

## 2 Fundamentos Teóricos

Todos os elementos estruturais correspondem a domínios tridimensionais, mas podem ter sua formulação simplificada quando se introduzem algumas hipóteses, tais como:

- a. fibras paralelas ao plano médio se alongam ou se encurtam;
- b. fibras normais ao plano médio da peça permanecem retas e normais a tal plano após a deformação;
- c. fibras normais ao plano médio não sofrem alongamento.

Estas hipóteses podem resultar em uma modelagem bidimensional, ou mesmo unidimensional.

Quando forças são aplicadas em uma chapa fina em seu próprio plano, o estado de tensão e deformação na chapa pode ser considerado plano de tensão (*plane stress*). Neste caso, somente as dimensões do plano da chapa são necessárias para as análises. Por outro lado, um longo sólido prismático, ou ainda um sólido prismático contido nas extremidades, sujeito a uma condição constante de carregamento normal no eixo pode ser analisado como uma sucessão de fatias bidimensionais de espessura unitária. Este problema é identificado como plano de deformações (*plane strain*). Os estados axissimétricos correspondem a situações que podem ser consideradas como bidimensionais, para efeitos de análise, pois as variáveis de interesse são funções apenas de duas coordenadas, radial e axial.

Neste capítulo, são apresentadas as equações básicas da Teoria da Elasticidade. O Estado Plano de Tensão – EPT, o Estado Plano de Deformação – EPD e o Estado Axissimétrico são discutidos em detalhes. O MEF e Rayleigh-Ritz aplicados a tais problemas também são discutidos.

### 2.1. Equações Básicas

Quase todos os materiais usados na Engenharia apresentam, até um certo grau de sollicitação, a propriedade da elasticidade. Se as forças externas que

produzem deformação não excederem certo limite, a deformação desaparece quando as forças cessam de atuar (Timoshenko e Goodier, 1970).

Na Figura 2-1 representa-se um elemento infinitesimal em coordenadas cartesianas, onde os lados são de comprimento  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ . Tensões normais e cisalhantes são indicadas por setas nas faces do elemento. As tensões normais são  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ ; e as tensões cisalhantes são  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e assim por diante, equação 2-1. Na ausência de momentos distribuídos, através do equilíbrio do elemento, as seguintes relações entre as tensões cisalhantes são estabelecidas:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned}\tag{2-1}$$

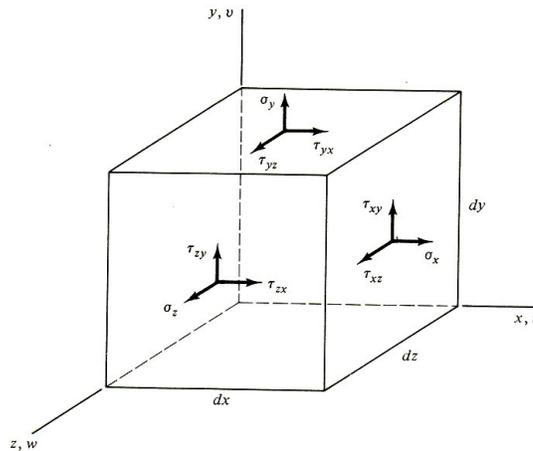


Figura 2-1 – Tensões em um elemento infinitesimal.

Relacionadas com as tensões indicadas na Figura 2-1 têm-se as deformações lineares ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_z$ ) e angulares ( $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  e assim por diante), dadas pela equação 2-2:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\tag{2-2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz}$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  correspondem às componentes do campo de deslocamento ao longo das direções cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Podem-se representar as seis tensões independentes e suas correspondentes deformações como vetores, equação 2-3:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad 2-3$$

## 2.2. Aplicações a Estados Planos e Axissimétricos

Pode ser considerado como estado bidimensional de tensão o indicado na Figura 2-2, o elemento infinitesimal de tamanho  $dx$  por  $dy$  com tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  agindo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Têm-se, ainda, as tensões de cisalhamento  $\tau_{xy}$ , no qual age na borda  $x$  e na direção  $y$ , que é acompanhado por uma tensão de cisalhamento complementar  $\tau_{yx}$ , agindo na borda  $y$  e na direção  $x$ .

