinomiais de quinto grau (2 função adicional) as frequências continuam apresentando erros que aumentam quando se aumenta a esbelteza. Porém as cargas críticas de flambagem se comportaram conforme esperado.

Tabela 5 – Cargas críticas e frequências naturais, utilizando funções polinomiais de 5° grau ($\nu=0$).

$\frac{b}{a}$	Relação entre Frequências Numéricas e Analíticas			Cargas Críticas	
	1° Modo	2° Modo	3° Modo	P_{cr} / P_{Euler}	P_{cr} / P_{Euler} com cisalhamento
1,0	0,717730	0,253666	0,112714	0,37424075	0,55892115
2,0	0,920013	0,507331	0,216736	0,82257819	0,92405970
3,0	0,986573	0,760997	0,282566	0,92376959	0,97442093
4,0	1,014581	0,911021	0,362285	0,95777019	0,98731023
5,0	1,028705	0,995388	0,452857	0,97319803	0,99240819
6,0	1,036795	1,060348	0,543428	0,98150116	0,99495537
7,0	1,041880	1,114123	0,633999	0,98648974	0,99642470
8,0	1,045303	1,160967	0,724571	0,98972569	0,99735710
9,0	1,047735	1,203084	0,815142	0,99194965	0,99799295
10,0	1,049534	1,241625	0,905713	0,99354208	0,99844501
15,0	1,054147	1,394901	1,358570	0,99735654	0,99954399
20,0	1,055974	1,497108	1,752980	0,99870823	0,99994034
25,0	1,056905	1,563791	2,036368	0,99938060	1,00016968
30,0	1,057420	1,607752	2,334679	0,99971208	1,00026023
35,0	1,058084	1,637549	2,643779	1,00057322	1,00097629
40,0	1,057909	1,658352	2,960474	0,99993930	1,00024770
45,0	1,058675	1,673427	3,282604	1,00122464	1,00146864
50,0	1,058091	1,684476	3,608963	0,99990443	1,00010181

Figura 4-4 – Relação de Frequências Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 5° grau ($A_x = A_y = 2$ e $L_x = L_y = 2$) e com $\nu = 0$.

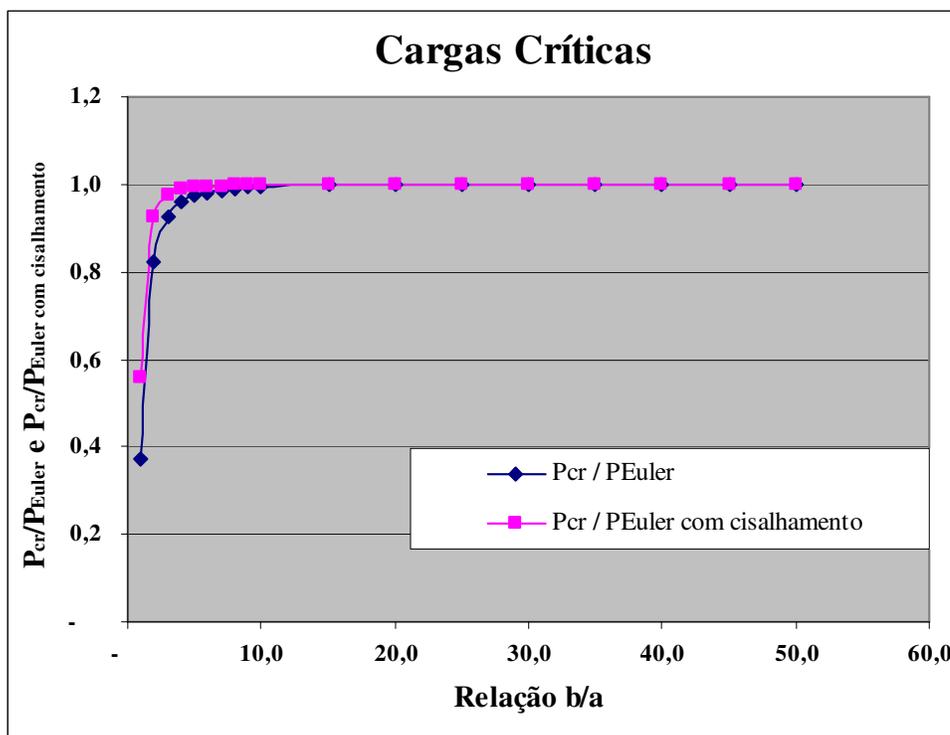


Figura 4-5 – Relação de Cargas Críticas Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 5º grau ($A_x = A_y = 2$ e $L_x = L_y = 2$) e com $\nu = 0$.

Embora os valores de frequências analíticas comparadas não considerem o cisalhamento presente no cálculo numérico, utilizam-se posteriormente funções polinomiais de sexto grau (3 funções adicionais). Já as cargas críticas apresentaram o comportamento esperado – quando se aumenta a esbeltez da peça, a carga crítica numérica se aproxima da analítica.

