

3

Modelo de elementos finitos adotado

No capítulo anterior discutiu-se genericamente a aplicação do MEF para o tratamento, em especial, de problemas bidimensionais. Neste capítulo, apresenta-se o elemento retangular adotado com suas funções de deslocamentos nodais, funções adicionais internas e externas e suas matrizes de rigidez elástica, geométrica e de massa. Também são estudadas as equações de flambagem para componentes estruturais em duas dimensões, calculando-se as cargas críticas com seus modos de flambagem e as frequências naturais com seus modos de vibração.

3.1.

Elemento Finito Retangular Adotado

Como mostrado no capítulo anterior, há vários modelos de elementos finitos. Neste capítulo, é apresentado o elemento finito básico proposto para a análise de refinamento, que tem como principal característica a incorporação de rotações de segmentos em duas direções em cada nó. Isto corresponde à consideração de rotações e distorções angulares nodais. Para acomodar tais graus de liberdade, é necessário introduzir funções cúbicas. Este elemento finito retangular linear-cúbico foi formulado em detalhe por Barber. (Weaver e Johnston, 1984).

Este elemento idealizado por Barber, de espessura t (t muito pequeno em relação às outras duas dimensões), possui quatro nós, que são numerados da esquerda para a direita e de cima para baixo, como indicados na Figura 3-1.

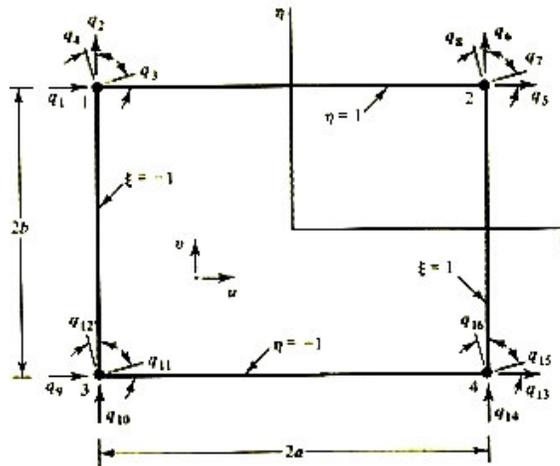


Figura 3-1 – Elemento finito retangular linear-cúbico. (Weaver e Johnston, 1984).

3.1.1. Funções de forma convencionais

A base do método dos elementos finitos, formulado a partir dos deslocamentos, é o princípio dos deslocamentos virtuais, por vezes, também designados por princípio dos trabalhos virtuais (Bathe, 1996). Neste capítulo, o princípio do trabalho virtual será usado para derivar o método de elementos finitos. Os deslocamentos genéricos em qualquer ponto dentro do elemento podem ser expressos como um vetor coluna \mathbf{u} na forma

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad 3-1$$

onde u e v são translações em x e y , respectivamente.

Os deslocamentos nodais \mathbf{q} são considerados como translações, nas direções x e y , e rotações das linhas horizontais e verticais, onde cada nó do elemento contribui com a seqüência

$$\mathbf{q}_i = \left[u_i \quad v_i \quad \frac{\partial v_i}{\partial x} \quad -\frac{\partial u_i}{\partial y} \right]^T, i = 1 \dots 4 \quad 3-2$$

A relação entre os deslocamentos genéricos e os deslocamentos nodais é dada pela equação 3-3:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} \mathbf{q} \quad 3-3$$

onde \mathbf{f} é uma matriz com as funções de forma.

As funções de deslocamentos assumidas para este elemento são expressas em função das coordenadas naturais ξ (sentido x) e η (sentido y) como

$$\begin{aligned}
 u &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\eta^2 + c_6\xi\eta^2 + c_7\eta^3 + c_8\xi\eta^3 \\
 v &= c_9 + c_{10}\xi + c_{11}\eta + c_{12}\xi\eta + c_{13}\xi^2 + c_{14}\xi^2\eta + c_{15}\xi^3 + c_{16}\xi^3\eta
 \end{aligned}
 \tag{3-4}$$

A primeira função é linear em ξ e cúbica em η . A segunda é linear em η e cúbica em ξ . Por esta razão o elemento é referido como linear-cúbico. A ausência de isotropia implica em uma dependência do sistema de referência. Portanto, no caso de um elemento inclinado em relação aos eixos globais, a matriz de rigidez do elemento deve ser obtida inicialmente em coordenadas locais e posteriormente submetida à correspondente transformação de rotação.

Considerando-se o vetor de deslocamento expandido

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}
 \tag{3-5}$$

este pode ser escrito como mostra a equação 3-6:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{g}\mathbf{c}
 \tag{3-6}$$

Avaliando-se a equação 3-5 em cada um dos quatro nós do elemento, surge um vetor \mathbf{q} , de ordem 16x1, no qual apresenta os quatro graus de liberdade dos quatro nós do elemento, ou seja, os dezesseis graus de liberdade. A matriz \mathbf{h} , equação 3-7, de ordem 16x16, combina com a matriz \mathbf{g} avaliada com as coordenadas naturais dos quatro nós do elemento, agrupando essas matrizes uma abaixo da outra.

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_4 \end{bmatrix}
 \tag{3-7}$$

sendo \mathbf{g}_i é a matriz \mathbf{g} avaliada no nó i .

