

## 4 Vigas com outras condições de apoio

Os modelos reduzidos, desenvolvidos para vigas simplesmente apoiadas no capítulo anterior, são agora aplicados a vigas com outras condições de apoio.

### 4.1. Condições de contorno

Na resolução dos problemas de valor de contorno, no qual recaem a solução das equações diferenciais de movimento de vigas, é necessário conhecer apropriadamente as condições de contorno de cada caso. Neste trabalho serão utilizadas combinações estaticamente compatíveis de apoios simples, engastes, apoios elásticos e extremidades livres.

Essas condições de apoio se expressam matematicamente pelas condições de contorno das expressões (3-5) e (3-6), no caso de apoio simples. Para engaste, numa dada posição  $\zeta = \zeta_a$ , as condições de contorno são:

$$\phi(\zeta_a) = 0 \quad (4-1)$$

$$\left. \frac{d\phi}{d\zeta} \right|_{\zeta_a=0} = 0 \quad (4-2)$$

Para as extremidades livres as condições de contorno são dadas por:

$$\left. \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} \right|_{\zeta_a=0} = 0 \quad (4-3)$$

$$\left. \frac{d^3\phi}{d\zeta^3} \right|_{\zeta_a=0} = 0 \quad (4-4)$$

No caso de apoios elásticos, formados por molas rotacionais, estas condições são:

$$\phi(\zeta_a) = 0 \quad (4-5)$$

$$\left. \frac{d^2\phi}{d\zeta^2} \right|_{\zeta_a=0} - \frac{k^*}{\pi} \left. \frac{d\phi}{d\zeta} \right|_{\zeta_a=0} = 0, \quad (4-6)$$

onde  $k^*$  é a rigidez rotacional da mola na forma adimensional dada por:

$$k^* = \frac{kL}{EI}, \quad (4-7)$$

onde  $k$  é a rigidez rotacional da mola.

## 4.2. Análise linear

Ainda que a solução analítica para outros tipos de apoio exista para o problema linearizado, a abordagem deste trabalho utiliza a análise com dois elementos finitos para interpolação polinomial do primeiro modo linear de cada conjunto de condições de apoio, visto que a solução analítica envolve funções trigonométricas e hiperbólicas, tornando mais complexo o emprego da metodologia de redução. A análise foi feita utilizando parâmetros com valores unitários. A Figura 4-1 mostra a forma do primeiro modo de vibração para os casos aqui estudados. No caso de vigas sobre apoios elásticos, consideram-se molas de mesma rigidez  $k$  em cada apoio. O valor da rigidez de cada mola é somado ao grau de liberdade correspondente na matriz de rigidez.

