

## 5 Pórticos planos

As metodologias de redução no espaço e no tempo para análise dinâmica de problemas não-lineares, desenvolvida neste trabalho, são aplicadas, agora, a pórticos planos. Como exemplos de pórticos planos que podem estar sujeitos a vibrações de grande amplitude, apresentam-se os pórticos em L, conhecidos na literatura como *L-Frames* (Galvão, 2004). Um dos exemplos clássicos dessa classe de estruturas é o chamado Pórtico de Roorda (Roorda, 1965), mostrado na Figura 5-1. O índice  $b$  faz referência à barra horizontal e  $c$ , à barra vertical.

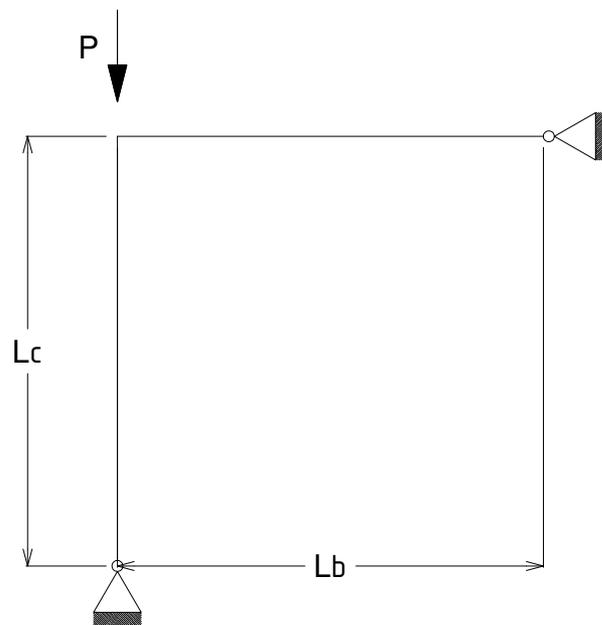


Figura 5-1 Pórtico de Roorda sem imperfeições iniciais

As vibrações não-lineares de pórticos planos são estudadas neste capítulo utilizando como exemplo o pórtico de Roorda sem imperfeições iniciais, trata-se de uma estrutura cujo comportamento já foi estudado em vários trabalhos (Roorda, 1965; Bazant e Cedolin, 1991; Galvão, 2004; Tiso *et alli*, 2005) e é um dos exemplos mais simples de pórticos planos.

## 5.1. Análise linear

O comportamento linear é obtido de maneira aproximada utilizando-se a análise por elementos finitos. Como as deformações axiais são agora consideradas deve-se levar em conta os graus de liberdade relacionados aos deslocamentos axiais no elemento finito, como mostrado na Figura 5-2. A compatibilidade de deslocamentos nodais é ilustrada na Figura 5-3, onde mostra-se o deslocamento do nó da posição indeformada  $0$  para a deformada  $0'$ . Observa-se que o deslocamento axial da coluna  $c$  equivale, por compatibilidade, ao deslocamento transversal da viga  $b$  e assim reciprocamente. Como o nó é considerado rígido, a rotação que ambas as barras sofrem, após a deformação, é a mesma, ou seja,  $\beta_c = \beta_b$ . Também deve ser acrescentada à análise em elementos finitos a matriz de rigidez geométrica,  $K_g$  de modo a incluir os efeitos de cargas axiais. As funções e matrizes resultantes da análise feita com o uso deste elemento encontram-se no Anexo I.

Adota-se como exemplo para as barras do pórtico um perfil I em aço de

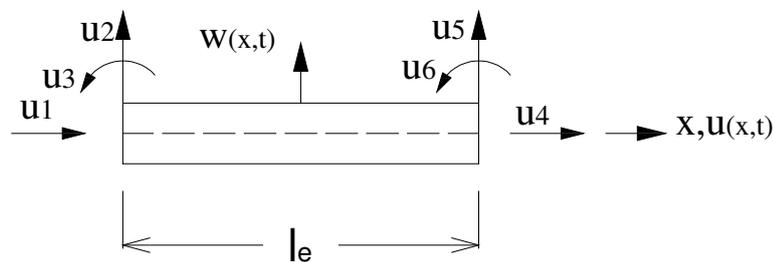


Figura 5-2 Elemento de viga-coluna de comprimento  $l_e$  seção  $W410 \times 75$ , mostrado na Figura 5-4. Os parâmetros geométricos e de material para o pórtico utilizado como exemplo são:

$$L_b = 6,0\text{ m}; L_c = 6,0\text{ m}; E = 210\text{ GPa}; \rho = 7.800\text{ kg/m}^3 \quad (5-1)$$

A Tabela 5-1 mostra as primeiras frequências de vibração para um pórtico sem cargas axiais ( $P = 0$ ) obtidas usando-se vários níveis de discretização. Na Figura 5-5 apresenta-se o modo fundamental de vibração do pórtico.

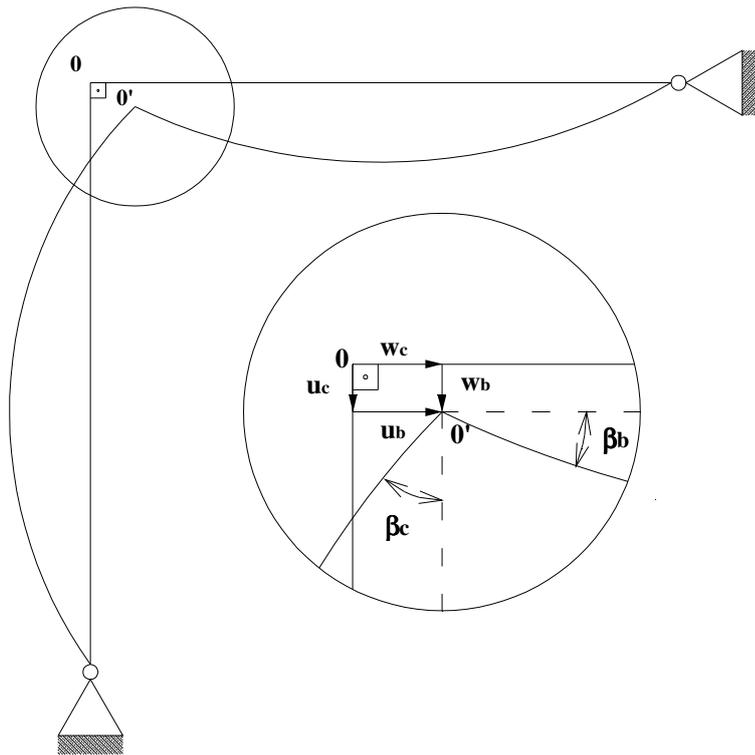


Figura 5-3 Compatibilidade de deslocamentos nodais

O modo fundamental de vibração do pórtico mostrado na Figura 5-5 pode ser aproximado por funções polinomiais de quarta ordem. As funções para as barras  $c$  e  $b$  são:

$$\phi_c(x) = 0,00265x^4 - 0,003179x^3 + 0,00820x^2 + 0,52334x; \quad (5-2)$$

$$\phi_b(x) = -0,00265x^4 + 0,03181x^3 - 0,00820x^2 - 0,52300x - 0,0012 \quad (5-3)$$

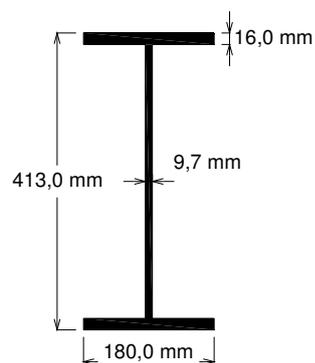


Figura 5-4 Seção transversal das barras do pórtico

As condições de contorno e compatibilidade utilizadas na obtenção destes polinômios pela análise em elementos finitos são:

$$\phi_c(0) = 0, \quad \phi_c(L_c) = w_c; \quad (5-4)$$

$$\phi_b(0) = w_b, \quad \phi_b(L_b) = 0; \quad (5-5)$$

$$\left. \frac{d\phi_c}{dx} \right|_{x=L_c} = \left. \frac{d\phi_b}{dx} \right|_{x=0}; \quad \left. \frac{d^2\phi_c}{dx^2} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2\phi_b}{dx^2} \right|_{x=L_b} = 0 \quad (5-6)$$

