

Elaine Cristina Rodrigues Ponte

**Avaliação de Modelos Refinados para Instabilidade e
Vibrações de Estruturas Bidimensionais**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Dr. Raul Rosas e Silva

Rio de Janeiro, julho de 2007.

Elaine Cristina Rodrigues Ponte

**Avaliação de Modelos Refinados para Instabilidade e
Vibrações de Estruturas Bidimensionais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção de grau de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada
pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Raul Rosas e Silva
Orientador
PUC-Rio

Prof.^a Deane de Mesquita Roehl
PUC-Rio

Prof.^a Marta de Souza Lima Velasco
PUC-Rio

Prof. Eduardo Nobre Lages
UFAL

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC - Rio

Rio de Janeiro, 13 de julho de 2007.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Elaine Cristina Rodrigues Ponte

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza – UNIFOR, em julho de 2005. Ingressou no Curso de Mestrado em Engenharia Civil da PUC-Rio em agosto de 2005, atuando na área de Instabilidade Estrutural.

Ficha Catalográfica

Ponte, Elaine Cristina Rodrigues

Avaliação de Modelos Refinados para Instabilidade e Vibrações de Estruturas Bidimensionais / Elaine Cristina Rodrigues Ponte; orientador: Raul Rosas e Silva. - Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica, Departamento de Engenharia Civil, 2007.

v., 90f: il. 29,7 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Instabilidade. 3. Flambagem. 4. Elementos finitos. 5. Modelagem numérica. 6. Vibrações. 7. Método de Rayleigh-Ritz. I. Silva, Raul Rosas e. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

*Lembrem-se sempre de contribuir
para o crescimento do nosso País.
Somente em conjunto teremos um
futuro mais tranquilo.*

Aos meus pais, Jefferson e Lucilene, e as minhas avós, Tetê e Manhê, por terem sido as pessoas mais importantes durante essa minha longa trajetória.

Ao Francisco, com amor e carinho.

Agradecimentos

A Deus, por me dar saúde e força para enfrentar os obstáculos que surgiram ao longo desta caminhada.

Ao professor, Raul Rosas e Silva, pela excelente orientação e dedicação ao longo desta pesquisa. Por toda amizade, paciência, compreensão e estímulo.

Aos meus pais, Jefferson e Lucilene, por todos os ensinamentos passados ao longo da minha vida, servindo sempre como exemplos de inteligência e força de vontade. Por todo amor, carinho e confiança depositada em mim. Por todo apoio financeiro.

Aos meus irmãos, Tereza Doralúcia, Mônica e Estevam, por toda amizade, palavras de carinho e incentivo ao longo desta caminhada.

As minhas avós, Tetê e Manhê, por todo o carinho e amor que sempre me deram e pela torcida pelo meu sucesso.

Ao meu namorado, Francisco, por toda sua paciência e compreensão para suportar esses últimos anos separados pela distância. Por todo amor, carinho, otimismo e incentivo que me deu para eu continuar esta batalha. Por ter suportado todos os meus estresses. Por sua amizade sincera e torcida para que essa caminhada chegasse ao fim com sucesso.

A todos os amigos e familiares que ficaram no Ceará torcendo pelo meu sucesso.

A minha grande amiga, Amanda, por toda sua amizade e ajuda no decorrer do Mestrado.

A todos os amigos da PUC, Elvídio, Rafael, Jean, André, Hyllttonn, Roberto, Magnus, Marianna, Renata, Amanda, por toda amizade.

A todos os funcionários que fazem parte do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, em especial, Rita, Cristiano, Marcel, por sempre estarem dispostos para a atenderem.

A todos os professores do Mestrado, em especial, Marta Velasco, Paulo Batista, Deane Rohel, João Luis Rohel, Ney Dumont, Eloy Vaz, Raul Rosas, por todos os ensinamentos e contribuições valiosas ao longo destes dois anos.

As minhas amigas de pensionato, Christina, Luisa, Fernanda, Ligia Calado, Ligia, Carla, Vivian, Ana Gabriela, Tamires, Tânia, entre outras, pela amizade sincera e por todos os almoços que fizemos juntas.

As freiras e funcionários do Pensionato Maria Adelaide, Maria Amélia, Anacleto, Dona Lurdes, Dona Edite, Margarida, Roseane, Valdete, Rita, Maria e Zé, por todo apoio familiar que me deram durante esta jornada no Rio de Janeiro.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Ponte, Elaine; Silva, Raul Rosas e. **Avaliação de Modelos Refinados para Instabilidade e Vibrações de Estruturas Bidimensionais**. Rio de Janeiro, 2007. 90p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho consiste em desenvolver e avaliar modelos clássicos de elementos finitos combinados com funções polinomiais adicionais, para a obtenção de cargas críticas de instabilidade e frequências naturais de estruturas planas, com seus respectivos modos. O objetivo consiste em buscar uma sistemática confiável para obter estimativas de deformações localizadas em regime próximo ao colapso. Utiliza-se o método dos Elementos Finitos em combinação com o método clássico de Rayleigh-Ritz. Como elemento fundamental para tal estudo, emprega-se o elemento retangular de Barber-Weaver, que contém quatro nós, cada nó com duas translações e duas rotações independentes (equivalentes a uma rotação e uma distorção angular). Esse elemento é enriquecido com funções de deslocamentos adicionais internas e de contorno, em forma de séries polinomiais gerais. Esse conjunto de funções é incorporado nas expressões de energia para levar ao estabelecimento de matrizes de rigidez elástica, geométrica e de massa. Tais matrizes permitem estabelecer problemas generalizados de autovalor para obtenção de cargas críticas e frequências, e respectivos modos de flambagem e vibração. Para os estudos numéricos comparativos apresentados nos exemplos, são implementadas diversas rotinas usando o software Maple 9.0. Os resultados mostram que a metodologia apresentada pode ser usada no desenvolvimento de uma técnica aplicável à obtenção de modos globais e localizados de instabilidade, quando há a combinação de efeitos não lineares geométricos e de material.