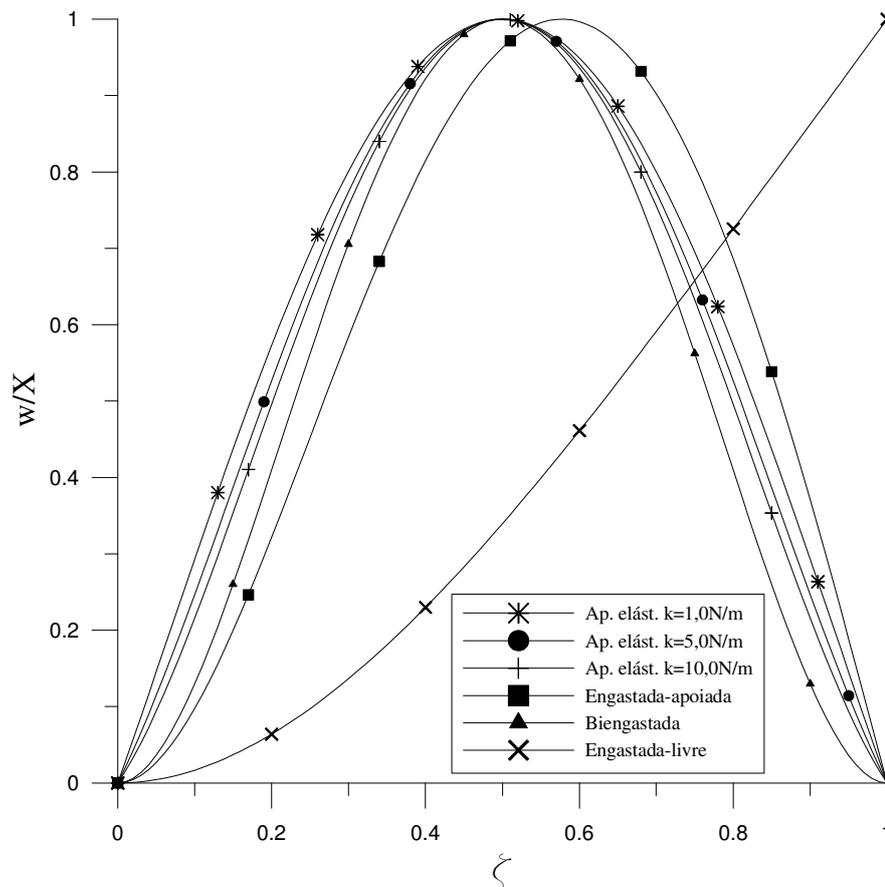


Figura 4-1 Modos de vibração para vigas com diversas condições de apoio

As respectivas frequências naturais das vigas, divididas por  $\Omega$  (frequência natural da viga biapoiada), são apresentadas na Tabela 4-1. Os resultados da solução exata são os autovalores da matriz obtida da substituição das condições de contorno apropriadas, listadas na seção anterior, na solução da equação (3-4). Como esperado, as frequências naturais para a viga com apoios elásticos ficam entre os resultados para as vigas biapoiadas e biengastadas. Quanto maiores os valores de  $k$ , mais próximas as frequências se encontram do valor obtido para vigas biengastadas.

Esse comportamento pode ser visto mais claramente na Figura 4-2. Para valores bem pequenos de  $k$  a frequência fica assintoticamente limitada pela frequência natural da viga biapoiada. Já para valores muito elevados de  $k$ , os

Condições de apoio	$\omega_0/\Omega$		
	M.E.F.	Sol. Exata	Erro (%)
Ap. Elást. K=1,0N.m	1,177	1,170	0,532
Ap. Elást. K=5,0N.m	1,553	1,539	0,878
Ap. Elást. K=10,0N.m	1,769	1,750	1,096
Engastada-livre	0,357	0,356	0,333
Engastada-apoiada	1,577	1,562	0,925
Biengastada	2,304	2,267	1,621

Tabela 4-1 Resultados de  $\omega_n/\Omega$ , obtidos pelo método dos elementos finitos e pela solução analítica para diversas condições de apoio

resultados convergem assintoticamente para aquele da viga biengastada.

### 4.3.

#### Análise não-linear

A análise não-linear segue o mesmo procedimento utilizado para viga biapoiada, utilizando as funções polinomiais listadas na Tabela 4-2, como uma

Condições de apoio	Funções Polinomiais
Ap. Elást. K=1,0N.m	$4,667x^4 - 9,334x^3 + 1,834x^2 + 2,833x$
Ap. Elást. K=5,0N.m	$7,882x^4 - 15,763x^3 + 5,852x^2 + 2,030x$
Ap. Elást. K=10,0N.m	$10,022x^4 - 20,044x^3 + 8,528x^2 + 1,495x$
Engastada-livre	$0,185x^4 - 0,994x^3 + 1,810x^2$
Engastada-apoiada	$7,809x^4 - 19,415x^3 + 11,606x^2$
Biengastada	$16,000x^4 - 32,000x^3 + 16,000x^2$