As funções (5-2) e (5-3) são utilizadas como uma primeira aproximação para a parte espacial da função deslocamentos transversal  $w(x,t)$ , no funcional não-linear obtido na seção 2.3, eq.(2-49).

n	$\omega_n$ (rad/s)			
	1 elemento por barra	2 elementos por barra	3 elementos por barra	4 elementos por barra
1	369,786	334,514	333,469	333,286
2	1690,400	524,896	521,114	520,426
3	6990,420	1476,913	1346,935	1336,463
4	8605,059	1963,652	1709,891	1691,073

Tabela 5-1 Freqüências naturais de vibração para o pórtico em L

## 5.2. Análise não-linear

Neste trabalho, o campo de deslocamentos  $w$  é aproximado pelos polinômios utilizados para interpolar os modos transversais das barras de pórticos. Necessita-se, então, encontrar uma função para aproximar os deslocamentos axiais  $u$  que seja compatível com  $w$  e que consiga capturar o comportamento dinâmico da estrutura.

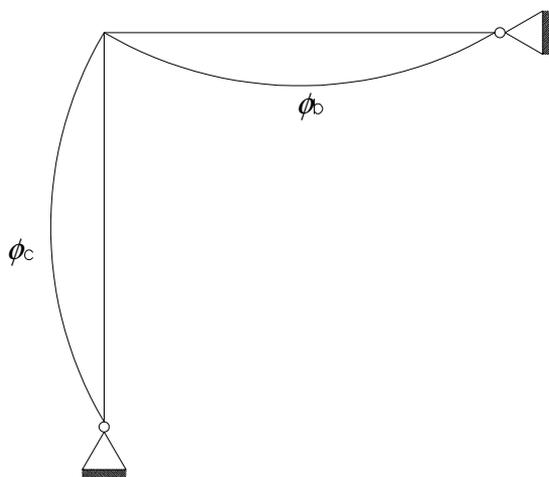


Figura 5-5 Modo fundamental de vibração livre do pórtico em L

A função  $u$  pode ser determinada, de forma aproximada, utilizando a equação diferencial de movimento (2-53). Tomando somente o termo linear  $T_{1,1}$  e a parte do termo não-linear  $T_{1,2}$  na qual aparecem somente a função  $w$  e suas derivadas, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\rho}{E} u_{,tt} - u_{,xx} \cong r^2 w_{,x} w_{,xxxx} + w_{,x} w_{,xx} + r^2 w_{,xx} w_{,xxx}, \quad (5-7)$$

onde  $r$  é o raio de giração da seção transversal das barras do pórtico.

Desprezando-se o primeiro termo, já que  $\rho/E \ll 1$  nos problemas de aplicação prática, encontra-se a seguinte expressão para  $u$  em termos de  $w$ :

$$u \cong -\left(\iint r^2 w_{,x} w_{,xxxx} + w_{,x} w_{,xx} + r^2 w_{,xx} w_{,xxx} dx dx\right) + c_1 x + c_2 \quad (5-8)$$

O campo de deslocamentos transversais é aproximado por:

$$w = q_1(t)\phi(x) \quad (5-9)$$

Substituindo-se a eq. (5-9) na eq. (5-8), tem-se:

$$u \cong -q_1^2(t)\left(\iint r^2 \phi_{,x} \phi_{,xxxx} + \phi_{,x} \phi_{,xx} + r^2 \phi_{,xx} \phi_{,xxx} dx dx\right) + c_1 x + c_2 \quad (5-10)$$

Para uma aproximação do campo de deslocamentos axiais dada por:

$$u = q_2(t)\theta(x), \quad (5-11)$$

definem-se as constantes de integração  $c_1$  e  $c_2$  por meio das condições de contorno e compatibilidade de deslocamentos no nó, listadas abaixo:

$$\theta_c(0) = 0; \quad (5-12)$$

$$\theta_b(L_b) = 0; \quad (5-13)$$

$$\theta_c(L_c) = \phi_b(0); \quad (5-14)$$

$$\theta_b(0) = \phi_c(L_c); \quad (5-15)$$

Desse modo as funções polinomiais usadas para aproximar os deslocamentos axiais, são:

$$\begin{aligned} \theta_c(x) = & 7,08.10^{-6} x^8 - 5,05.10^{-5} x^7 - 1,26.10^{-4} x^6 \\ & + 2,22.10^{-3} x^5 - 7,20.10^{-4} x^4 - 3,04.10^{-2} x^3 \end{aligned} \quad (5-16)$$

$$\theta_b(x) = -6,91.10^{-6} x^8 + 4,89.10^{-5} x^7 + 1,30.10^{-4} x^6 - 2,20.10^{-3} x^5 \quad (5-17)$$

$$+ 5,84 \cdot 10^{-4} x^4 + 3,05 \cdot 10^{-2} x^3 + 2,08 \cdot 10^{-4} x^2 - 1,00$$

Os gráficos de  $\theta_c(x)$  e  $\theta_b(x)$  são mostrados respectivamente nas Figura 5-6 e Figura 5-7. Essas funções são utilizadas junto com as expressões para o campo de deslocamentos transversais para o estudo em regime não-linear de vibrações livre, forçada não amortecida e forçada amortecida.

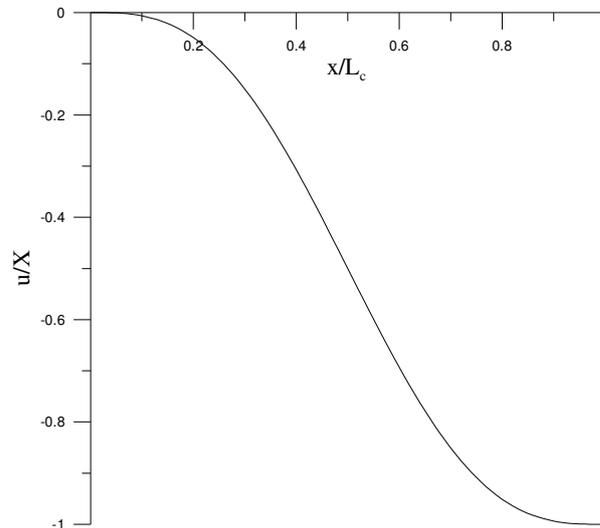


Figura 5-6 Função usada para aproximar o modo axial de vibração para barra c

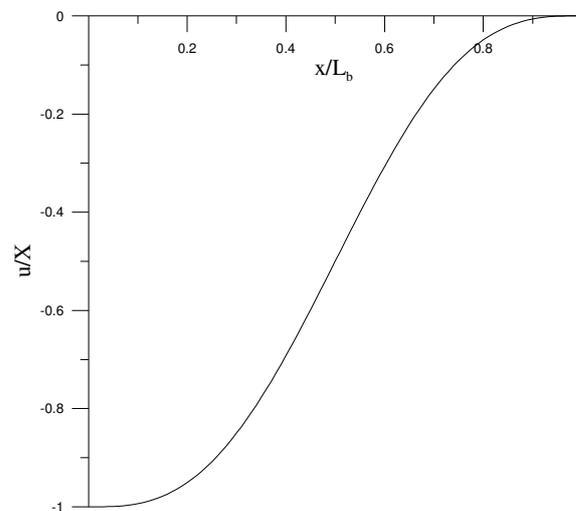


Figura 5-7 Função usada para aproximar o modo axial de vibração para barra b

### 5.2.1. Vibração livre

Aplicando-se no método de Ritz às expressões (5-2) e (5-3) para aproximar o campo de deslocamentos transversais e às equações (5-16) e (5-17) para o campo de deslocamentos axiais, o problema se reduz às equações globais no tempo, de modo que independentemente do número de barras do pórtico considerado, a redução modal leva sempre a duas equações a serem tratadas pelo