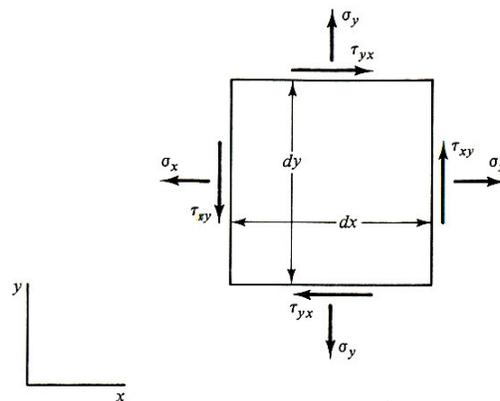


Figura 2-2 – Tensões bidimensionais. (Weaver e Johnston, 1984)

Para este estado plano de tensões pode-se organizar os três tipos independentes de tensão em forma matricial, como segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^t \quad 2-4$$

As deformações,  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ , são deformações lineares nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\gamma_{xy}$  é a deformação cisalhante ou angular. Estas deformações estão relacionadas com tensões normais e tensão de cisalhamento. São

apresentadas, ainda, as relações entre deformação-deslocamento expressando as deformações em função das componentes do campo de deslocamento,  $u$  e  $v$ . As deformações podem ser escritas em forma matricial, equação 2-5:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad 2-5$$

onde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad 2-6$$

e

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^t \quad 2-7$$

Define-se o estado plano de tensão quando as tensões segundo um dos eixos são desprezíveis perante as restantes (que agem em um plano normal a este eixo), isto é, podem ser consideradas nulas. Fisicamente, tal estado ocorre em uma chapa fina, com apoios e carregamentos no próprio plano de definição da chapa, conforme mostra esquematicamente a Figura 2-3.

Os eixos  $x$  e  $y$  de uma chapa devem estar dispostos de tal modo que coincidam com o plano médio da chapa. O eixo  $z$  deverá ser normal a tal plano. Assim, o movimento dos pontos do plano médio da chapa estará restrito a deslocamentos no próprio plano, sendo estas funções dependentes apenas de  $x$  e  $y$ .

Conseqüentemente, as componentes de tensões também não terão seus valores alterados na espessura, ou seja, serão funções de  $x$  e  $y$ . Como a chapa não está carregada transversalmente, as tensões na superfície na direção  $z$  são nulas e, sendo a chapa fina, poderão ser assumidos como nulas em toda ela. Poderá, no entanto, pelo efeito do coeficiente de Poisson, ocorrer deformação na direção  $z$ .

Com isso tem-se que:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad \varepsilon_z \neq 0 \quad 2-8$$

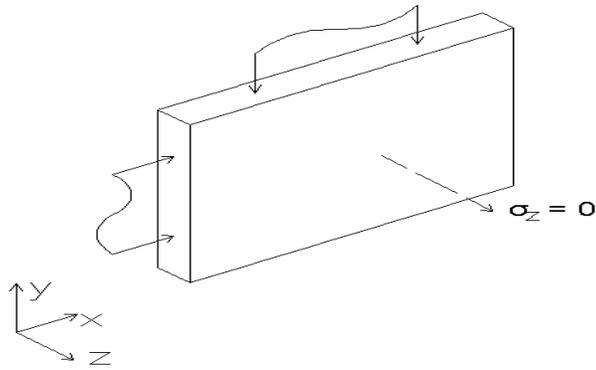


Figura 2-3 – Estado plano de tensão.