Tabela 4-2 Funções polinomiais para vários conjuntos de condições de apoio

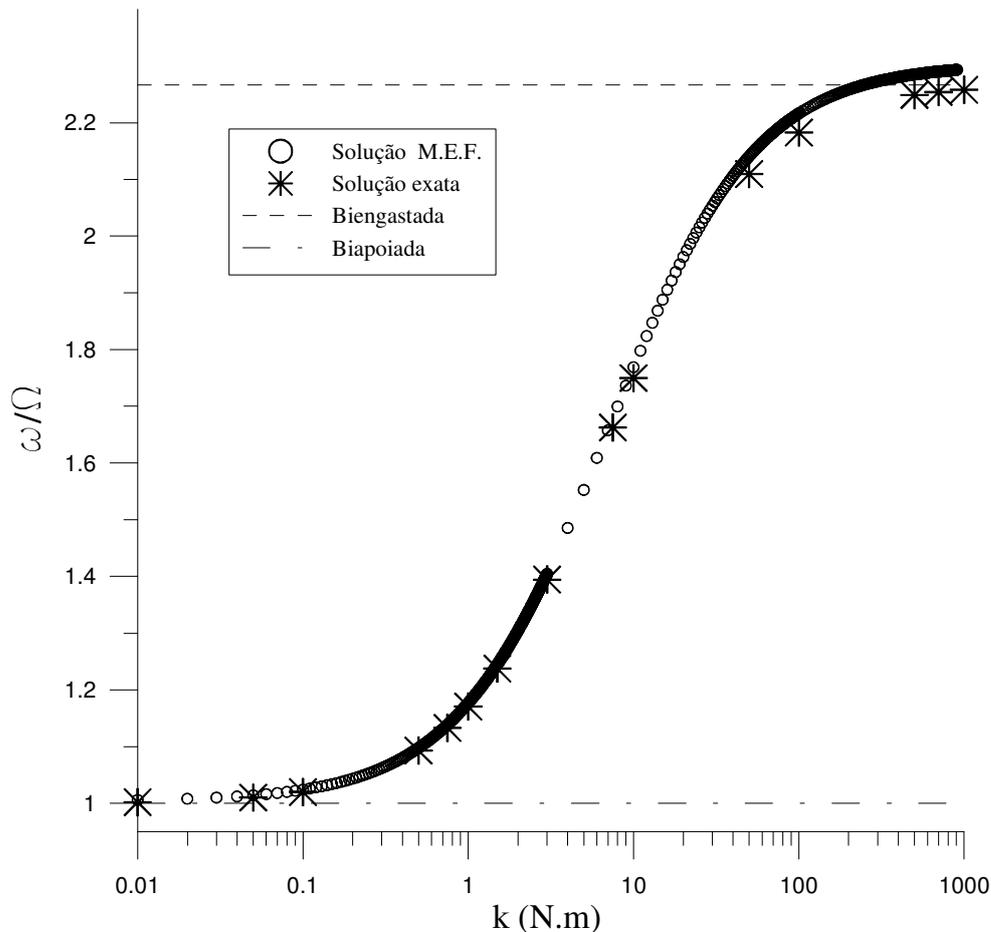


Figura 4-2 Variação da frequência natural de uma viga com apoios elásticos em função da rigidez rotacional da mola em escala logarítmica primeira aproximação para o modo não-linear de vibração.

### 4.3.1. Vibração livre

A equação resultante para vibração livre de uma viga engastada-livre, utilizando os métodos de Galerkin e balanço harmônico com uma aproximação dada pela eq. (3-54), é:

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 = 0,127 + 0,789 \cdot 10^{-2} \eta X^{*2} + 0,220 \cdot 10^{-3} \eta^2 X^{*4} \quad (4-8)$$

Esta equação fornece a relação frequência-amplitude mostrada na Figura 4-3.

Para a viga engastada-apoiada a equação é:

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 = 2,451 + 0,930 \eta X^{*2} + 0,176 \eta^2 X^{*4} \quad (4-9)$$

A relação frequência-amplitude para vibração livre de uma viga engastada-apoiada é mostrada na Figura 4-4.

Por último tem-se a seguinte equação para o caso de uma viga biengastada:

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 = 5,174 + 1,743\eta X^{*2} + 0,490\eta^2 X^{*4} \quad (4-10)$$

A Figura 4-5 mostra a relação frequência-amplitude para uma viga biengastada.