método do balanço harmônico, com duas variáveis  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  para a parte temporal de  $w$  e  $u$ , respectivamente. Para o campo de deslocamentos transversais utiliza-se a seguinte expressão:

$$q_1(t) = X_1 \cos(\omega t), \quad (5-18)$$

De acordo com a eq. (5-10), é utilizada a seguinte expressão para a parte temporal do campo de deslocamentos axiais:

$$q_2(t) = X_2 \cos^2(\omega t) \quad (5-19)$$

resultando em duas equações algébricas não-lineares, cuja solução pode ser obtida pelo método de Newton-Raphson acoplado à técnica do controle de arco fornece a relação frequência-amplitude mostrada nas Figura 5-8 e Figura 5-9. A curva para  $X_1$  é semelhante àquelas encontradas para a viga, mostrando comportamento semelhante para ambas, enquanto que a curva para  $X_2$  possui os ramos positivos tanto para  $X_1$  positivo quanto negativo. Os valores das amplitudes  $X_2$  são muito menores que as amplitudes para  $X_1$ , já que o modo de vibração assumido foi o modo transversal e  $\omega_0$  é a frequência de vibração linear transversal do pórtico.

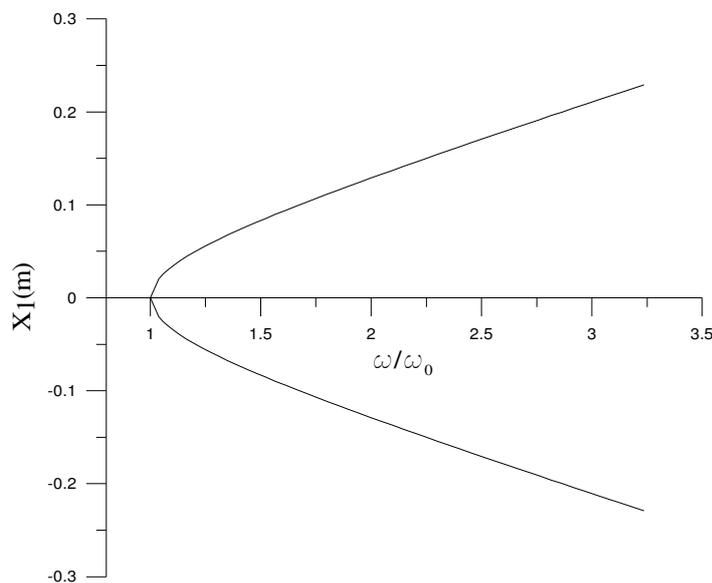


Figura 5-8 Variação de  $X_1$  com a frequência para vibração livre

### 5.2.2.

#### Vibração forçada não amortecida

Para o estudo da vibração forçada não amortecida são consideradas cargas harmônicas de forma co-senoidal de amplitude  $X_0=1000kN$ , uniformemente distribuídas sobre ambas as barras. As funções adotadas no método do balanço

harmônico são as mesmas utilizadas para vibração livre. As variações das amplitudes  $X_1$  e  $X_2$  com a frequência encontram-se nas Figura 5-10 e Figura 5-11, respectivamente.

É possível observar da resposta para a amplitude  $X_2$ , mostrada na Figura 5-11, que a resposta não é simétrica, diferente do que acontece para as curvas de ressonância obtidas para vigas. Isso pode ser explicado pelo fato da rigidez do pórtico em L não ser simétrica, já que na transmissão de esforços e deslocamentos

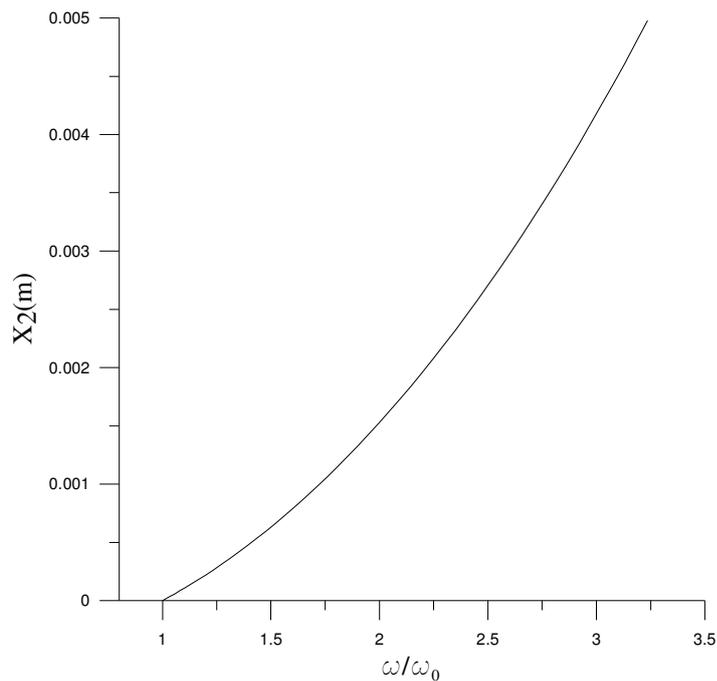


Figura 5-9 Variação de  $X_2$  com a frequência para vibração livre

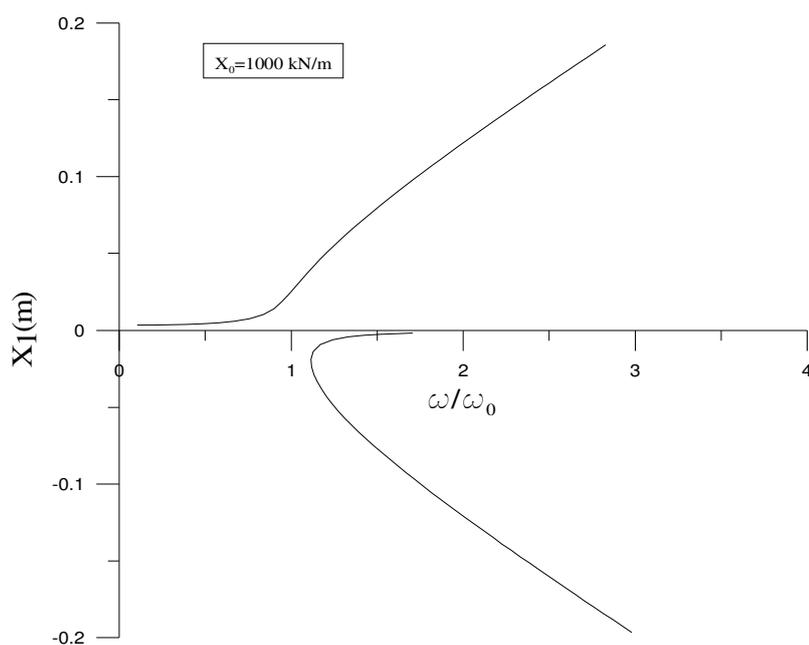


Figura 5-10 Variação de  $X_1$  com a frequência para vibração forçada não amortecida