Escrevendo as deformações em termos de tensões, introduzindo o módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , e o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , obtem-se as equações 2-9, 2-10, 2-11 e 2-12:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad 2-9$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y) \quad 2-10$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad 2-11$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad 2-12$$

Invertendo-se as relações anteriores, obtem-se as equações 2-13, 2-14 e 2-15:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad 2-13$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad 2-14$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \frac{E\lambda}{1-\nu^2}\gamma_{xy} \quad 2-15$$

Pode-se escrever a relação deformação-tensão em forma matricial como mostra a equação 2-16:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \quad 2-16$$

onde

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad 2-17$$

Para a relação inversa tem-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \quad 2-18$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad 2-19$$

tal que

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad 2-20$$

a matriz  $\mathbf{E}$  é a matriz constitutiva e representa a relação tensão-deformação para o estado plano de tensão.

O estado plano de deformação é definido quando as deformações segundo um dos eixos podem ser consideradas nulas. Fisicamente, tal estado ocorre em estruturas alongadas em uma direção, com carregamentos atuantes nas demais direções, que não variam na direção longitudinal, como mostrado na Figura 2-4.

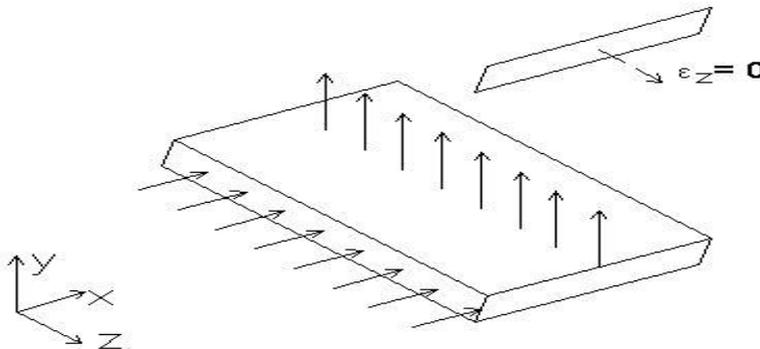


Figura 2-4 – Estado Plano de Deformação.

O eixo  $z$  deve coincidir com a direção de maior comprimento, fazendo com que o movimento dos pontos do plano normal a  $z$  esteja restrito a deslocamentos no próprio plano, sendo estas funções de  $x$  e  $y$ .

Conseqüentemente, as componentes de tensões também não terão seus valores alterados ao longo de  $z$ , ou seja, serão funções apenas dependentes de  $x$  e  $y$ . Nota-se que a tensão normal na direção  $z$  não é nula, pelo efeito de Poisson, equação 2-21:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \sigma_z \neq 0 \quad 2-21$$

As deformações são escritas em termos de tensões na forma

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \quad 2-22$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y + \nu\sigma_z) \quad 2-23$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad 2-24$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z) = 0 \quad 2-25$$

Da Eq. 2-25 decorre que

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad 2-26$$

Como  $\sigma_z$  é linearmente dependente de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , substitui-se  $\sigma_z$  em  $\varepsilon_x$  e em  $\varepsilon_y$ , obtendo-se

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \quad 2-27$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}[-\nu\sigma_x + (1-\nu)\sigma_y] \quad 2-28$$

Como foi feito anteriormente, pode-se obter as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  em termos das deformações correspondentes como segue:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \quad 2-29$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y] \quad 2-30$$

$$\tau_{xy} = \frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\nu)} \quad 2-31$$

chegando-se ao operador tensão-deformação

$$\mathbf{C} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 2-32$$

e

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad 2-33$$

Problemas axissimétricos são similares ao estado plano de deformação expresso em coordenadas cilíndricas. Neste caso, existe um eixo (eixo  $z$ ) de simetria axial do corpo, conforme mostra esquematicamente a Figura 2-5.

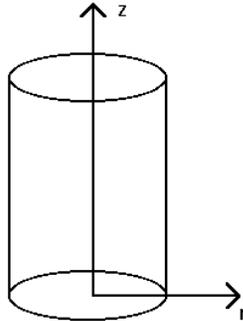


Figura 2-5 – Problemas Axissimétricos.

Um sólido axissimétrico é definido como um corpo tridimensional que é desenvolvido pela rotação da seção plana sobre o eixo central (Weaver e Johnston, 1984).

Coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $z$ , e  $\theta$  fornecem um quadro apropriado de referência, como indicado na Figura 2-6. Supõe-se que o corpo é axissimétrico com respeito ao eixo  $z$ . Este elemento pode ter várias formas de seções transversais, mas, se as cargas são axissimétricas, pode-se analisar o anel usando somente uma representação de seção bidimensional.

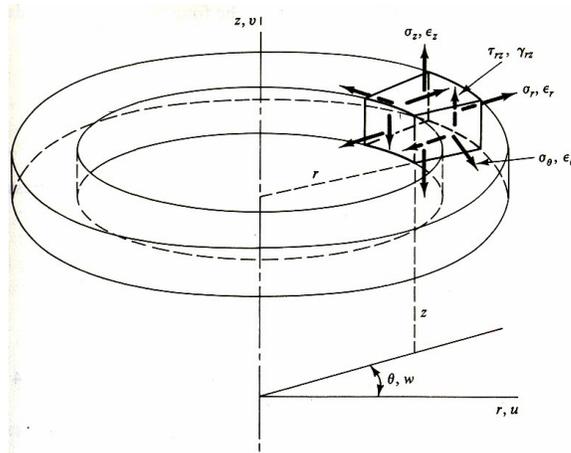


Figura 2-6 – Elemento Axissimétrico. (Weaver e Johnston, 1984).

Para alguns pontos na seção transversal de um anel axissimetricamente carregado os deslocamentos genéricos são

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^t \quad 2-34$$

Translações  $u$  e  $v$  ocorrem nas direções  $r$  e  $z$ , respectivamente, como indicado na Figura 2-6. Para este caso a translação  $w$  na direção  $\theta$  e as deformações cisalhantes são nulas. Ainda são indicados os quatro tipos de deformações diferentes não nulas, que podem ser organizadas na forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_r \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \quad \boldsymbol{\gamma}_{rz}] \quad 2-35$$

As relações entre estas deformações e os deslocamentos genéricos são dadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad 2-36$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_z = \frac{\partial v}{\partial z} \quad 2-37$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \quad 2-38$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad 2-39$$

que levam ao operador diferencial

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \quad 2-40$$

As quatro tensões relacionadas com as deformações do problema 1

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_r \quad \sigma_z \quad \sigma_\theta \quad \tau_{rz}]^T \quad 2-41$$

A relação tensão-deslocamento pode ser expressa em forma matricial. Com  $\theta$  como direção principal, o operador  $\mathbf{E}$  da equação 2-18 é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)e_2} \begin{bmatrix} e_1 & \nu & \nu & 0 \\ \nu & e_1 & \nu & 0 \\ \nu & \nu & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad 2-42$$

onde,

$$e_1 = 1 - \nu \quad 2-43$$

$$e_2 = 1 - 2\nu \quad 2-44$$

$$e_3 = \frac{e_2}{2} \quad 2-45$$

### 2.3. Método dos Elementos Finitos

Em Engenharia de Estruturas, o Método dos Elementos Finitos tem sido empregado como uma ferramenta numérica visando-se a determinação do estado de tensão e deformação de um sólido de qualquer geometria. Quando existe a necessidade de projetar uma estrutura, é habitual proceder-se a uma sucessão de análises e modificações das suas características, com o objetivo de alcançar uma solução satisfatória, quer em termos econômicos, quer na verificação de pré-requisitos funcionais e regulamentares.

Com o grande desenvolvimento que o MEF teve na década de 60 e com a banalização do recurso ao computador, passou a ser prática corrente a análise de estruturas de geometria arbitrária, constituídas por múltiplos materiais e sujeitas a qualquer tipo de carregamento.