Na Tabela 6, são apresentados os valores da razão das três primeiras frequências naturais numéricas em relação às analíticas e a razão entre a primeira carga crítica numérica em relação à analítica, usando funções polinomiais de sexto grau (3 funções adicionais),

Os gráficos das Figura 4-6 e Figura 4-7 representam a razão entre as frequências numéricas e analíticas e a razão entre as cargas críticas numéricas e analíticas em relação à razão b/a , respectivamente, do pilar engastado-livre, mostrado na Figura 4-1, utilizando funções polinomiais de sexto grau.

Tabela 6 – Cargas críticas e frequências naturais, utilizando funções polinomiais de 6° grau e ($\nu=0$).

$\frac{b}{a}$	Relação entre Frequências Numéricas e Analíticas			Cargas Críticas	
	1° Modo	2° Modo	3° Modo	P_{cr} / P_{Euler}	P_{cr} / P_{Euler} com cisalhamento
1,0	0,702233	0,250322	0,111817	0,25168092	0,37588048
2,0	0,897199	0,500644	0,213805	0,75128247	0,84396822
3,0	0,961355	0,750966	0,275998	0,89317318	0,94214688
4,0	0,988950	0,878218	0,357510	0,93530842	0,96415568
5,0	1,003534	0,944372	0,446887	0,95393502	0,97276494
6,0	1,012518	0,988060	0,536265	0,96419173	0,97740866
7,0	1,018718	1,018335	0,625642	0,97070450	0,98048049
8,0	1,023360	1,040239	0,715020	0,97526484	0,98278474
9,0	1,027042	1,056683	0,804397	0,97751147	0,98346681
10,0	1,030073	1,069414	0,893775	0,98137475	0,98621764
15,0	1,039922	1,104920	1,112017	0,98939527	0,99156525
20,0	1,045217	1,120599	1,172915	0,99332442	0,99454989
25,0	1,048351	1,128926	1,210549	0,99557649	0,99636257
30,0	1,050277	1,133885	1,234714	0,99691193	0,99745854
35,0	1,051914	1,136981	1,251083	0,99844033	0,99884255
40,0	1,052389	1,139052	1,262216	0,99826500	0,99857289
45,0	1,053649	1,140475	1,270520	0,99987893	1,00012260
50,0	1,053392	1,141736	1,276391	0,99880127	0,99899843

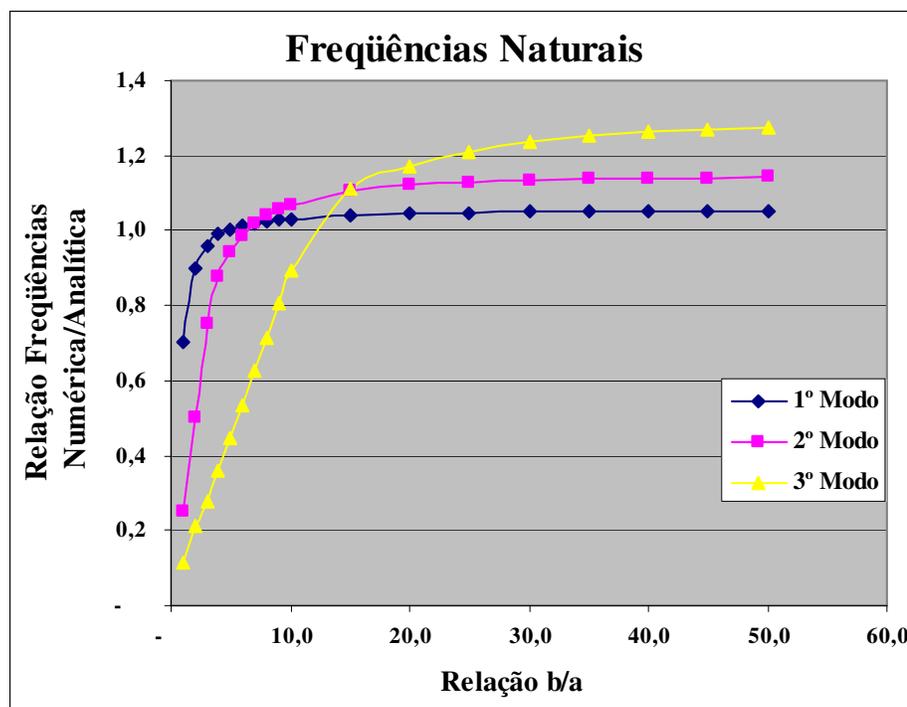


Figura 4-6 – Relação de Frequências Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 6° grau ($Ax= Ay=3$ e $Lx= Ly=3$) e com $\nu=0$.