Como a matriz \mathbf{h} é quadrada e não singular, determina-se o vetor das constantes \mathbf{c} a partir da equação 3-8. Portanto,

$$\mathbf{c} = \mathbf{h}^{-1} \mathbf{q}
 \tag{3-8}$$

Substituindo-se \mathbf{c} na equação 3-6 têm-se

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{g} \mathbf{h}^{-1} \mathbf{q}
 \tag{3-9}$$

Como o subvetor formado pelos dois primeiros elementos do vetor de deslocamento expandido é idêntico ao vetor \mathbf{u} , comparando-se este resultado com a equação 3-3, chega-se à matriz das funções de forma \mathbf{f} .

Os quatro graus de liberdade de cada um dos quatro nós do elemento estão relacionados com a submatriz de \mathbf{f}

$$\mathbf{FC}_i = \begin{bmatrix} f_{i1} & 0 & 0 & f_{i4} \\ 0 & f_{i2} & f_{i3} & 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4 \quad 3-10$$

cujas funções básicas estão listadas na Tabela 1 e

$$\begin{aligned} i1 &= 4i - 3 & i2 &= 4i - 2 \\ i3 &= 4i - 1 & i4 &= 4i \end{aligned} \quad 3-11$$

Tabela 1 – Funções de forma convencionais para o elemento retangular linear cúbico. (Weaver e Johnston, 1984).

j	$8f_j$	j	$8f_j$
1	$(1-\xi)(1+\eta)^2(2-\eta)$	9	$(1-\xi)(1-\eta)^2(2+\eta)$
2	$(1-\xi)^2(2+\xi)(1+\eta)$	10	$(1-\xi)^2(2+\xi)(1-\eta)$
3	$(1-\xi)^2(1+\xi)(1+\eta)a$	11	$(1-\xi)^2(1+\xi)(1-\eta)a$
4	$(1-\xi)(1+\eta)^2(1-\eta)b$	12	$-(1-\xi)(1-\eta)^2(1+\eta)b$
5	$(1+\xi)(1+\eta)^2(2-\eta)$	13	$(1+\xi)(1-\eta)^2(2+\eta)$
6	$(1+\xi)^2(2-\xi)(1+\eta)$	14	$(1+\xi)^2(2-\xi)(1-\eta)$
7	$-(1+\xi)^2(1-\xi)(1+\eta)a$	15	$-(1+\xi)^2(1-\xi)(1-\eta)a$
8	$(1+\xi)(1+\eta)^2(1-\eta)b$	16	$-(1+\xi)(1-\eta)^2(1+\eta)b$

3.1.2. Funções adicionais internas

Para as funções adicionais internas desenvolvidas podem ser utilizados polinômios puros

$$W(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + e\xi^n, \quad n \geq 4 \quad 3-12$$

ou combinados com outras funções, como as trigonométricas (Lages, 1992, para o elemento quadrilateral bilinear; e Jarek, 2007, para elementos retangulares de placa). Um exemplo é a combinação da função cúbica com a função seno

$$W(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + \text{sen}(n\pi\xi) \quad 3-13$$

Os coeficientes devem ser escolhidos de maneira a não afetar as condições de contorno do elemento de viga.

Para se obter as funções adicionais internas sem afetar as condições de contorno e permitindo um refinamento hierárquico, basta, na extremidade do elemento, impor valores nulos das funções, equação 3-14:

$$\begin{aligned} W(\xi = -1) &= 0 \\ W(\xi = 1) &= 0 \end{aligned} \quad 3-14$$

e das primeiras derivadas, equação 3-15:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi}(\xi = -1) &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \xi}(\xi = 1) &= 0 \end{aligned} \quad 3-15$$

como ilustra a

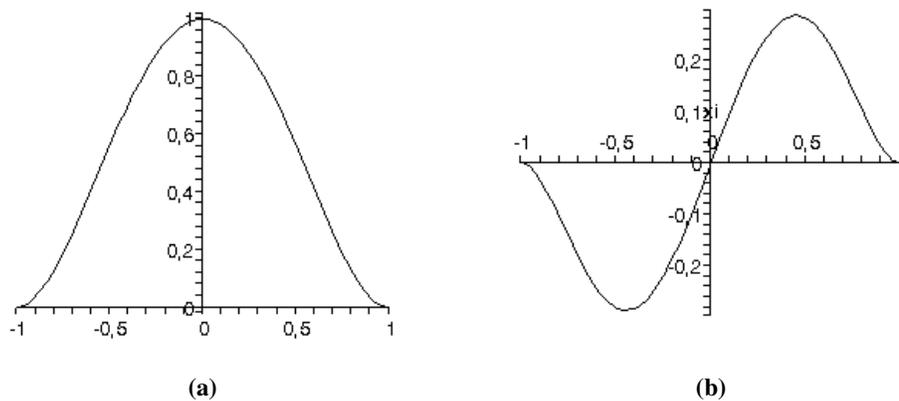


Figura 3-2 – Representação gráfica das funções adicionais para funções polinomiais (a) para $n=4$, (b) para $n=5$.