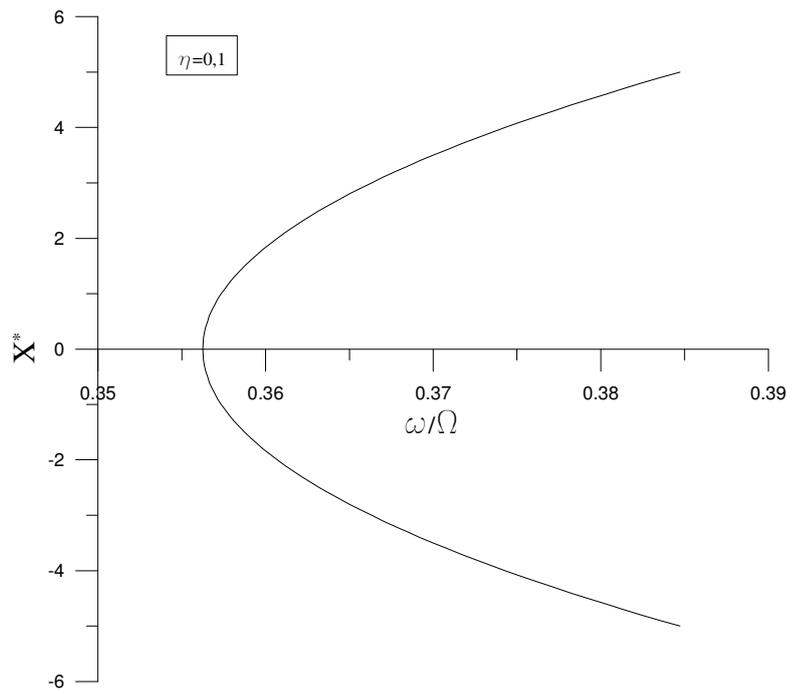


Figura 4-3 Resposta frequência-amplitude de uma viga engastada-livre

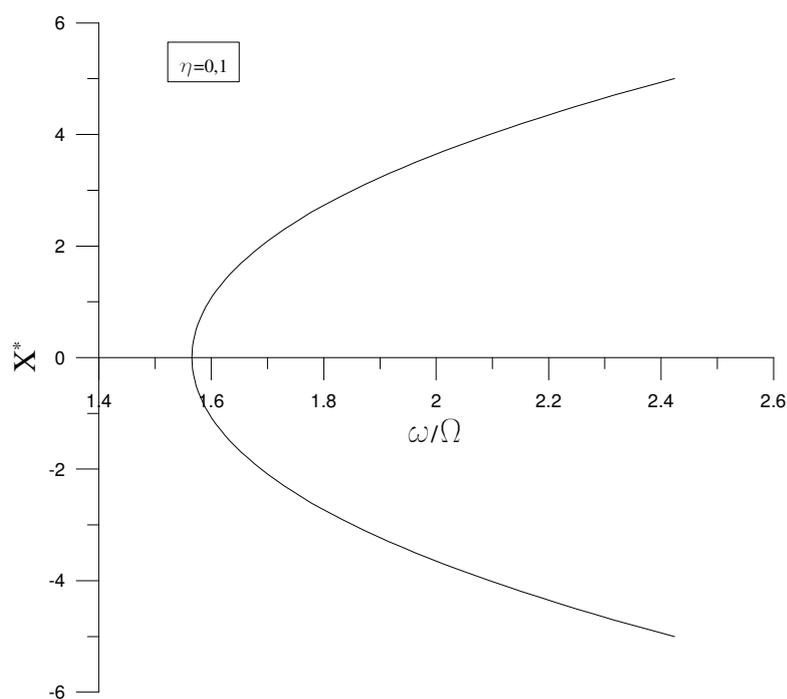


Figura 4-4 Resposta frequência-amplitude de uma viga engastada-apoiada

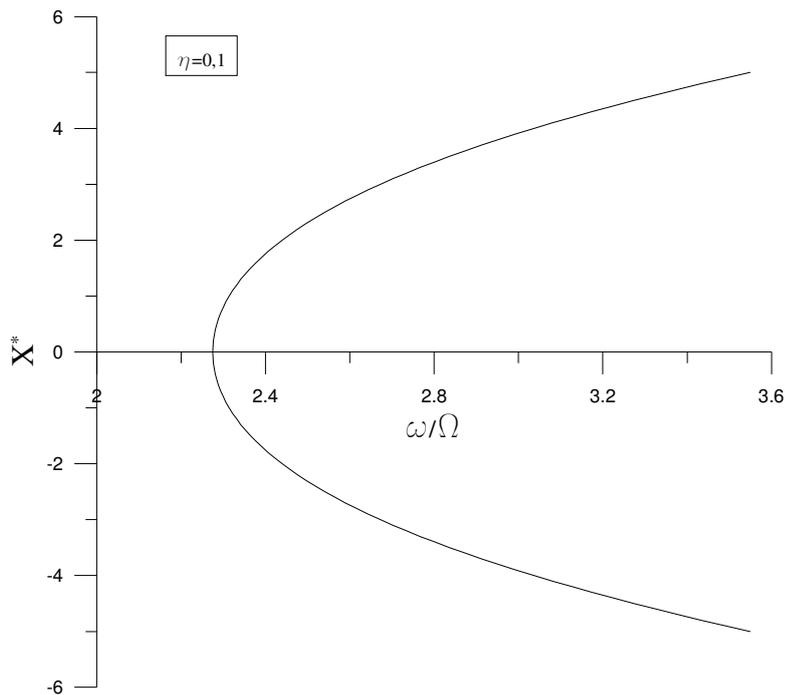


Figura 4-5 Resposta frequência-amplitude de uma viga biengastada

Uma comparação entre as curvas mostra que as frequências naturais concordam com os resultados lineares, ou seja, obtém-se para a viga engastada-livre uma frequência natural menor que a da viga biapoiada ( $\omega/\Omega=1$ ) e valores superiores para as vigas engastada-apoiada e biengastada. Observa-se ainda que a curva para a viga engastada-livre atinge valores muito elevados de amplitude para valores de frequência próximos a sua frequência natural; já para vigas engastadas-apoiadas e biengastadas os mesmos valores de amplitude são atingidos para valores mais distantes de suas respectivas frequências naturais. Isso pode ser observado com maior clareza caso as curvas das Figura 4-3, Figura 4-4 e Figura 4-5 tenham suas frequências  $\omega$ , divididas por suas respectivas frequências naturais,  $\omega_0$ , o resultado pode ser visto na Figura 4-6. Vê-se claramente uma inclinação maior da resposta para a viga engastada-livre. Este comportamento continua, entretanto, menos sensível às condições de apoio para as outras combinações de condições de contorno. À medida que os apoios restringem mais os deslocamentos da viga, menor a inclinação da resposta frequência-amplitude, para um mesmo valor do parâmetro  $\eta$ .