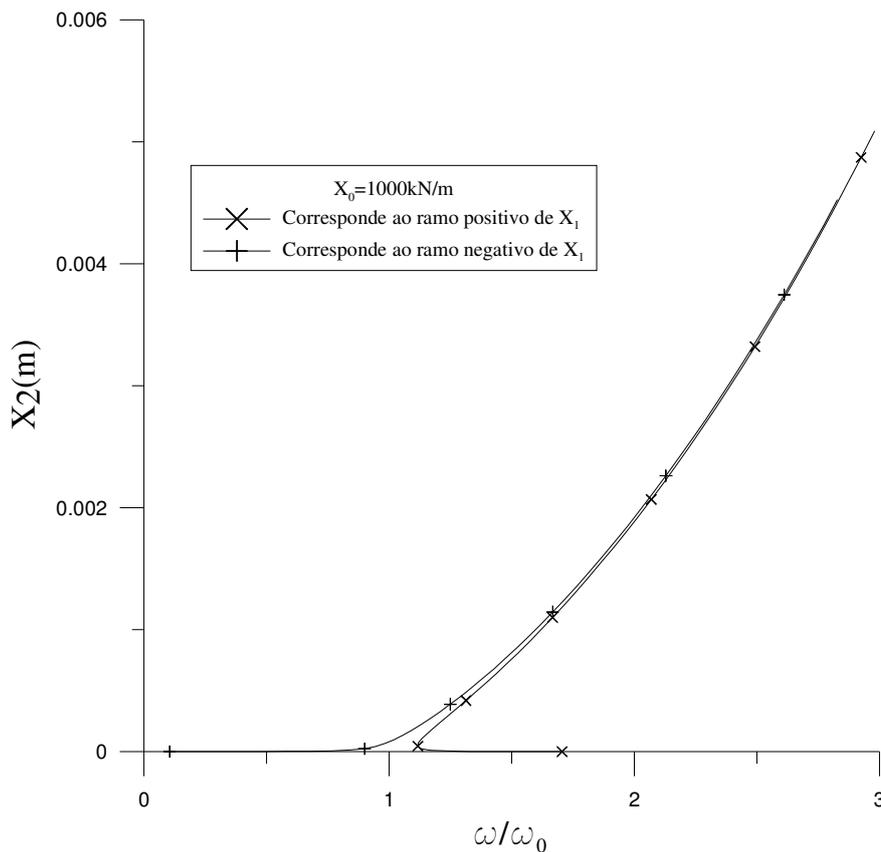


Figura 5-11 Variação de  $X_2$  com a frequência para vibração forçada não amortecida no nó, os graus de liberdade axiais na barra vertical no seu sistema local de coordenadas, se transformam em graus de liberdade transversais no sistema local da barra horizontal, e assim reciprocamente.

### 5.2.3. Vibração forçada amortecida

Na análise de vibração forçada amortecida, para simplificação da análise no método do balanço harmônico, a consideração do ângulo de fase pode ser feita no carregamento dinâmico, utilizando a seguinte expressão:

$$P(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi_f), \quad (5-20)$$

onde  $\phi_f$  é o ângulo de fase.

A eq.(5-20) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$P(t) = X_c \cos(\omega t) + X_s \sin(\omega t) \quad (5-21)$$

onde  $X_c$  e  $X_s$  são respectivamente as amplitudes das parcelas co-senoidal e senoidal da força harmônica.

Utilizando-se a expressão (5-18) na equação resultante do método de Ritz para os deslocamentos transversais, igualando-se os termos de  $\cos(\omega t)$  e  $\sin(\omega t)$  chega-se a duas equações, em termos  $X_c$  e  $X_s$ . Isolando-se  $X_c$  na equação dos termos de  $\cos(\omega t)$  e  $X_s$  na equação dos termos de  $\sin(\omega t)$ , essas equações são transformadas em uma única, utilizando a seguinte expressão:

$$X_0 = \sqrt{X_c^2 + X_s^2}, \quad (5-22)$$

Uma segunda equação é obtida da substituição da expressão (5-19) na equação para os deslocamentos axiais igualando-se os termos em  $\cos^2(\omega t)$ . Isso resulta num sistema de duas equações algébricas não-lineares nas variáveis  $X_1$  e  $X_2$ . Após a solução desse sistema pelo método do controle de arco, são encontradas as respostas frequência-amplitude mostradas nas Figura 5-12 e Figura 5-14. As respostas têm formas semelhantes, porém, com valores de  $X_2$  muito

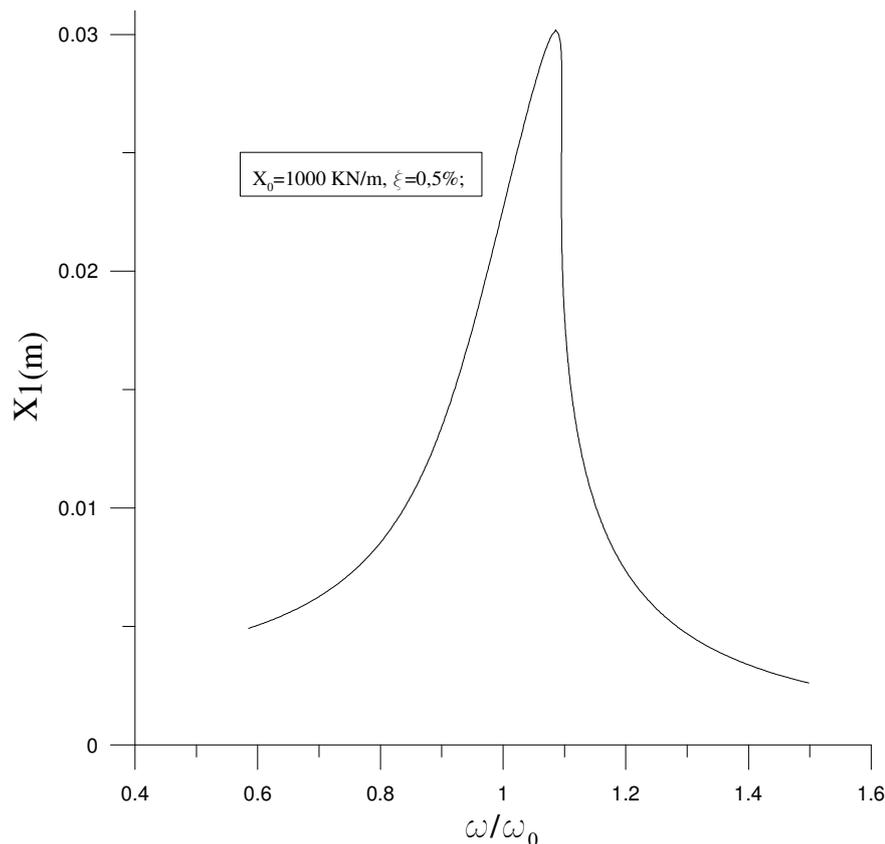


Figura 5-12 Variação de  $X_1$  com a frequência para vibração forçada amortecida menores que  $X_1$ . A Figura 5-13 mostra a resposta para  $X$ , obtida da expressão:

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (5-23)$$

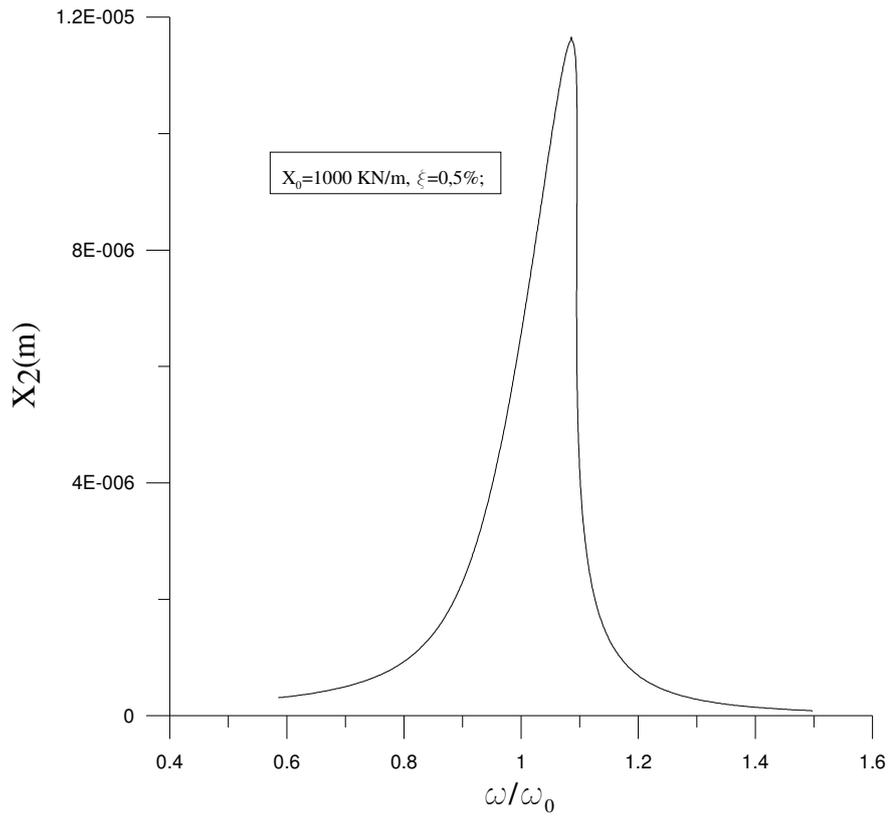


Figura 5-14 Variação de  $X_2$  com a frequência para vibração forçada amortecida

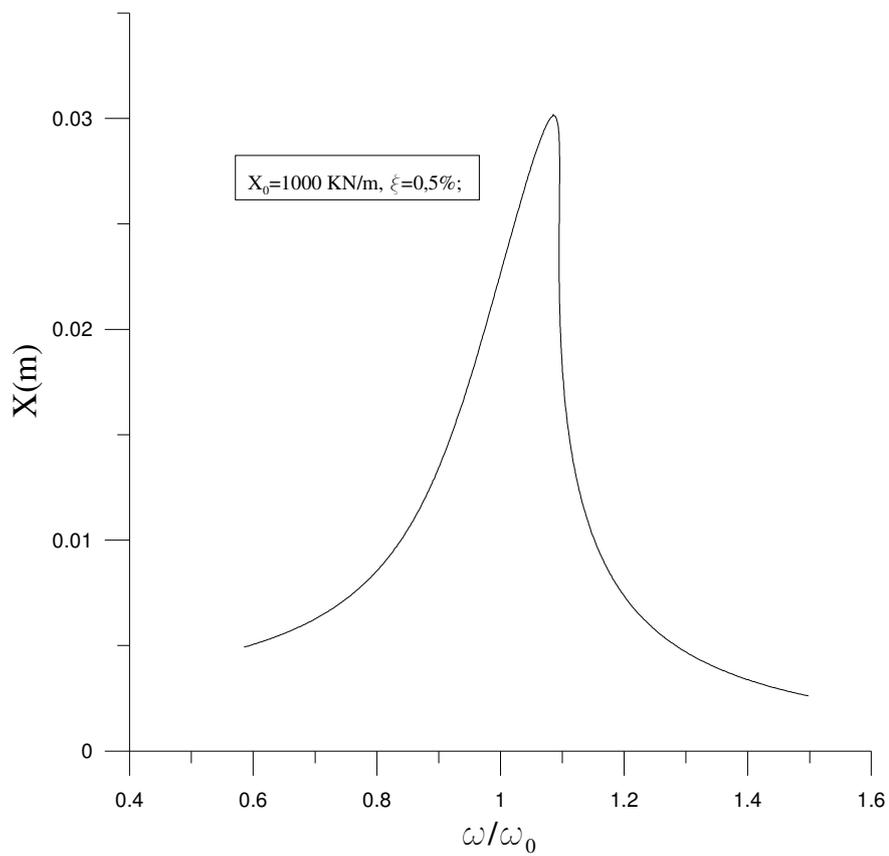


Figura 5-13 Variação de  $X$  com a frequência para vibração forçada amortecida

### 5.2.3.1. Influência da carga axial P

As respostas frequência-amplitude apresentadas até aqui não levam em consideração o efeito de cargas axiais compressíveis sobre a barra vertical do pórtico em L, situação de relevância nas aplicações práticas dessas estruturas. A influência desse carregamento é pesquisada nesta seção. Para o pórtico da Figura 5-1, com barras de mesmo comprimento  $L$ , o valor exato da carga crítica linear é dado, de acordo com Bazant e Cedolin (1991), pela expressão:

$$P_L = 1,406\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (5-24)$$

Define-se aqui a relação:

$$\lambda = \frac{P}{P_L} . \quad (5-25)$$

A análise é feita variando-se o valor de  $\lambda$  até que fique próximo da unidade. A variação da frequência natural com o valor de  $\lambda$  é mostrada na Figura 5-15, onde  $\Omega_0$  é o valor para a frequência natural para  $\lambda = 0$ . À medida que  $\lambda$  se aproxima da unidade a frequência cai até se tornar nula, como esperado, para  $\lambda = 1$ .

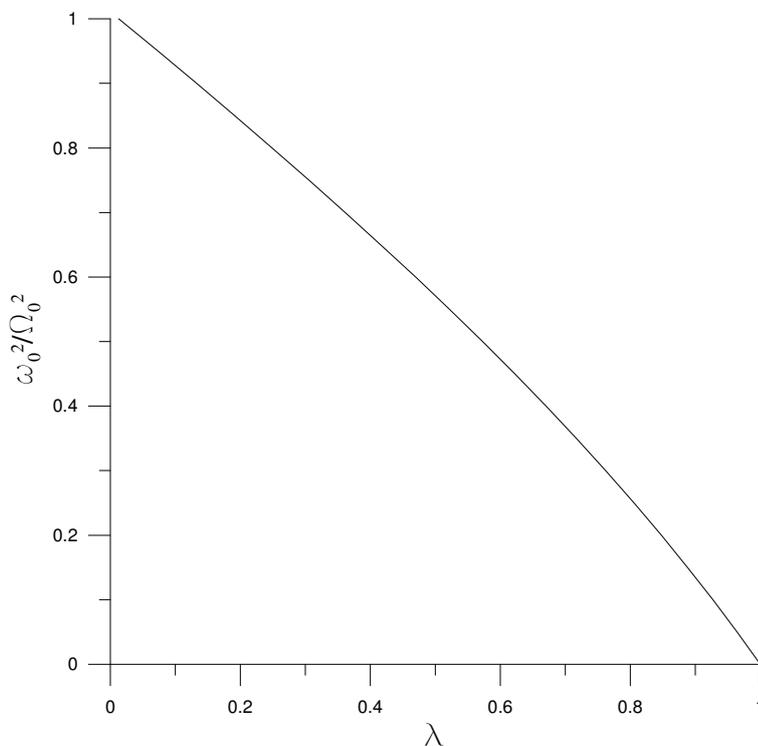


Figura 5-15 Variação de  $\omega_0^2/\Omega_0^2$  com o parâmetro de carga  $\lambda$

As respostas frequência-amplitude, obtidas pelo uso dos métodos de Ritz e do balanço harmônico, são apresentadas na Figura 5-16 para vibração livre e na Figura 5-17 para vibração forçada amortecida, onde as frequências foram divididas pela frequência natural de cada caso. Quanto mais próxima estiver a carga  $P$  da carga crítica maior é o efeito da não linearidade na inclinação das respostas para vibração livre. Para vibração forçada amortecida maior a “dobra” devido ao efeito da não-linearidade e mais alto o pico na região de ressonância. Estes comportamentos devem-se ao decréscimo de rigidez efetiva do pórtico com o aumento da carga  $P$ .