Esta metodologia tem a vantagem de tratar igualmente as mais diversas condições de apoio (contorno) e manter o equilíbrio interno do elemento. O número de funções adicionais (número inteiro) é escolhido de forma a obter uma melhor aproximação – quanto maior o número de funções melhor a aproximação. Quando se empregam funções polinomiais, deve-se tomar cuidado quanto ao aumento do número de funções adicionais, pois estas funções não são ortogonalizadas, o que pode levar a erros numéricos por mau condicionamento das matrizes. Além disso, com as funções trigonométricas surge preocupação com o tempo do processamento computacional.

A utilização destas funções em duas dimensões, no caso de domínio retangulares, é muito simples, já que a função de duas variáveis é obtida por mera multiplicação de funções (similarmente ao método de separação de variáveis).

Para este trabalho as funções adicionais internas escolhidas são polinômios puros, em cada uma das direções, como os apresentados na equação 3-12. O coeficiente e , da equação 3-12, foi adotado igual a 1, e para os outros três coeficientes (a , b , e c) foram aplicados às condições apresentadas nas equações 3-14 e 3-15. Isto foi feito para as duas direções do elemento, em coordenadas naturais, ou seja, ξ (equação 3-16) e η (equação 3-17).

$$WAx = \frac{1}{4} \cdot (nx - 2) \cdot (1 + (-1)^{nx}) + \frac{1}{4} \cdot (nx - 3) \cdot (1 - (-1)^{nx}) \xi - \frac{1}{4} \cdot nx \cdot (1 + (-1)^{nx}) \xi^2 - \frac{1}{4} \cdot (nx - 1) \cdot (1 - (-1)^{nx}) \xi^3 + \xi^{nx} \quad 3-16$$

$$WAY = \frac{1}{4} \cdot (ny - 2) \cdot (1 + (-1)^{ny}) + \frac{1}{4} \cdot (ny - 3) \cdot (1 - (-1)^{ny}) \eta - \frac{1}{4} \cdot ny \cdot (1 + (-1)^{ny}) \eta^2 - \frac{1}{4} \cdot (ny - 1) \cdot (1 - (-1)^{ny}) \eta^3 + \eta^{ny} \quad 3-17$$

Para os elementos bidimensionais as funções são geradas a partir do produto dos polinômios definidos ao longo de cada direção do elemento. Os valores de nx e ny devem assumir no mínimo o valor 4 e variar de 4 até $3+A_x$ e $3+A_y$, respectivamente, onde A_x e A_y são os números de funções adicionais internas utilizadas nas direções x e y , respectivamente.

Tabela 2 – Funções de forma adicionais internas para o elemento retangular linear cúbico, utilizando polinômios puros com $A_x = A_y = 2$.

Funções adicionais internas	
f_{A1}	$(1 - 2\xi^2 + \xi^4)(1 - 2\eta^2 + \eta^4)$
f_{A2}	$(1 - 2\xi^2 + \xi^4)(\eta - 2\eta^3 + \eta^5)$
f_{A3}	$(\xi - 2\xi^3 + \xi^5)(1 - 2\eta^2 + \eta^4)$
f_{A4}	$(\xi - 2\xi^3 + \xi^5)(\eta - 2\eta^3 + \eta^5)$

Para compor a interpolação do campo de deslocamentos, as funções adicionais internas são organizadas na forma matricial, como mostra a equação 3-18:

$$\mathbf{FA}_i = \begin{bmatrix} f_{Ai} & 0 \\ 0 & f_{Ai} \end{bmatrix}, i = 1 \dots A_{xy} \quad 3-18$$

onde

$$A_{xy} = 2 \cdot A_x \cdot A_y \quad 3-19$$

Na Figura 3-3 é ilustrado gráfico da última função apresentada na Tabela 2 para $nx=ny=5$ e na Figura 3-4, a primeira função dessa Tabela, onde se tem $nx=ny=4$.

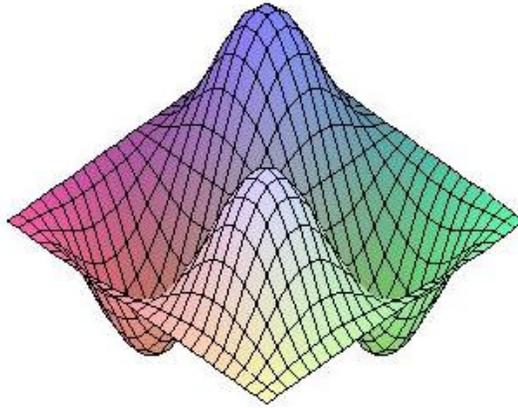


Figura 3-3 – Função adicional internas com $nx=ny=5$.

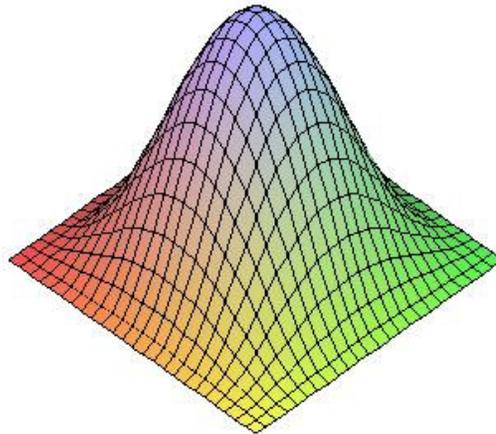


Figura 3-4 – Função adicional interna com $nx=ny=4$.