Palavras-chave

Instabilidade; Flambagem; Elementos Finitos; Modelagem Numérica; Vibrações; Método de Rayleigh-Ritz.

Abstract

Ponte, Elaine; Silva, Raul Rosas e. **Evaluation of Refined Models for Instability and Vibration of Two-Dimensional Structure**. Rio de Janeiro, 2007. 90p. M.Sc. Dissertation - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work consists in developing and evaluating classical of finite element models combined with additional polynomial functions, to obtain critical loads of instability and natural frequencies of plane structures, and respective modes. The objective is to search for a reliable technique to get estimates of localized deformations near to collapse. The Finite Elements method is used in combination with the classic method of Rayleigh-Ritz. As a basic element for such study, the rectangular element of Barber-Weaver is used, containing four nodes, each one with two translations and two independent rotations (equivalents to a rotation and an angular distortion). This element is enriched with additional internal displacement functions and with functions on the boundary, forming general polynomial series. These nodal functions are incorporated in the energy expressions leading to the establishment of elastic stiffness, geometric, and mass matrices. Such matrices allow the establishment of generalized eigenvalue problems to obtain critical loads and frequencies, and the respective modes of buckling and vibration. For the comparative numerical studies presented in the examples, several routines are implemented using software Maple 9.0. The results show that the methodology presented herein can be used in the development of an applicable technique to the ascertainment of instability in global and located modes, when there is a combination of geometric nonlinear and material effects.

Keywords

Instability; Buckling; Finite elements; Numerical modeling; Vibrations; Rayleigh-Ritz methods.

Sumário

1	Introdução	15
1.1.	Descrição do Trabalho	17
2	Fundamentos Teóricos	18
2.1.	Equações Básicas	18
2.2.	Aplicações a Estados Planos e Axissimétricos	20
2.3.	Método dos Elementos Finitos	27
3	Modelo de elementos finitos adotado	30
3.1.	Elemento Finito Retangular Adotado	30
3.1.1.	Funções de forma convencionais	31
3.1.2.	Funções adicionais internas	33
3.1.3.	Funções adicionais externas ou de lado	36
3.2.	Matrizes de rigidez elástica	38
3.3.	Matriz de rigidez geométrica ou de tensão inicial	40
3.4.	Matriz de massa	41
3.5.	Energia Potencial Total	42
3.6.	Estudo de Flambagem	43
3.7.	Introdução ao dano do material	46
4	Exemplos de validação	49
4.1.	Exemplo 1 – Elemento de Barber	49
4.2.	Exemplo 3 – Elemento de Barber sem GL de rotação	61
4.3.	Exemplo 4 – Efeito do dano	64
5	Conclusões	67
6	Referências Bibliográficas	70
A.	Elaboração da função da parábola do diagrama tensão-deformação	73
B.	Trecho do programa com Elemento de Barber	74

Lista de figuras

Figura 2-1 – Tensões em um elemento infinitesimal.	19
Figura 2-2 – Tensões bidimensionais. (Weaver e Johnston, 1984)	20
Figura 2-3 – Estado plano de tensão.	22
Figura 2-4 – Estado Plano de Deformação.	23
Figura 2-5 – Problemas Axissimétricos.	25
Figura 2-6 – Elemento Axissimétrico. (Weaver e Johnston, 1984).	26
Figura 2-7 – Elementos Finitos: a) de chapa; b) de placa; c) de casca.	29
Figura 3-1 – Elemento finito retangular linear-cúbico. (Weaver e Johnston, 1984).	31
Figura 3-2 – Representação gráfica das funções adicionais para funções polinomiais (a) para $n=4$, (b) para $n=5$.	34
Figura 3-3 – Função adicional internas com $nx=ny=5$.	36
Figura 3-4 – Função adicional interna com $nx=ny=4$.	36
Figura 3-5 – Função adicional externa – último polinômio da Tabela 3.	38
Figura 3-6 – Função adicional externa – primeiro polinômio da Tabela 3.	38
Figura 3-7 – Energia potencial total para uma estrutura em duas posições distintas (Marques, 2006)	42
Figura 3-8 – Configurações de equilíbrio (Lima, 2003).	43
Figura 3-9 – Instabilidade bifurcacional. (Reis e Camotim, 2000).	45
Figura 3-10 – Diagrama tensão-deformação idealizado no Apêndice A.	47
Figura 4-1 – Pilar analisado.	49
Figura 4-2 – Relação de Frequências Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 4º grau ($Ax= Ay=1$ e $Lx= Ly=1$) e com $v=0$.	52
Figura 4-3 – Relação de Cargas Críticas Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 4º grau ($Ax= Ay=1$ e $Lx= Ly=1$) e com $v=0$.	53
Figura 4-4 – Relação de Frequências Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 5º grau ($Ax= Ay=2$ e $Lx= Ly=2$) e com $v=0$.	54
Figura 4-5 – Relação de Cargas Críticas Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 5º grau ($Ax= Ay=2$ e $Lx= Ly=2$) e com $v=0$.	55