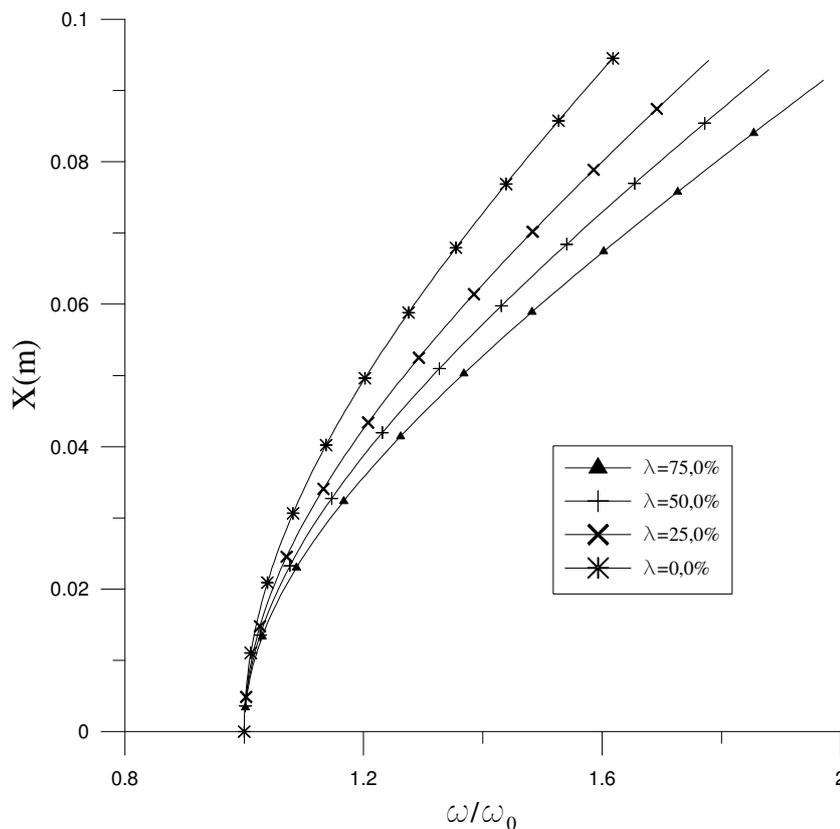


Figura 5-16 Influência do parâmetro  $\lambda$  nas curvas de ressonância para vibração livre

### 5.2.3.2.

#### Influência da geometria do pórtico

A influência da geometria do pórtico é analisada através dos comprimentos das barras horizontal e vertical, usando-se o parâmetro geométrico:

$$\gamma = \frac{L_b}{L_c} \quad (5-26)$$

Os resultados da análise, para  $L_c=3,0$  m, são mostrados na Figura 5-18 para vibração livre e na Figura 5-19 para vibração forçada amortecida.

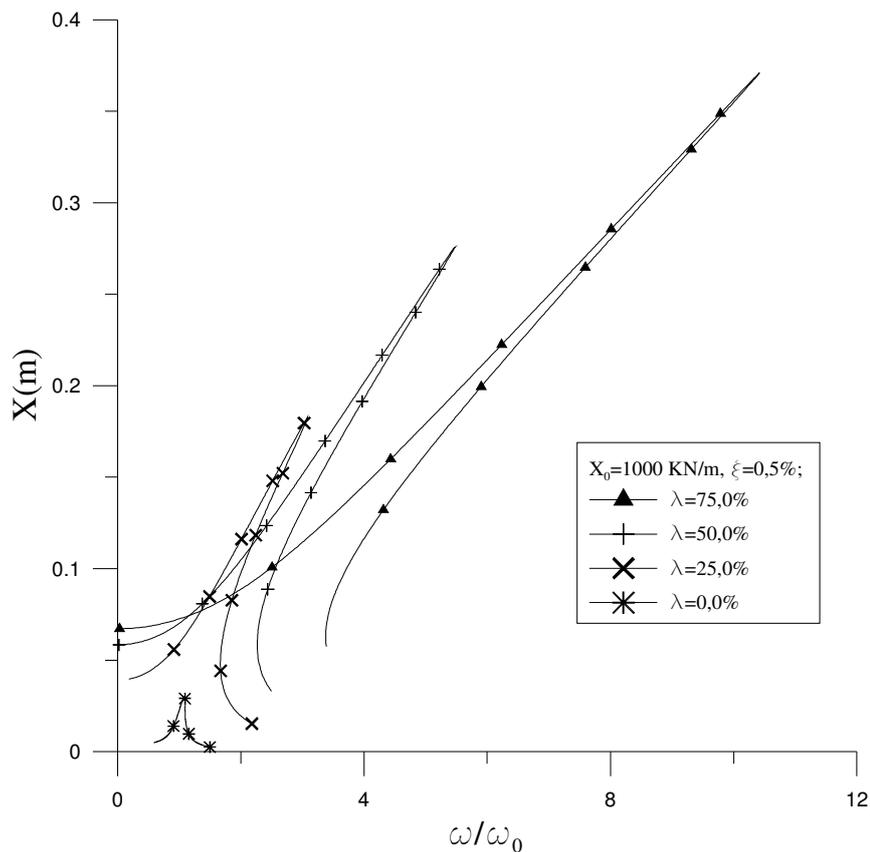


Figura 5-17 Influência do parâmetro  $\lambda$  nas curvas de ressonância para vibração forçada amortecida

Para vibração livre somente depois de um valor de  $\omega/\omega_0 = 6$  os efeitos do parâmetro  $\gamma$  começam a ser relevantes, de modo que, com o seu crescimento, as curvas começam a apresentar comportamento altamente não-linear. Isso se deve ao fato de que para valores altos de frequência a contribuição da amplitude dos deslocamentos axiais  $X_2$  passa a ser relevante frente aos valores de  $X_1$ , o que pode ser visto nas Figura 5-20 e Figura 5-21.

No caso da vibração forçada amortecida, com o aumento de  $\gamma$ , cresce o efeito da não-linearidade nas curvas de ressonância para o pórtico. No caso de  $\gamma = 1,9$  a curva apresenta vários pontos limites, com alternância de trechos com ganho e perda de rigidez. Esse comportamento ilustra o grau de sensibilidade da estrutura à sua geometria face à não-linearidade do problema, como já observado por Galvão *et alli* (2005) na análise da instabilidade estática desse tipo de pórtico.

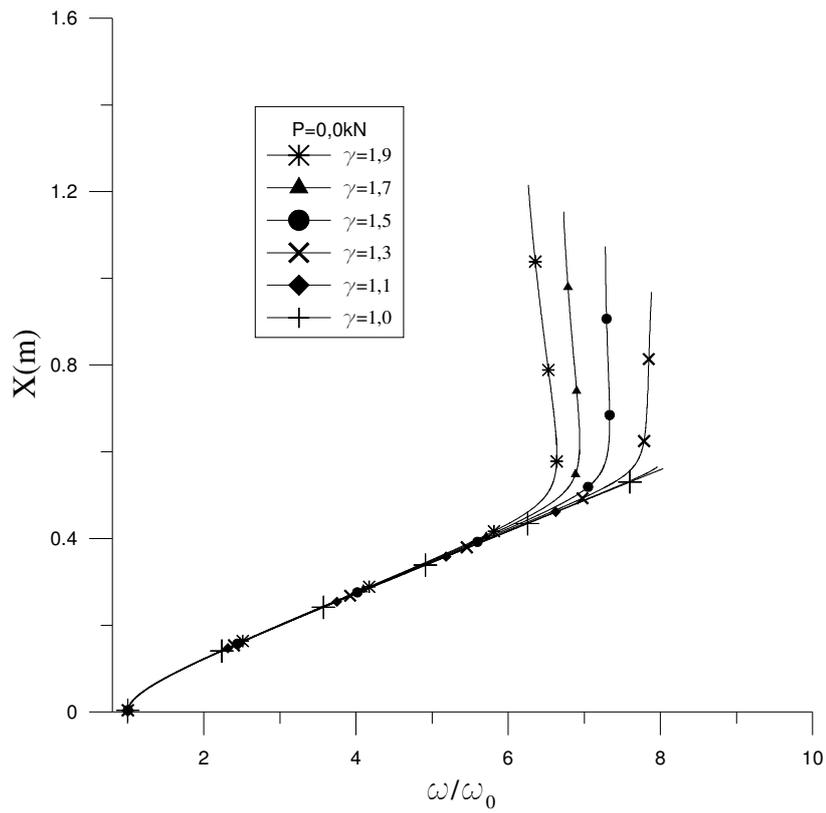


Figura 5-18 Influência do parâmetro  $\gamma$  nas curvas de ressonância para vibração livre