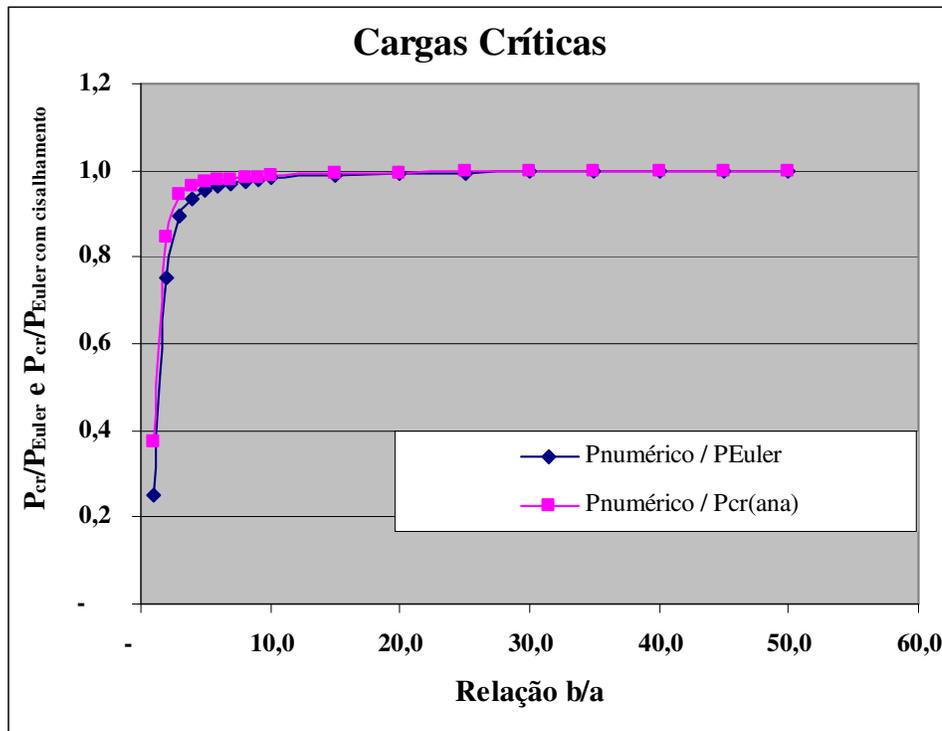


Figura 4-7 – Relação de Cargas Críticas Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 6º grau ($A_x = A_y = 3$ e $L_x = L_y = 3$) e com $\nu = 0$.

Analisando os gráficos, observa-se que ao se utilizar funções polinomiais de sexto grau, embora as frequências dos 1º e 2º modos apresentem valores superiores aos esperados, permanecem constantes quando se aumenta a esbeltez. Ainda se observou uma tendência a aumentar o erro na 3ª frequência quando se aumenta a esbeltez. A seguir, mostram-se resultados utilizando funções polinomiais de sétimo grau (4 funções adicionais).

Os resultados utilizando funções polinomiais de sétimo grau (4 funções adicional) estão na Tabela 7, que contém apenas a razão das frequências, visto que os resultados desejados das cargas críticas já são obtidos.

Tabela 7 – Freqüências naturais, utilizando funções polinomiais de 7º grau ($\nu=0$).

$\frac{b}{a}$	Relação entre Freqüências Numéricas e Analíticas		
	1º Modo	2º Modo	3º Modo
1,0	0,698770	0,250153	0,109388
2,0	0,895119	0,500306	0,207235
3,0	0,959400	0,747713	0,267952
4,0	0,986316	0,848626	0,357269
5,0	0,999789	0,911923	0,446586
6,0	1,007425	0,953634	0,535903
7,0	1,012157	0,982499	0,625220
8,0	1,015290	1,003382	0,714538
9,0	1,017476	1,019087	0,803855
10,0	1,019061	1,031291	0,893172
15,0	1,022949	1,065948	0,992018
20,0	1,024390	1,081985	1,013347
25,0	1,025104	1,090874	1,024107
30,0	1,025478	1,096333	1,030229
35,0	1,026083	1,099820	1,034080
40,0	1,025754	1,102226	1,036561
45,0	1,026511	1,103874	1,038348
50,0	1,025992	1,105268	1,039612

O gráfico da Figura 4-8 apresenta que as freqüências naturais estão com desvios pequenos. Deve-se levar em consideração que os valores analíticos não consideram o efeito de cisalhamento que é aqui considerado nos valores numéricos.