Figura 4-6 – Relação de Frequências Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 6º grau ($Ax = Ay = 3$ e $Lx = Ly = 3$) e com $v=0$.	56
Figura 4-7 – Relação de Cargas Críticas Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 6º grau ($Ax = Ay = 3$ e $Lx = Ly = 3$) e com $v=0$.	57
Figura 4-8 – Relação de Frequências Numéricas e Analíticas, utilizando funções polinomiais de 7º grau ($Ax = Ay = 4$ e $Lx = Ly = 4$) e com $v=0$.	59
Figura 4-9 – Modos de Flambagem (a) direção ‘ u ’ ou ‘ x ’, e (b) direção ‘ v ’ ou ‘ y ’.	59
Figura 4-10 – Modo de Flambagem generalizado.	60
Figura 4-11 – Modo de Vibração: (a) e (b) 1º modo de vibração nas direções u e v , respectivamente; (c) e (d) 2º modo de vibração nas direções u e v , respectivamente; (e) e (f) 3º modo de vibração nas direções u e v , respectivamente;	61
Figura 4-12 – Gráfico que representa a razão entre P_{cro}/P_{Euler} e P_{cr}/P_{Euler} com <i>cisalhamento</i> em relação a b/a , para o elemento de Barber com as rotações liberadas na base ($v=0$).	62
Figura 4-13 – Modos de Flambagem:	64
(a) direção ‘ u ’ ou ‘ x ’, e (b) direção ‘ v ’ ou ‘ y ’, para $b/a=0,5$;	64
(c) direção ‘ u ’ ou ‘ x ’, e (d) direção ‘ v ’ ou ‘ y ’, para $b/a=1,0$;	64
(e) direção ‘ u ’ ou ‘ x ’, e (f) direção ‘ v ’ ou ‘ y ’, para $b/a=3,5$.	64
Figura 4-14 – Gráfico que representa a razão entre a carga crítica reduzida e a carga crítica sem considerar o dano e com $v=0$.	65
Figura A-1 – Diagrama tensão-deformação idealizado.	73
Figura B-1 – Elemento de Barber.	74

Lista de tabelas

Tabela 1 – Funções de forma convencionais para o elemento retangular linear cúbico. (Weaver e Johnston, 1984).	33
Tabela 2 – Funções de forma adicionais internas para o elemento retangular linear cúbico, utilizando polinômios puros com $A_x = A_y = 2$.	35
Tabela 3 – Funções de forma adicionais externas ou de lado para o elemento retangular linear cúbico, utilizando polinômios puros cúbicos com $L_x = L_y = 2$.	37
Tabela 4 – Cargas críticas e frequências naturais, utilizando funções polinomiais de 4º grau ($v=0$).	52
Tabela 5 – Cargas críticas e frequências naturais, utilizando funções polinomiais de 5º grau ($v=0$).	54
Tabela 6 – Cargas críticas e frequências naturais, utilizando funções polinomiais de 6º grau e ($v=0$).	56
Tabela 7 – Frequências naturais, utilizando funções polinomiais de 7º grau ($v=0$).	58
Tabela 8 – Resultados obtidos no exemplo 3, ($v=0$).	62
Tabela 9 – Resultados obtidos no exemplo 4, ($v=0$).	65

Lista de símbolos

ε	- Deformação
σ	- Tensão
ξ	- Coordenada natural na direção x
η	- Coordenada natural na direção y
ν	- Coeficiente de Poisson
q	- Vetor de deslocamentos nodais
u	- Vetor de deslocamentos genéricos
FC	- Matriz com as funções de forma convencionais
FA	- Matriz com as funções de forma adicionais internas
FL	- Matriz com as funções de forma adicionais externas
A_x, A_y	- Número de funções adicionais interna
L_x, L_y	- Número de funções adicionais externa
K_e	- Matriz de rigidez elástica
K_m	- Matriz de massa
K_g	- Matriz de rigidez geométrica
B	- Matriz que transforma deformação em deslocamento
s	- Matriz de tensões
t	- Espessura
a, b	- Dimensões da chapa
P_{Euler}	- Carga crítica de Euler
G	- Módulo de elasticidade transversal
ω_i	- Frequências analíticas
E	- Módulo de Elasticidade Longitudinal