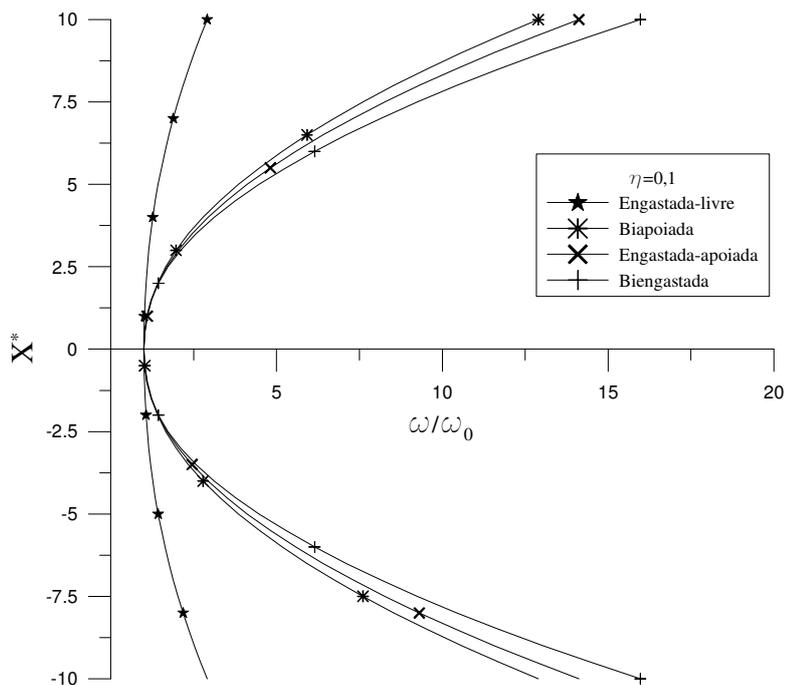


Figura 4-6 Influência das condições de apoio na resposta freqüência-amplitude

#### 4.3.2. Vibração forçada não-amortecida

As expressões abaixo mostram as equações algébricas, resultantes da aplicação dos métodos de Galerkin e balanço harmônico utilizando a expressão (3-54), respectivamente para as vigas sob vibração forçada com condições de apoio do tipo: engastada-livre, engastada-apoiada, biengastada:

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 = 0,127 + 0,789 \cdot 10^{-2} \eta X^{*2} + 0,220 \cdot 10^{-3} \eta^2 X^{*4} - 1,566 \frac{X_0^*}{X^*} \quad (4-11)$$

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 = 2,451 + 0,930 \eta X^{*2} + 0,176 \eta^2 X^{*4} - 1,293 \frac{X_0^*}{X^*} \quad (4-12)$$

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 = 5,174 + 1,743 \eta X^{*2} + 0,490 \eta^2 X^{*4} - 1,312 \frac{X_0^*}{X^*} \quad (4-13)$$

As curvas de ressonância para essas condições de apoio são mostradas na Figura 4-7, junto com a resposta para a viga biapoiada. O efeito da não-linearidade na região de ressonância é mais relevante para a viga engastada-livre, que para as outras condições de apoio. À medida que cresce a restrição ao movimento imposta pelas condições de contorno sobre a estrutura, menor torna-se o efeito da não-linearidade na região de ressonância, para um dado parâmetro  $\eta$ .