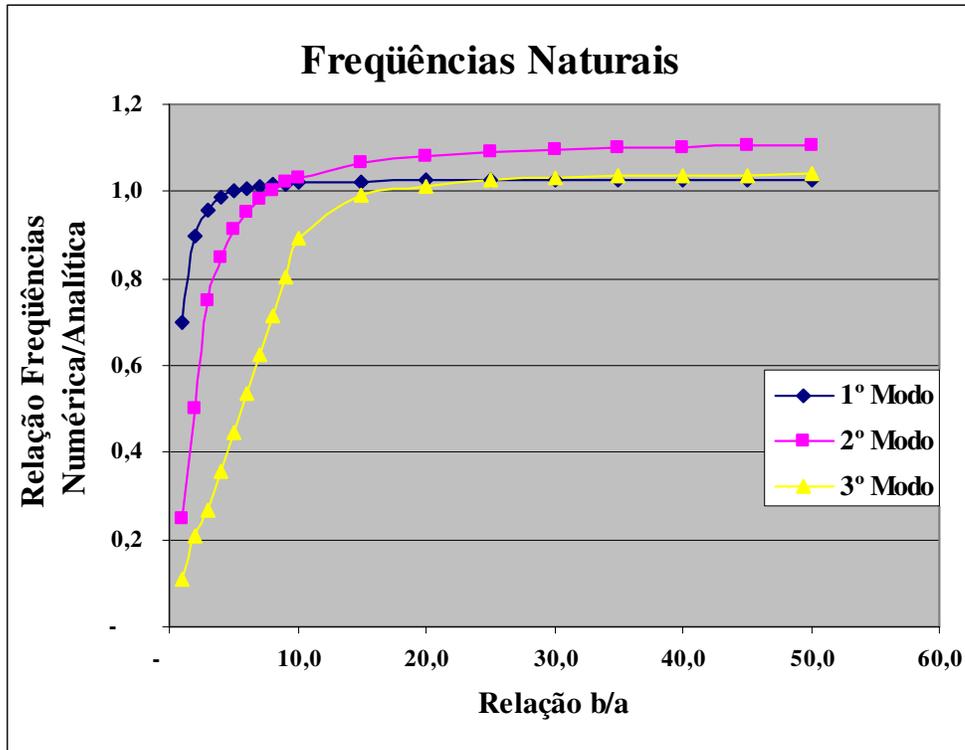


Figura 4-8 – Relação de Frequências Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 7º grau ($Ax = Ay = 4$ e $Lx = Ly = 4$) e com $\nu = 0$.

A seguir são apresentados os modos de flambagem (para a primeira carga crítica) nas direções u e v , e os modos de vibração para as três primeiras frequências naturais.

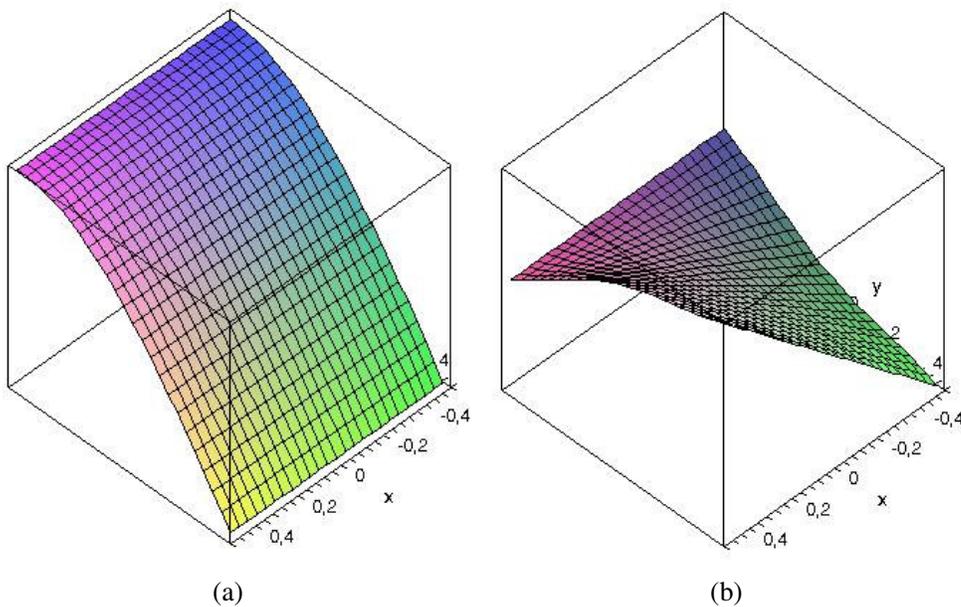


Figura 4-9 – Modos de Flambagem (a) direção ' u ' ou ' x ', e (b) direção ' v ' ou ' y '.