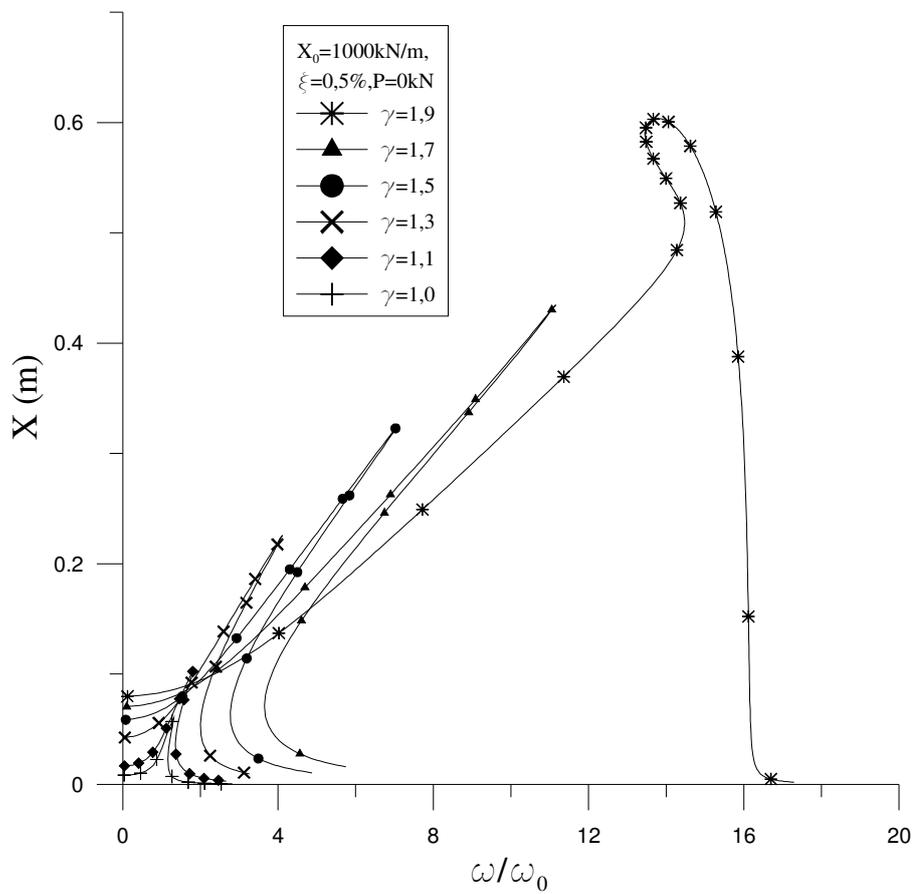


Figura 5-19 Influência do parâmetro  $\gamma$  nas curvas de ressonância para vibração forçada amortecida

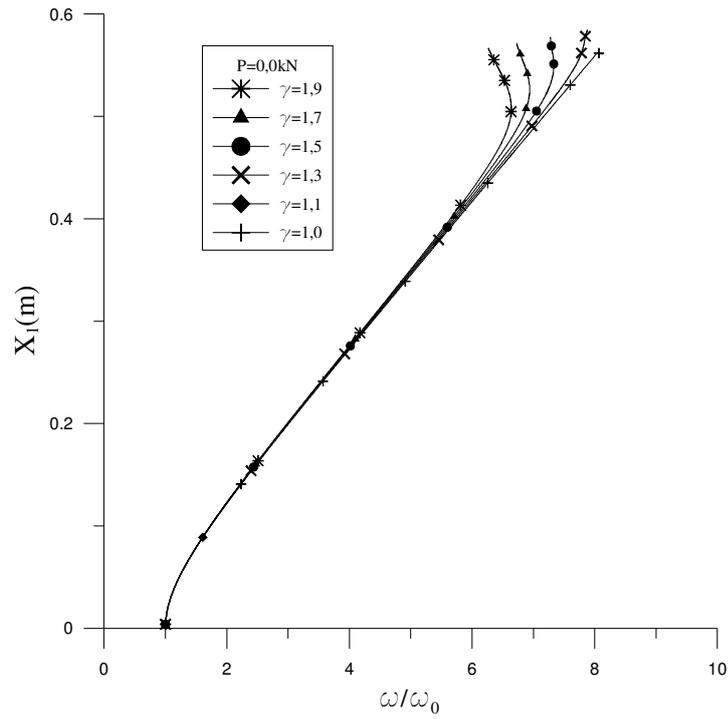


Figura 5-20 Influência do parâmetro  $\gamma$  na resposta  $\omega/\omega_0 - X_1$  para vibração livre

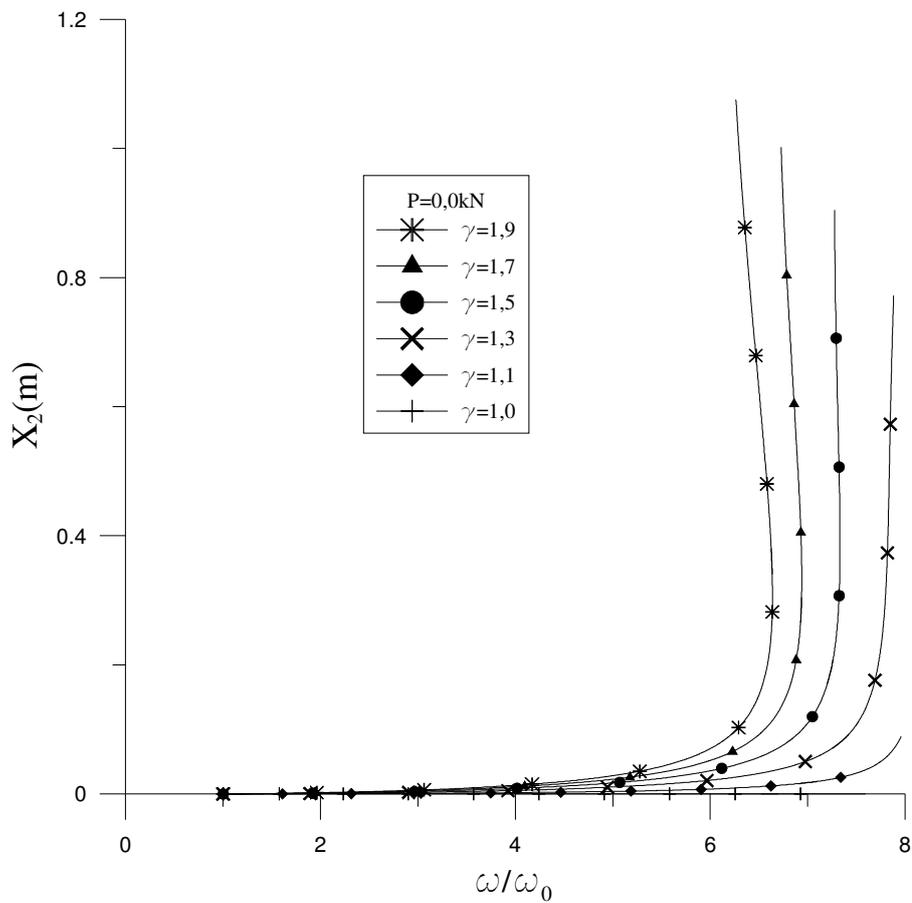


Figura 5-21 Influência do parâmetro  $\gamma$  na resposta  $\omega/\omega_0 - X_2$  para vibração livre

### 5.2.3.3. Carregamento axial em ambas as barras

Considera-se agora o pórtico submetido a um carregamento axial em ambas as barras, como mostrado na Figura 5-22. As curvas de ressonância na vibração amortecida para o pórtico submetido às cargas  $P_1$  e  $P_2$ , somente à carga  $P_1$  e sem carregamento axial são mostradas na Figura 5-23. O efeito da não-linearidade é mais sensível quando ambas as barras do pórtico encontram-se carregadas axialmente.