3.1.3. Funções adicionais externas ou de lado

As funções adicionais externas ou de lado surgem a partir da multiplicação das funções de maior grau, utilizadas nas funções adicionais internas, por funções lineares L_{x1} , L_{x2} , L_{y1} e L_{y2} . Estas funções lineares são obtidas impondo-se deslocamento unitário em uma das extremidades e nulo na outra, resultando em

$$L_{x1} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad 3-20$$

$$L_{x2} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad 3-21$$

$$L_{y1} = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad 3-22$$

$$L_{y2} = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad 3-23$$

As funções L_{x1} e L_{x2} são dos lados em que ξ é igual a -1 e 1, respectivamente. As funções L_{y1} e L_{y2} são dos lados que η é igual a 1 e -1, respectivamente.

As funções adicionais externas, ilustradas na Tabela 3, devem ser expressas em forma matricial, como mostra a equação 3-24. As Figura 3-5 e Figura 3-6 representam os gráficos das funções adicionais externas ou de lado.

Tabela 3 – Funções de forma adicionais externas ou de lado para o elemento retangular linear cúbico, utilizando polinômios puros cúbicos com $L_x = L_y = 2$.

Funções adicionais externas			
f_{L1}	$\frac{1}{2}(1 + \eta)(1 - 2\xi^2 + \xi^4)$	f_{L5}	$-\frac{1}{2}(-1 + \xi)(1 - 2\eta^2 + \eta^4)$
f_{L2}	$\frac{1}{2}(1 + \eta)\xi(1 - 2\xi^2 + \xi^4)$	f_{L6}	$-\frac{1}{2}(-1 + \xi)\eta(1 - 2\eta^2 + \eta^4)$
f_{L3}	$-\frac{1}{2}(-1 + \eta)(1 - 2\xi^2 + \xi^4)$	f_{L7}	$\frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - 2\eta^2 + \eta^4)$
f_{L4}	$-\frac{1}{2}(-1 + \eta)\xi(1 - 2\xi^2 + \xi^4)$	f_{L8}	$\frac{1}{2}(1 + \xi)\eta(1 - 2\eta^2 + \eta^4)$

$$\mathbf{FL}_i = \begin{bmatrix} f_{Li} & 0 \\ 0 & f_{Li} \end{bmatrix}, i = 1 \dots L_{xy} \quad 3-24$$

$$L_{xy} = 2 \cdot (2 \cdot L_x + 2 \cdot L_y) \quad 3-25$$

onde L_x e L_y são os números de funções adicionais externas ou de lado utilizadas nas direções x e y , respectivamente.

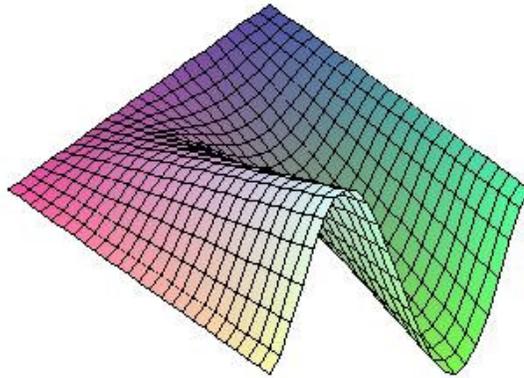


Figura 3-5 – Função adicional externa – último polinômio da Tabela 3.

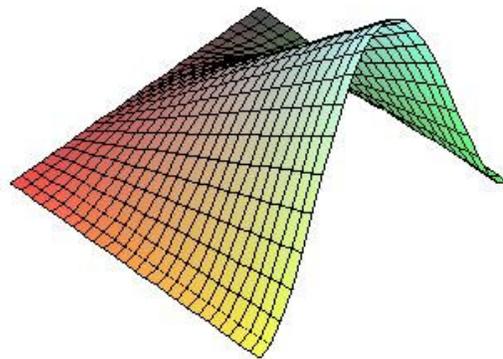


Figura 3-6 – Função adicional externa – primeiro polinômio da Tabela 3.

3.2. Matrizes de rigidez elástica

De acordo com Felippa (2004), a matriz de rigidez elástica de um elemento em geral pode ser representada pela equação 3-26:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} t \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega \quad 3-26$$

Dos termos que aparecem nesta equação, a matriz de deformação-deslocamento \mathbf{B} será discutida posteriormente. A espessura t , se variável, pode ser interpolada via as funções de forma. A matriz tensão-deformação \mathbf{E} (anteriormente apresentada através das equações 2-20, 2-33 e 2-42) é usualmente constante em problemas elásticos.

Em problemas estáticos de estruturas, a matriz de rigidez elástica do sistema é sempre simétrica e definida positiva, com elementos da diagonal sendo sempre positivos e dominantes.

A matriz \mathbf{K}_e é positiva definida quando a estrutura é estável (suficientemente restringida, não sendo hipostática), e sua vibração em modo livre ocorre com frequências positivas. Quando algum movimento rígido é possível, a matriz \mathbf{K}_e é apenas positiva semidefinida.

Para resolver a integração envolvida tem-se que reduzir a equação 3-26 a forma canônica, para um elemento quadrilateral, dada por

$$\mathbf{K}_e = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\xi d\eta \quad 3-27$$

onde a e b são as dimensões do elemento mostrados na Figura 3-1.