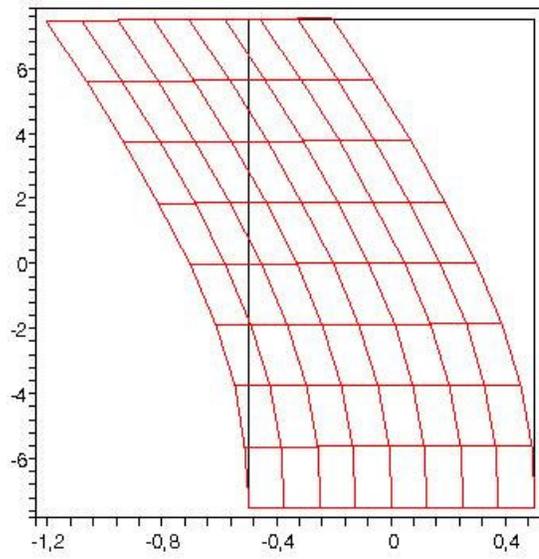
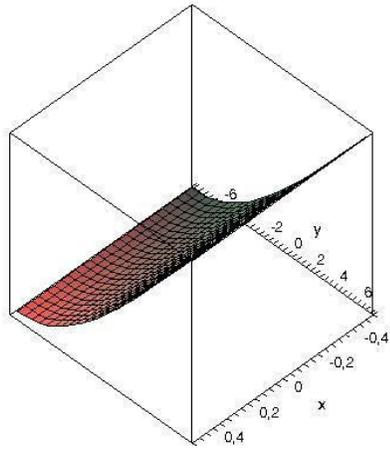
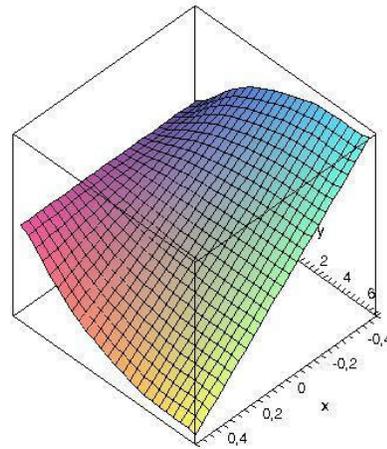


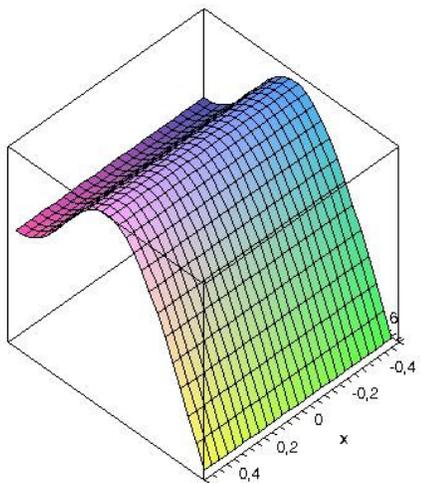
Figura 4-10 – Modo de Flambagem generalizado.



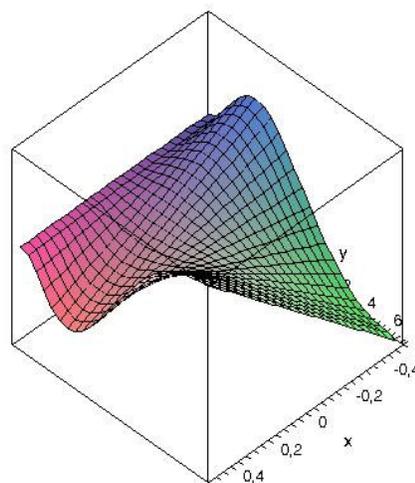
(a)



(b)



(c)



(d)

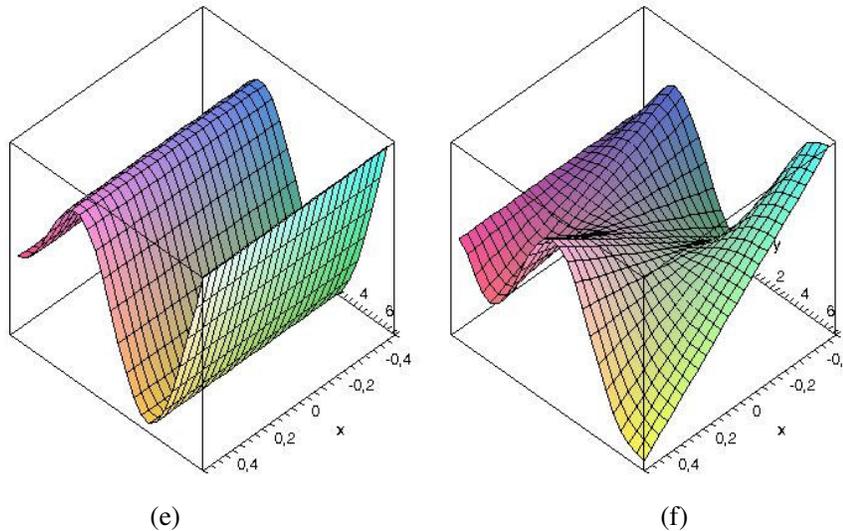


Figura 4-11 – Modo de Vibração: (a) e (b) 1º modo de vibração nas direções u e v , respectivamente; (c) e (d) 2º modo de vibração nas direções u e v , respectivamente; (e) e (f) 3º modo de vibração nas direções u e v , respectivamente;

4.2.