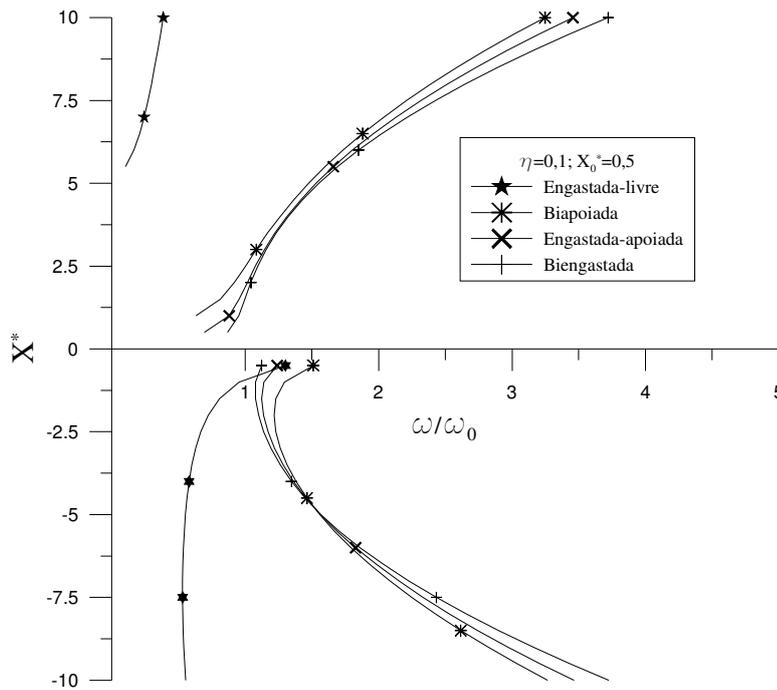


Figura 4-7 Influência das condições de apoio na resposta freqüência-amplitude para vibração forçada não-amortecida

### 4.3.3. Vibração forçada amortecida

O efeito das condições de apoio sobre a vibração forçada amortecida pode ser visto nas Figura 4-8 e Figura 4-9 onde para uma maior restrição imposta pelas condições de contorno, menor o efeito da não-linearidade. As curvas de ressonância da Figura 4-10 mostram que com o aumento das restrições ao movimento causado pelas condições de apoio, o pico diminui e a curva se inclina mais para a direita, mantidos fixos todos os outros parâmetros. Esse efeito fica bem visível no caso da viga engastada-livre cujo valor de amplitude para o pico é aproximadamente cinco vezes maior que o valor de pico para as outras condições de contorno aqui estudadas.

No caso de vigas sobre apoios elásticos, o comportamento dinâmico na vibração forçada amortecida fica entre os comportamentos das vigas biapoiada e biengastada dependendo do valor da constante rotacional das molas. Isto é ilustrado nas Figura 4-11, Figura 4-12 e Figura 4-13.

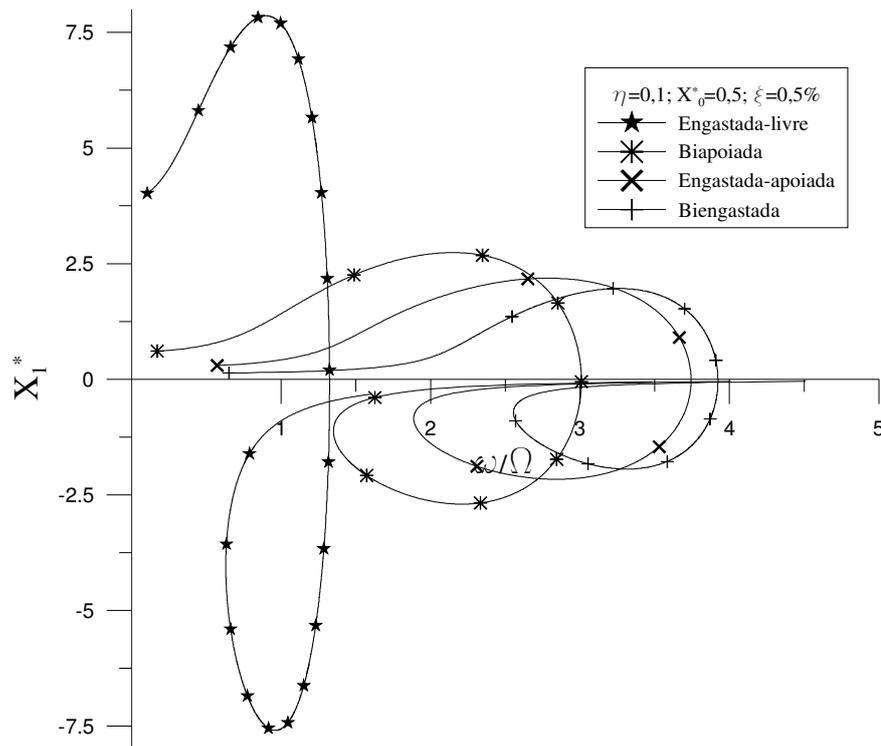


Figura 4-8 Influência das condições de apoio na relação freqüência-amplitude -  $X_1^*$ , para vibração forçada amortecida