Como visto anteriormente, no elemento proposto têm-se três tipos de funções de forma (convencionais, adicionais internas e adicionais externas). Portanto, para se obter a matriz \mathbf{K}_e é necessário calcular separadamente a rigidez elástica para cada tipo de função de forma (convencionais $\mathbf{K}\mathbf{C}_e$, adicionais externas $\mathbf{K}\mathbf{A}_e$ e adicionais internas $\mathbf{K}\mathbf{L}_e$) e suas combinações (convencionais com adicionais internas $\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A}_e$, convencionais com adicionais externas $\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{L}_e$ e adicionais externas com adicionais internas $\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{L}_e$) utilizando a equação 3-27. Depois de calculadas as matrizes juntam-se todos os resultados em uma só matriz na forma

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{C}_e & \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A}_e & \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{L}_e \\ \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{C}_e & \mathbf{K}\mathbf{A}_e & \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{L}_e \\ \mathbf{K}\mathbf{L}\mathbf{C}_e & \mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{L}_e & \mathbf{K}\mathbf{L}_e \end{bmatrix} \quad 3-28$$

Para as funções de forma convencionais com o deslocamento nodal dado na equação 3-2, a matriz de deformação-deslocamento \mathbf{B} , para o estado plano de tensão e deformação (Weaver e Johnston, 1984), é dada por:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} f_{i1,x} & 0 & 0 & f_{i4,x} \\ 0 & f_{i2,y} & f_{i3,y} & 0 \\ f_{i1,y} & f_{i2,x} & f_{i3,x} & f_{i4,y} \end{bmatrix}, (i = 1,2,3,4) \quad 3-29$$

onde,

$$f_{i1,x} = \frac{1}{a} f_{i1,\xi}, \quad f_{i1,y} = \frac{1}{b} f_{i1,\eta} \quad 3-30$$

Para as funções de forma adicionais internas e externas (ou de lado) sabe-se que o deslocamento é dado pela equação 3-1 (deslocamento em qualquer coordenada do elemento, exceto o nó), com isso a matriz de deformação-deslocamento \mathbf{B} é dada por:

$$\mathbf{BA}_i = \begin{bmatrix} f_{Ai,x} & 0 \\ 0 & f_{Ai,y} \\ f_{Ai,y} & f_{Ai,x} \end{bmatrix}, (i = 1 \dots Axy / 2) \quad 3-31$$

e

$$\mathbf{BL}_i = \begin{bmatrix} f_{Li,x} & 0 \\ 0 & f_{Li,y} \\ f_{Li,y} & f_{Li,x} \end{bmatrix}, (i = 1 \dots Lxy / 2) \quad 3-32$$

3.3. Matriz de rigidez geométrica ou de tensão inicial

Segundo Cook *et al.* (1989), a matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_σ ou \mathbf{K}_g possui vários nomes, entre eles: matriz de rigidez de tensão inicial, matriz de rigidez diferencial e matriz dos coeficientes da estabilidade.

Considerando-se uma estrutura como linear, suas deformações e esforços são proporcionais ao carregamento externo atuante. Assim, pode-se tomar este carregamento como um parâmetro na obtenção da matriz de rigidez geométrica. Esta aproximação é útil e somente é válida quando a redistribuição de esforços é pouco significativa e pode ser desprezada.

A matriz \mathbf{K}_g é definida por elementos geométricos, campos de deslocamentos, e estado de tensão. Assim, \mathbf{K}_g é independente das propriedades elásticas. A matriz \mathbf{K}_g é linearizada e limitada para pequenos deslocamentos.

Inicialmente, calculam-se os esforços a partir de certo nível de carregamento inicial imposto à estrutura utilizando apenas a matriz de rigidez elástica. Calculados os esforços, passa-se a calcular a matriz de rigidez geométrica como

$$\mathbf{K}_g = \int_{-a-b}^a \int_t^b \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \mathbf{s} & 0 \\ 0 & \mathbf{s} \end{bmatrix} \mathbf{G} dydx \quad 3-33$$

onde \mathbf{s} é a matriz das tensões, que se tratando de elementos bidimensionais para os estados planos é dada por

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} & \tau_{xy0} \\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} \end{bmatrix} \quad 3-34$$

Para obter a matriz \mathbf{G} , presente na equação 3-33, necessita-se das matrizes de funções em coordenadas cartesianas. Em se tratando de elementos retangulares, deve-se fazer a seguinte operação

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b} \quad 3-35$$

$$\mathbf{GC} = \begin{bmatrix} FC_i[1, j] \\ FC_i[2, j] \\ FC_i[2, j], x \\ -FC_i[1, j], y \end{bmatrix}; \mathbf{GA} = \begin{bmatrix} FA_i[1, j], x \\ FA_i[1, j], y \\ FA_i[2, j], x \\ FA_i[2, j], y \end{bmatrix}; \mathbf{GL} = \begin{bmatrix} FL_i[1, j], x \\ FL_i[1, j], y \\ FL_i[2, j], x \\ FL_i[2, j], y \end{bmatrix} \quad 3-36$$

Para a matriz \mathbf{GC} são considerados os deslocamentos nodais, e para as matrizes \mathbf{GA} e \mathbf{GL} são considerados os deslocamentos em qualquer ponto do elemento, exceto nos nós.