Exemplo 3 – Elemento de Barber sem GL de rotação

Para validar o exemplo 1, a peça estudada foi um pilar engastado-livre com suas condições de contorno (travando os quatro graus de liberdade – duas translações e duas rotações – dos nós três e quatro do elemento da Figura 3-1 e os graus de liberdade referente ao lado 2).

Neste exemplo, alteram-se as condições de contorno, liberando os graus de liberdade de rotação dos nós três e quatro. As características do material e tensão aplicada são as mesmas do exemplo anterior, com coeficiente de Poisson igual a zero. Com isso os resultados obtidos são apresentados a seguir:

Tabela 8 – Resultados obtidos no exemplo 3, ($\nu=0$).

$\frac{b}{a}$	P_{cr}/P_{Euler}	P_{cr}/P_{Euler} com cisalhamento	$\frac{b}{a}$	P_{cr}/P_{Euler}	P_{cr}/P_{Euler} com cisalhamento
1,00	0,3264690539	0,4875750745	10,00	0,9876100437	0,9924837040
2,00	0,7354654231	0,8261998329	15,00	0,9945690624	0,9967503964
3,00	0,8728676019	0,9207279237	20,00	0,9970980767	0,9983281971
4,00	0,9261851237	0,9547510012	25,00	0,9983012842	0,9990895113
5,00	0,9519277318	0,9707180321	30,00	0,9989666106	0,9995143553
6,00	0,9662372705	0,9794822422	35,00	0,9993814207	0,9997840125
7,00	0,9749976681	0,9848168939	40,00	0,9996402007	0,9999485149
8,00	0,9807502957	0,9883124968	45,00	0,9998323426	1,0000759957
9,00	0,9847341444	0,9907334878	50,00	0,9999563947	1,0001537782

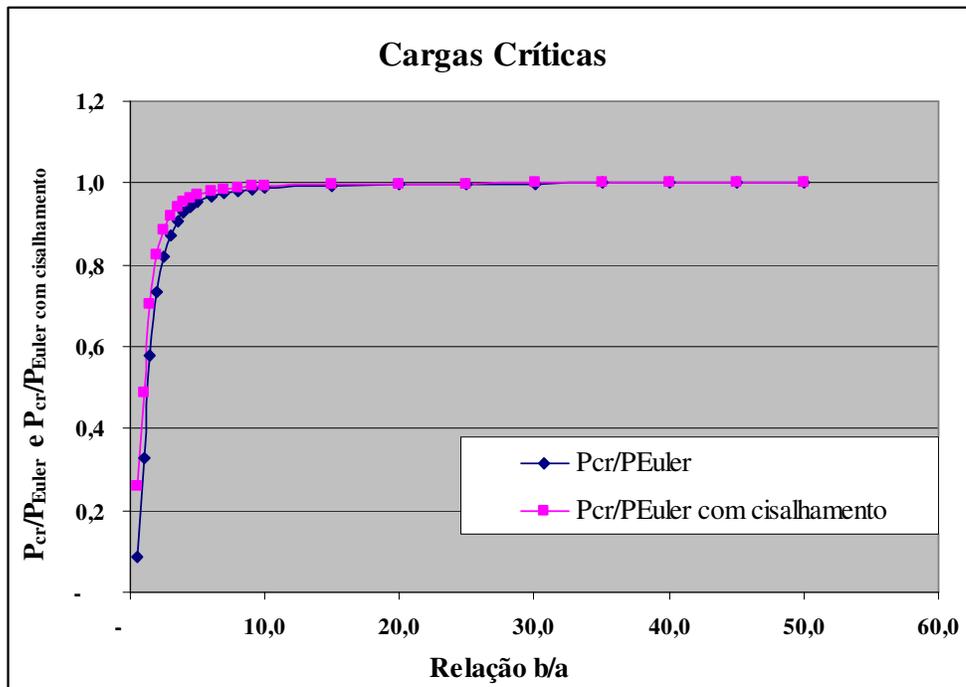
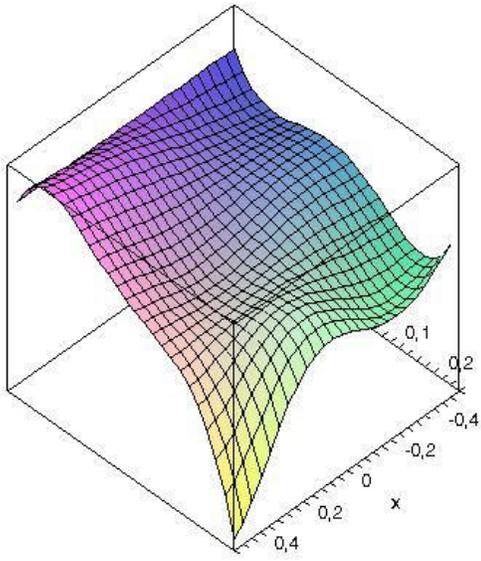
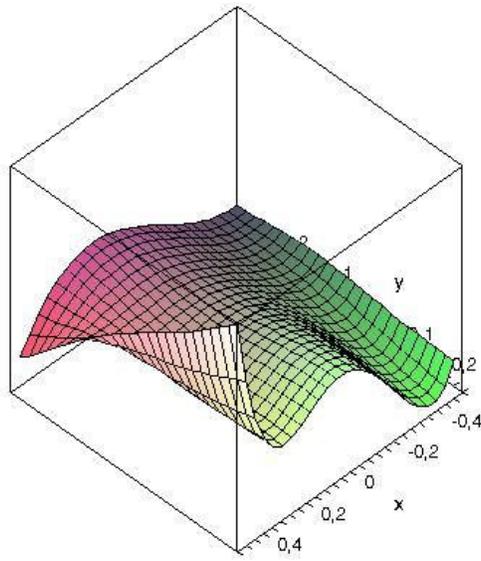