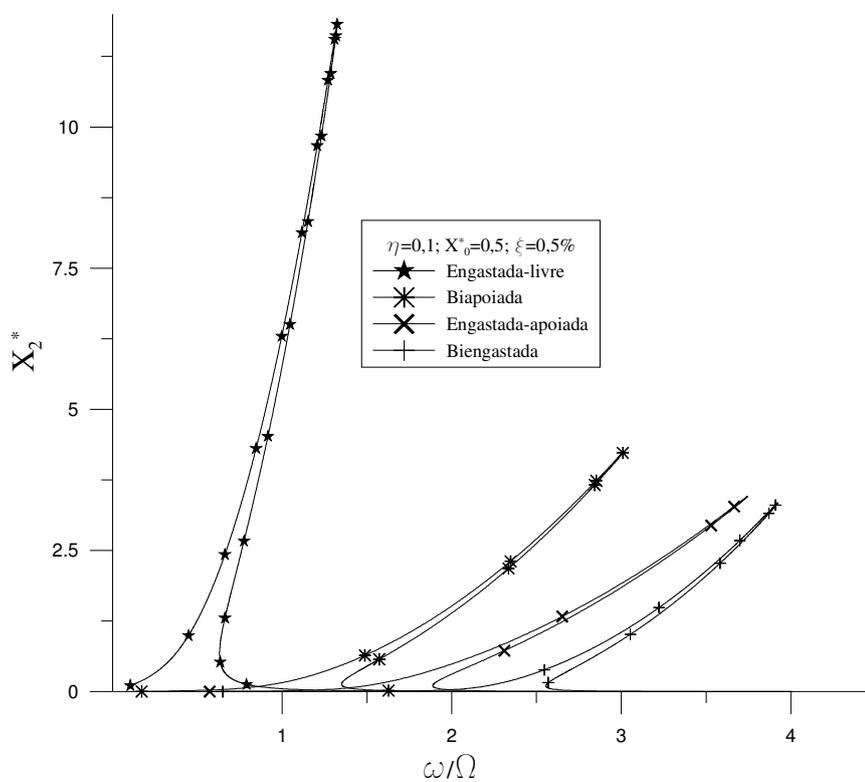


Figura 4-9 Influência das condições de apoio na relação freqüência-amplitude -  $X_2^*$ , para vibração forçada amortecida

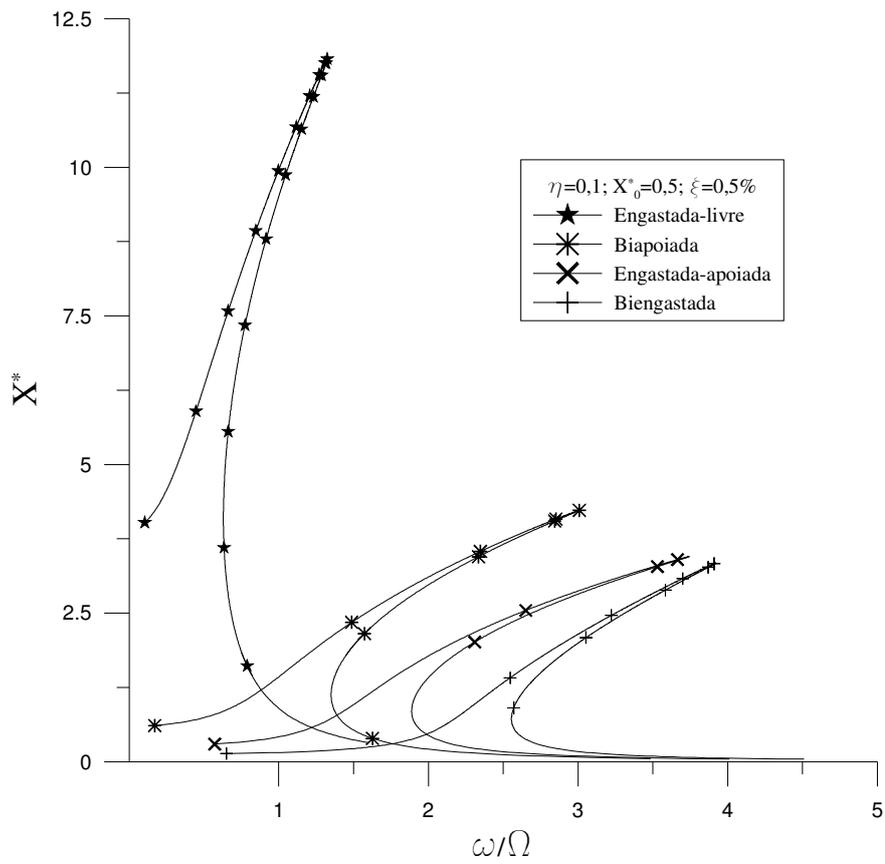


Figura 4-10 Influência das condições de apoio nas curvas de ressonância para vibração forçada amortecida