Para obter a matriz de rigidez geométrica procede-se de forma análoga a matriz de rigidez elástica, levando a

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{KC}_g & \mathbf{KCA}_g & \mathbf{KCL}_g \\ \mathbf{KAC}_g & \mathbf{KA}_g & \mathbf{KAL}_g \\ \mathbf{KCL}_g & \mathbf{KAL}_g & \mathbf{KL}_g \end{bmatrix} \quad 3-37$$

3.4. Matriz de massa

Segundo Cook *et al.* (1989), a matriz de massa é uma representação discreta de uma distribuição contínua de massa no elemento. A matriz de massa de um elemento consistente é definida como

$$\mathbf{K}_m = \int_V \rho \mathbf{f}^T \mathbf{f} dV \quad 3-38$$

O termo “consistente” é usado porque \mathbf{f} representa as mesmas funções de forma que são usadas para gerar as matrizes de rigidez elástica (equação 3-27).

Analogamente às matrizes de rigidez elástica e geométrica, a matriz de massa deve ser expressa por:

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{KC}_m & \mathbf{KCA}_m & \mathbf{KCL}_m \\ \mathbf{KAC}_m & \mathbf{KA}_m & \mathbf{KAL}_m \\ \mathbf{KCL}_m & \mathbf{KAL}_m & \mathbf{KL}_m \end{bmatrix} \quad 3-39$$

A matriz de massa consistente \mathbf{K}_m é sempre positiva definida, pois a energia cinética é sempre positiva.

3.5. Energia Potencial Total

Na Figura 3-7, o funcional de energia potencial total (Π), para problemas estáticos, pode ser escrito através de dois tipos de energia, a saber:

$$\Pi = U_e - P \quad 3-40$$

na qual U_e e P representam a energia de deformação e a energia potencial das forças externas, respectivamente.

A energia de deformação é fornecida através da integral (no volume inicial) da energia de deformação específica (u_e) em relação às posições, ou seja,

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad 3-41$$

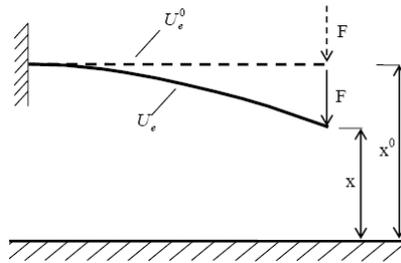


Figura 3-7 – Energia potencial total para uma estrutura em duas posições distintas (Marques, 2006)

A energia potencial das forças externas para um sistema de forças concentradas conservativo é escrita como

$$P = F_i X_i \quad 3-42$$

sendo que F_i representam as forças aplicadas e X_i as coordenadas onde as forças estão atuando. O índice i é referente ao grau de liberdade na qual a força e a posição estão associados.

Substituindo as equações 3-41 e 3-42 na equação 3-40, tem-se:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_i X_i \quad 3-43$$

A energia de deformação específica pode ser calculada utilizando-se qualquer par conjugado de tensão e deformação. Aplicando-se uma lei constitutiva elástica linear, sobre a medida de deformação de engenharia, tem-se que a energia de deformação específica é dada por

$$u_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad 3-44$$

no qual ε_{ij} representa o pseudo-tensor de deformação e σ_{ij} o pseudo-tensor de tensão.

A minimização do funcional de energia potencial total representa a configuração de equilíbrio do corpo em estudo. Um fato a ser observado é que a equação referente à minimização pode ser escrita em função de derivadas parciais em relação a parâmetros quaisquer, ou seja,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \alpha} dV_0 - \frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0 \quad 3-45$$

No Método dos Elementos Finitos tem-se a concepção de que os parâmetros para os quais o funcional de energia potencial total deve ser minimizado são as posições dos nós (ou, mais usualmente, os deslocamentos desses nós), e que a partir desses parâmetros podem-se aproximar as configurações do contínuo, como mostra a equação 3-46 (Marques, 2006). Portanto, para cada posição ou deslocamento nodal do elemento finito tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \alpha} dV_0 - P = 0 \quad 3-46$$

3.6. Estudo de Flambagem

Todo e qualquer problema de engenharia envolve equilíbrio. Neste instante, torna-se necessário definir o tópico relativo a equilíbrio e considerar a estabilidade do equilíbrio.

Um exemplo bastante comum para demonstrar este conceito é o equilíbrio de uma esfera sobre três superfícies diferentes, como mostra

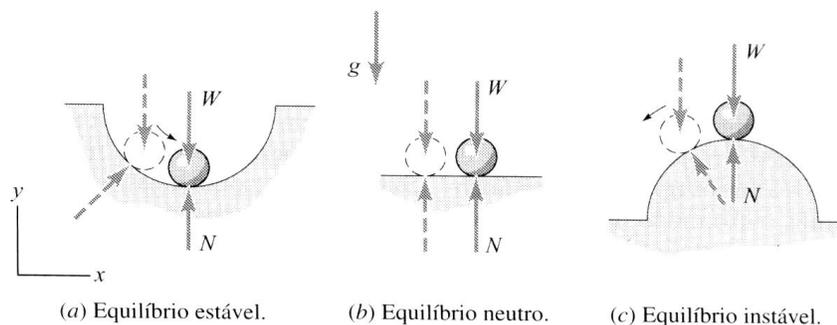


Figura 3-8 – Configurações de equilíbrio (Lima, 2003).