Outra análise é feita considerando-se  $P_1 = P_2 = P$ . Utiliza-se agora para o parâmetro  $\lambda$ , a seguinte relação:

$$\lambda = \frac{P}{P_{cr}}, \quad (5-27)$$

onde  $P_{cr}$  é a carga crítica linear de uma coluna biapoiada de propriedades iguais às barras do pórtico.

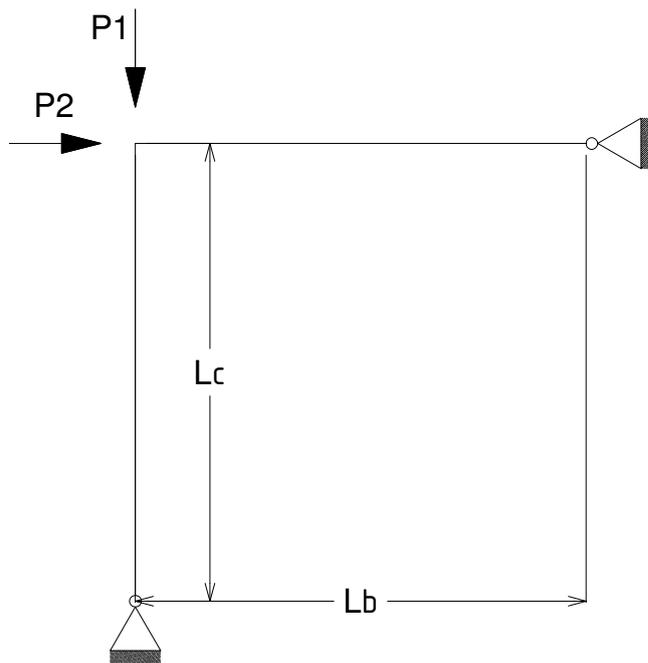


Figura 5-22 Pórtico de Roorda com ambas as barras carregadas axialmente

Os resultados para vários valores de  $\lambda$  são apresentados na Figura 5-24. Observa-se que quanto mais próximo da unidade estiver  $\lambda$ , maior é o efeito da não-linearidade nas curvas de ressonância do pórtico.

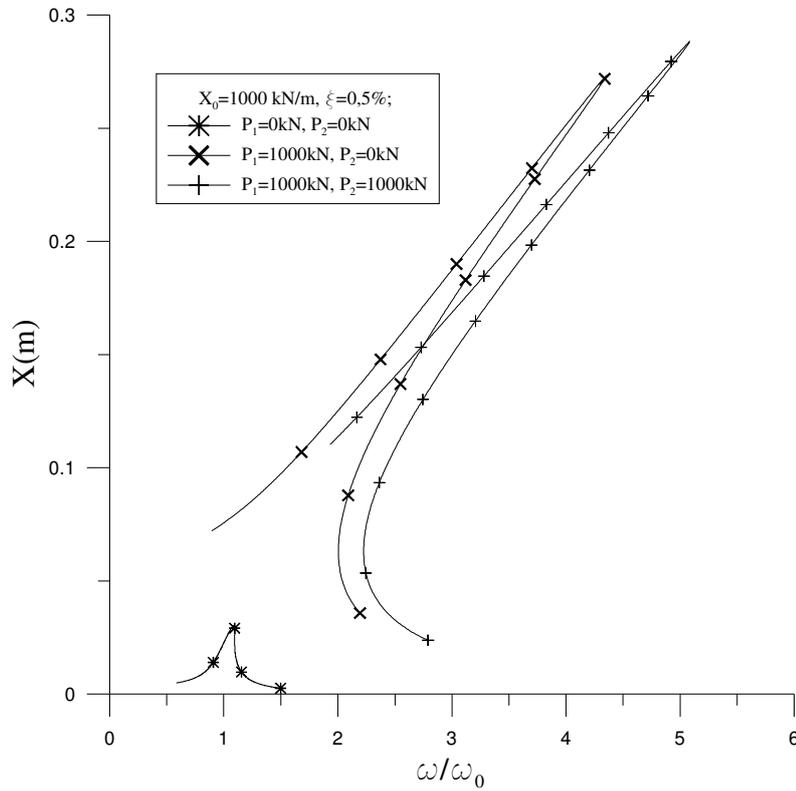


Figura 5-23 Influência do carregamento axial nas curvas de ressonância para vibração forçada amortecida

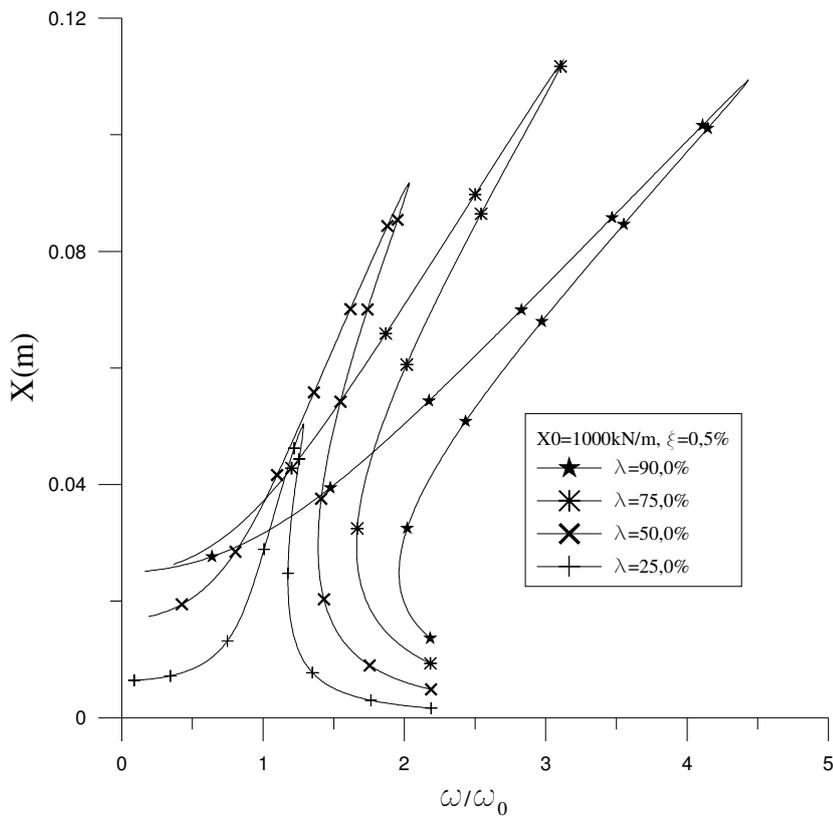


Figura 5-24 Influência de  $\lambda$  nas curvas de ressonância para vibração forçada amortecida