O MEF consiste não apenas em transformar o sólido contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, mas também em admitir funções contínuas que representem, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento. Este enfoque caracteriza o método puro de deslocamentos, assumido neste trabalho; há diversas outras formas que buscam interpolar outras variáveis, gerando métodos baseados em tensões e mistos. A partir daí, pode-se obter as deformações correspondentes que, com uso das relações constitutivas do material, permitem definir as tensões em todo o elemento. Este estado de tensões é transformado em esforços internos que têm de estar em equilíbrio com as ações externas. Esta formulação corresponde ao método de Rayleigh-Ritz que se baseia na minimização da energia potencial do sistema, escrita em função de um campo predefinido de deslocamentos (métodos dos deslocamentos).

O método dos elementos finitos teve sua formulação estabelecida da forma como hoje é conhecida com a publicação do trabalho de Turner, Clough, Martin e Topp, em 1956 (Assan, 2003).

O método de Rayleigh-Ritz se iniciou em 1870 com estudos de problemas de vibração por Lord Rayleigh. Ele usou um campo de aproximação que contivesse um único grau de liberdade. Em 1890, Ritz generalizou o método construindo um campo de aproximação com diversas funções, cada uma satisfazendo as condições de contorno, e cada uma associada a um grau de liberdade. Ritz aplicou o método a problemas de equilíbrio e a problemas de autovalores.

O método dos elementos finitos comumente utilizado é baseado no método de Rayleigh-Ritz e prevê a divisão do domínio de integração, contínuo, em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos finitos, transformando o problema contínuo em um problema discreto. Os deslocamentos em qualquer ponto do elemento contínuo são escritos em termos de um número finito de deslocamentos nos pontos nodais, através de funções aproximadoras apropriadas.

Se o campo de deslocamentos é descrito por funções aproximadoras e o princípio da mínima energia potencial é empregado, as incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais e tem-se a versão em deslocamentos do MEF (método da rigidez direta).

Se o campo de tensões ou esforços internos é representado por funções aproximadoras as incógnitas são tensões ou esforços internos nodais e obtém-se o MEF em forma de forças (método da flexibilidade), sendo aí utilizado o princípio da mínima energia complementar.

É possível generalizar a formulação do MEF a partir da forma geral do funcional que representa a energia potencial total.

Se  $\mathbf{u}$  representa o vetor que contém as funções aproximadoras das componentes dos deslocamentos para cada elemento, caso o problema estudado é formado por elementos que têm deslocamentos apenas no seu plano, como mostra a Figura 2-7a, então:  $\mathbf{u} = \{u \ v\}^T$ ; se houver deslocamentos transversais ao seu plano, então:  $\mathbf{u} = \{u \ v \ w\}^T$  conforme a Figura 2-7b e Figura 2-7c.

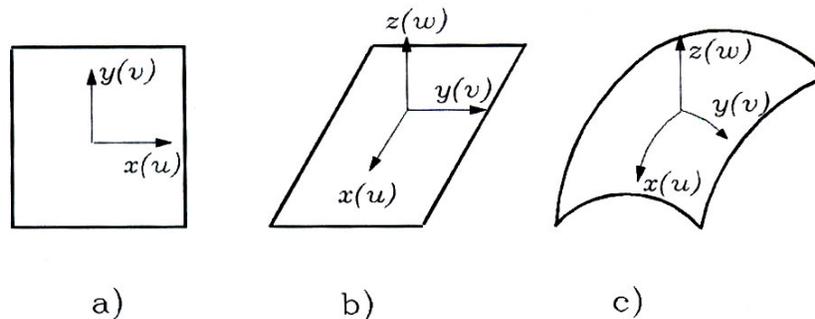


Figura 2-7 – Elementos Finitos: a) de chapa; b) de placa; c) de casca.

A generalização de um elemento bidimensional com  $n$  nós é simples. Duas relações, uma para a geometria do elemento e outra para os deslocamentos do elemento, são requeridos.

Em muitos problemas práticos de estruturas, em particular na Engenharia Civil, os elementos de estado plano se ligam a elementos sofrendo flexão, que requerem graus de liberdade de rotação. Para que haja total compatibilidade dos deslocamentos nodais, interessa estudar elementos planos (chapas) em que haja graus de liberdade de rotação.