Nas três situações a esfera está em equilíbrio. Na Figura 3-8(a), a esfera encontra-se em equilíbrio estável porque se ela for ligeiramente deslocada para um dos lados e, então for solta, ela voltará para a posição de equilíbrio inicial. Na Figura 3-8(c), apesar de a esfera estar na posição de equilíbrio, qualquer deslocamento aplicado à mesma fará com que se afaste cada vez mais da posição de equilíbrio inicial, caracterizando um equilíbrio instável. Finalmente, se a esfera estiver sobre uma superfície perfeitamente plana, ela estará em uma configuração de equilíbrio neutro, pois se ela for deslocada ligeiramente para qualquer um dos lados ela não tem tendência de se mover, seja para mais longe, seja na posição original (Lima, 2003).

De acordo com o critério de energia, uma configuração de equilíbrio é estável se o incremento na energia potencial total, $\Delta\Pi$, devido a um campo de deslocamentos adicional suficientemente pequeno (estabilidade local) e cinematicamente admissível é sempre positivo ($\Delta\Pi > 0$). O equilíbrio é instável se o incremento é negativo ($\Delta\Pi < 0$) para pelo menos uma configuração adjacente à configuração original de equilíbrio.

O fenômeno da instabilidade de uma estrutura que evolui ao longo de uma determinada trajetória de equilíbrio (relação carga-deslocamento) corresponde à transição de configuração de equilíbrio estável para instável. As estruturas podem apresentar dois diferentes tipos de instabilidade. Pode ocorrer uma perda de estabilidade por bifurcação de equilíbrio, fenômeno designado por instabilidade bifurcacional, ou então por ocorrência de um ponto limite na trajetória de equilíbrio (curva não linear carga-deslocamento), levando ao chamado *snap-through* (Reis e Camotim, 2000) no caso de controle de carga.

Neste trabalho, são consideradas estruturas compostas de material elástico-linear, que não apresentam imperfeições geométricas iniciais e que sofrem perda de estabilidade por bifurcação de equilíbrio, Figura 3-9. Efetua-se, portanto, uma análise linear de estabilidade, sendo a trajetória fundamental de equilíbrio linear, na qual se pretende obter a carga crítica de bifurcação com os modos de instabilidade associados e as frequências de vibração com os respectivos modos de vibração. A carga crítica de bifurcação também é denominada por alguns autores de carga crítica de flambagem e os modos de instabilidade de modos de flambagem.

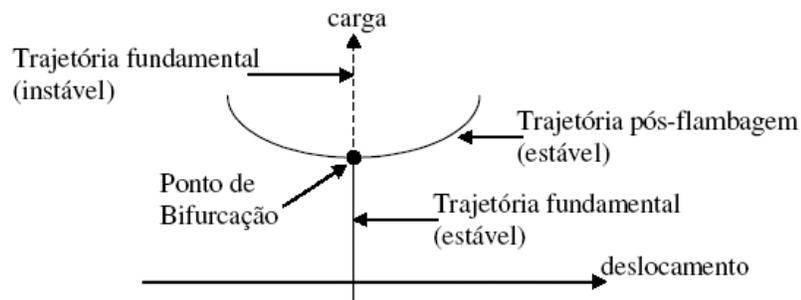


Figura 3-9 – Instabilidade bifurcacional. (Reis e Camotim, 2000).

Flambagem é um modo especial de instabilidade do equilíbrio o qual pode ocorrer no corpo deformado sujeito a uma força de compressão local ou global; instabilidade por flambagem pode ser uma flambagem global, como em uma coluna delgada, ou pode ser uma flambagem localizada em certas regiões, como pode ocorrer em cascas e elementos sanduíches (Farshad, 1994).

Na análise de estabilidade pode-se aplicar tanto um método analítico como um método de discretização, transformando o problema a resolver em um problema de autovalores e autovetores, cuja solução fornece os valores de carga de bifurcação e os modos associados de instabilidade.

Os valores da carga crítica de bifurcação, frequência, a natureza do modo de instabilidade e os modos de vibração dependem:

- a) do comprimento da barra;
- b) da forma e das dimensões da seção transversal; e
- c) das condições de borda, ou seja, das restrições aos deslocamentos e rotações existentes nas seções transversais.

Com a matriz de rigidez elástica, geométrica e de massa podem ser calculadas as cargas críticas com seus modos de flambagem, equações 3-47 e 3-48, e as frequências naturais com seus respectivos modos de vibração, equação 3-51, através de um problema generalizado de autovalor e autovetor.

$$\{\mathbf{K}_e - \lambda_{cr} \mathbf{K}_g\} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad 3-47$$

$$P_{cr} = \frac{1}{\lambda_{cr}} \quad 3-48$$

No caso geral, chega-se a um sistema matricial do tipo:

$$\mathbf{K}_m \mathbf{q}'' + \mathbf{C} \mathbf{q}' + \mathbf{K}_e \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad 3-49$$

onde \mathbf{K}_m é a matriz de massa, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez elástica, \mathbf{q} é o vetor deslocamento e \mathbf{F} o vetor de força.