Figura 4-12 – Gráfico que representa a razão entre P_{cr}/P_{Euler} e P_{cr}/P_{Euler} com cisalhamento em relação a b/a , para o elemento de Barber com as rotações liberadas na base ($\nu=0$).

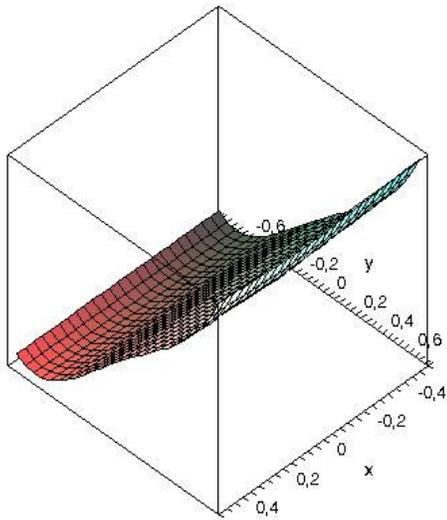
O gráfico da Figura 4-12 representa a razão entre as cargas críticas numéricas e analíticas em relação a b/a , para 2 funções adicional. Observou-se que no exemplo 1 (quando são travados os quatro graus de liberdade nos nós 3 e 4) obtêm-se os valores numéricos mais próximos dos valores de referência com uma peça mais curta do que neste exemplo (quando são liberados os graus de liberdade de rotação na base da peça).



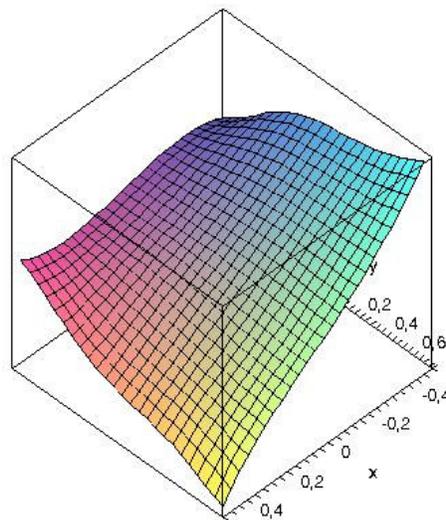
(a)



(b)



(c)



(d)

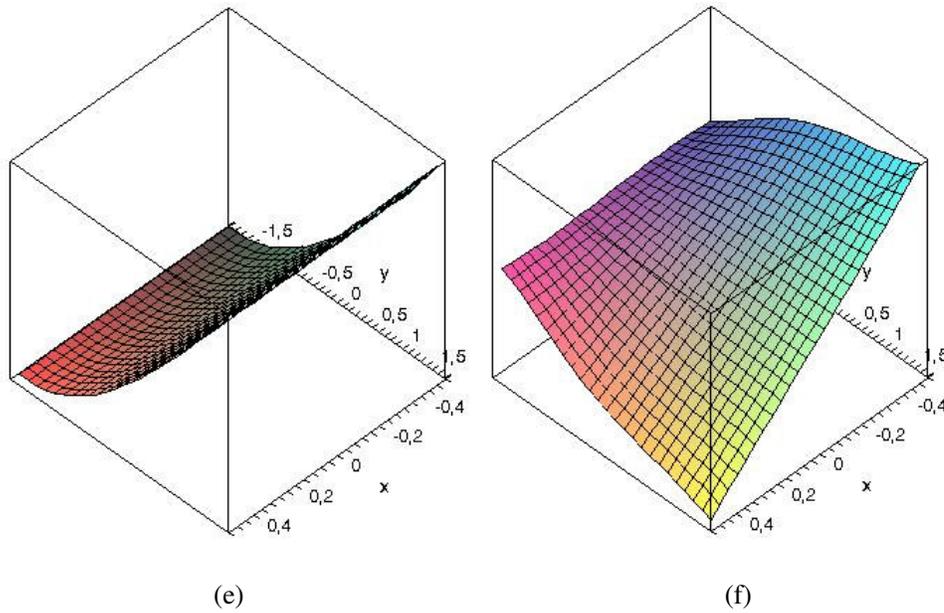


Figura 4-13 – Modos de Flambagem:

- (a) direção 'u' ou 'x', e (b) direção 'v' ou 'y', para $b/a=0,5$;
 (c) direção 'u' ou 'x', e (d) direção 'v' ou 'y', para $b/a=1,0$;
 (e) direção 'u' ou 'x', e (f) direção 'v' ou 'y', para $b/a=3,5$.