Entretanto, a principal aplicação da análise dinâmica está na determinação das frequências naturais de vibração de estruturas e componentes mecânicos. Este conhecimento prévio permite ao engenheiro evitar que alguma fonte de vibração excite determinado componente, o que fatalmente o levaria ao colapso ou a apresentar altos níveis de vibração. Assume-se que nas estruturas usuais os laços de histerese do material, durante um ciclo de pequenas deformações, em geral, são muito estreitos. Isso significa que o amortecimento interno do material é muito pequeno, e a energia dissipada pode ser negligenciada, em comparação com as energias cinética e potencial. Portanto, se não existem carregamentos atuando sobre o componente, a equação 3-49 reduz-se a

$$\mathbf{K}_m \mathbf{q}'' + \mathbf{K}_e \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad 3-50$$

Admitindo que as respostas do sistema são harmônicas, a equação 3-50 dá origem a um problema generalizado de autovalores e autovetores representado por

$$\{ \mathbf{K}_e + \omega^2 \mathbf{K}_m \} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad 3-51$$

A carga crítica de flambagem é associada ao primeiro autovalor (carga mais baixa). Mesmo assim, é de importância, conhecer autovalores seguintes, correspondentes aos modos de flambagem mais altos, pois os mesmos podem estar muito próximos do primeiro e, frente à pequena excentricidade ou a uma pequena perturbação no sistema, eles podem tornar-se críticos. Em geral, para o estudo de vibrações, os modos de frequências mais baixas são os de maior interesse.

3.7.

Introdução ao dano do material

A carga crítica para o caso de material não-linear pode ser calculada com o uso da rigidez tangente. Isto apresenta uma generalização do conhecido procedimento introduzido por Shanley em 1947 para colunas (Timoshenko e Goodier, 1970). Naturalmente, isto leva a um problema de autovalor não linear, pois a matriz tangente depende do nível de tensão. Isto pode ser resolvido de forma bastante simples, para a primeira carga crítica (de colapso não linear), inspecionando-se os pivôs da decomposição de Gauss ou o determinante da matriz

de rigidez tangente, para valores crescentes do parâmetro de carga. Tais procedimentos para autovalores de matrizes variáveis têm sido empregados na literatura em diversas situações (Silva e Soares, 1974). Entretanto, busca-se neste trabalho preservar o enfoque linearizado de autovalor, que pode se mostrar mais prático na estimativa de cargas nominais de flambagem inelástica, para estudos preliminares de projeto. Tal procedimento se assemelha ao usado por Oliveira (1990) e Giannini (1990).

A análise da perda de rigidez, em uma forma linearizada, pode ser estudada através do diagrama da Figura 3-10.

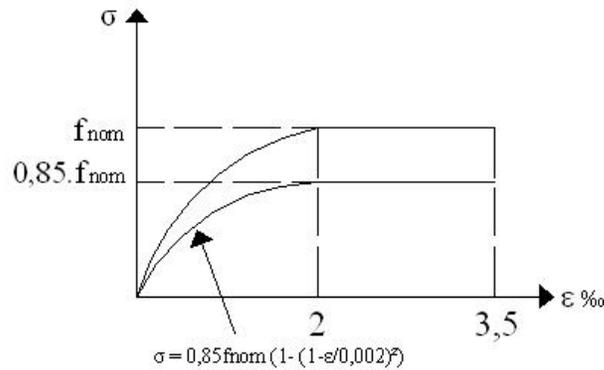


Figura 3-10 – Diagrama tensão-deformação idealizado no Apêndice A.

A redução da rigidez é representada a nível local pela matriz $\Delta \mathbf{K}_e$, onde se faz a simulação do decaimento do módulo de elasticidade longitudinal. A dedução do módulo de elasticidade tangencial, E_T , é obtida através da derivada da tensão em relação à deformação, ε .

$$\sigma = 0,85 \cdot f_{nom} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{0,002} \right)^2 \right] \quad 3-52$$

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 850 f_{nom} (1 - 500\varepsilon) \quad 3-53$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{x,y}}{E} \quad 3-54$$

onde,

$\sigma_{x,y}$: tensão aplicada na direção x ou y ;

E : módulo de elasticidade longitudinal;

E_T : módulo de elasticidade longitudinal tangente;

ε : deformação;

Com a equação 3-53, a matriz constitutiva para o módulo de elasticidade tangente será da mesma forma das equações 2-20 e 2-33, substituindo o módulo de elasticidade longitudinal pelo módulo de elasticidade tangente, equação 3-53. A matriz de rigidez elástica tangente é análoga à equação 3-27:

$$\mathbf{K}_{eT} = a.b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} d\xi d\eta \quad 3-55$$

Calculada a matriz de rigidez elástica tangente para as funções convencionais, adicional interna, adicional externa e suas combinações têm-se a matriz de rigidez elástica tangente do elemento, \mathbf{K}_{eT} . A matriz de rigidez elástica reduzida, $\Delta\mathbf{K}_e$, é dada pela subtração da matriz de rigidez elástica (com módulo de elasticidade igual a $850.f_{nom}$) pela matriz de rigidez elástica tangente, ou seja,

$$\Delta\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e - \mathbf{K}_{eT} \quad 3-56$$

Assim, podem ser calculadas novas cargas críticas e modos de flambagem para o elemento “danificado” como o problema de autovalor linearizado

$$\{\mathbf{K}_e - \lambda_{cr, reduzido} [\mathbf{K}_g - \Delta\mathbf{K}_e]\} \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad 3-57$$

onde

$$P_{cr, reduzido} = \frac{1}{\lambda_{cr, reduzido}} \quad 3-58$$