Na Figura 4-13 são mostrados modos de flambagem, nas direções 'u' e 'v', para as cargas críticas com funções polinomiais de quinto grau, apresentadas na Tabela 8. São apresentados três modos de flambagem distintos, pois quando são liberadas as rotações observa-se que o lado 2 – que deveria estar preso – sofre uma rotação quando a peça é muito curta, o que ocorre devido à presença de cisalhamento e à falta de engastamento perfeito. A partir de $b/a=3,5$ observa-se que o modo de flambagem ficou na mesma proporção que os mostrados nos exemplos 1 e 2, quando o comprimento aumenta-se a relação b/a e o efeito do cisalhamento vai diminuindo.

4.3.

Exemplo 4 – Efeito do dano

Neste exemplo, procura-se demonstrar o efeito do dano do material em um pilar engastado-livre de características iniciais iguais às do exemplo 1, e com um certo f_{nom} .

Como foi visto no capítulo 3, realiza-se a seguir uma análise linearizada do dano do material. Na Tabela 9, apresenta-se a razão entre a carga crítica reduzida e a carga crítica numérica, calculada no exemplo 1.

Tabela 9 – Resultados obtidos no exemplo 4, ($\nu=0$).

$P_{cr, reduzido}/P_{cr}$				
b/a	1 Função Adicional	2 Funções Adicionais	3 Funções Adicionais	4 Funções Adicionais
1,0	0,01946965859	0,02533243474	0,03720937068	0,04972891916
2,0	0,04337237606	0,04516307443	0,04923795666	0,05712780730
3,0	0,08436522679	0,08656236935	0,08926294685	0,09155445570
4,0	0,13617172105	0,13977853139	0,14265648335	0,14451148721
5,0	0,19422982289	0,19991539597	0,20313229730	0,20512552938
6,0	0,25478867718	0,26295307724	0,26641604405	0,26871031739
7,0	0,31501716091	0,32575544863	0,32930830890	0,33195271145
8,0	0,37297831917	0,38611858860	0,38961318881	0,39259800992
9,0	0,42747950214	0,44266810552	0,44652770537	0,44927232904
10,0	0,47790158278	0,49469592575	0,49777630040	0,50129067458
15,0	0,66805707984	0,68694706042	0,68866792110	0,69243121788
20,0	0,77960285779	0,79574901055	0,79662609468	0,79984384348
25,0	0,84591740329	0,85881063259	0,85927249276	0,86185000195
30,0	0,88733948952	0,89750677848	0,89776453356	0,89980436763
35,0	0,91430872630	0,92238222007	0,92253415600	0,92415670551
40,0	0,93312934025	0,93965129260	0,93964709455	0,94105486398
45,0	0,94613445012	0,95146855919	0,95153026980	0,95262613596
50,0	0,95610403433	0,96054498986	0,96058667452	0,96145861082

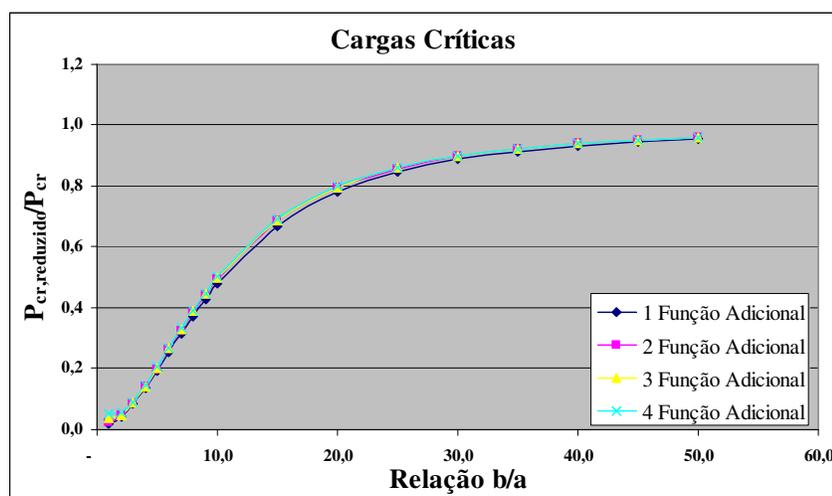


Figura 4-14 – Gráfico que representa a razão entre a carga crítica reduzida e a carga crítica sem considerar o dano e com $\nu=0$.

Observa-se que, quando a peça é muito curta, o efeito do dano do material é bem maior do que quando se aumenta a esbeltez da mesma.