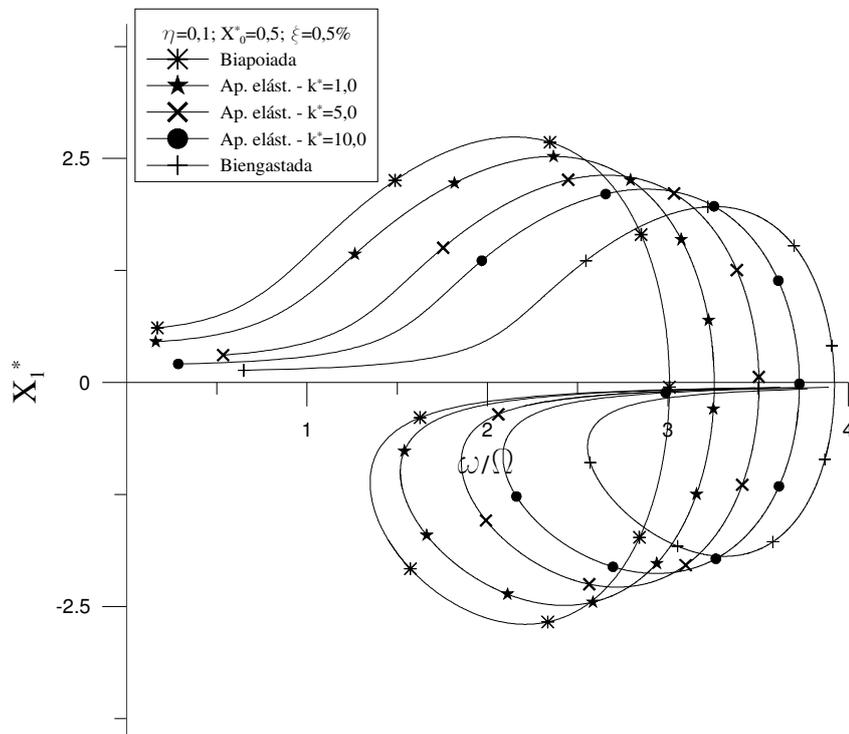


Figura 4-11 Influência dos valores da constante da mola na relação frequência-amplitude -  $X_1^*$ , para vibração forçada amortecida

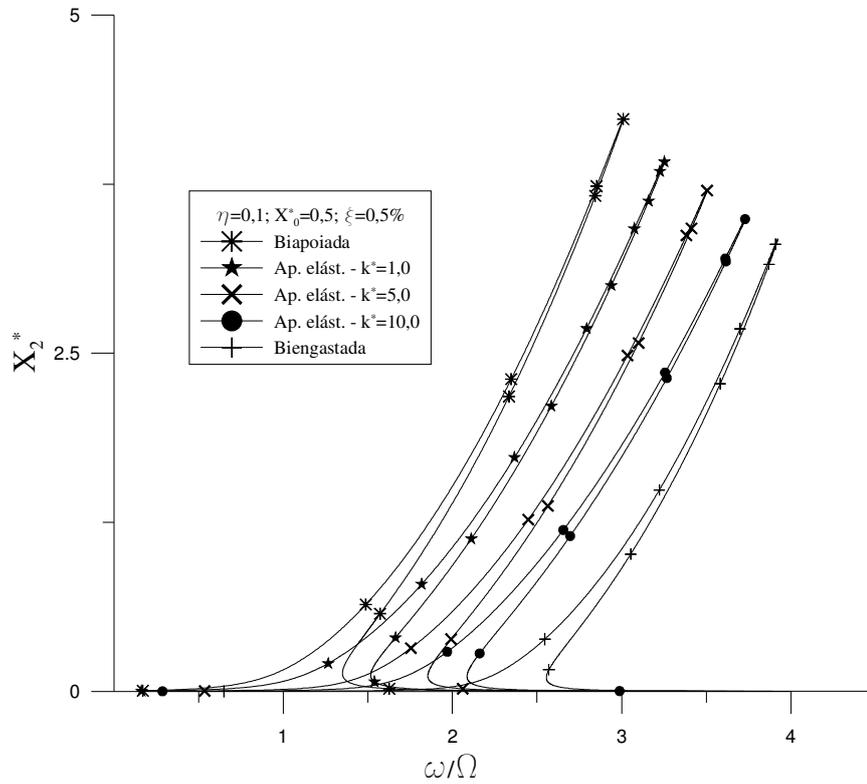


Figura 4-12 Influência dos valores da constante da mola na relação frequência-amplitude -  $X_2^*$ , para vibração forçada amortecida

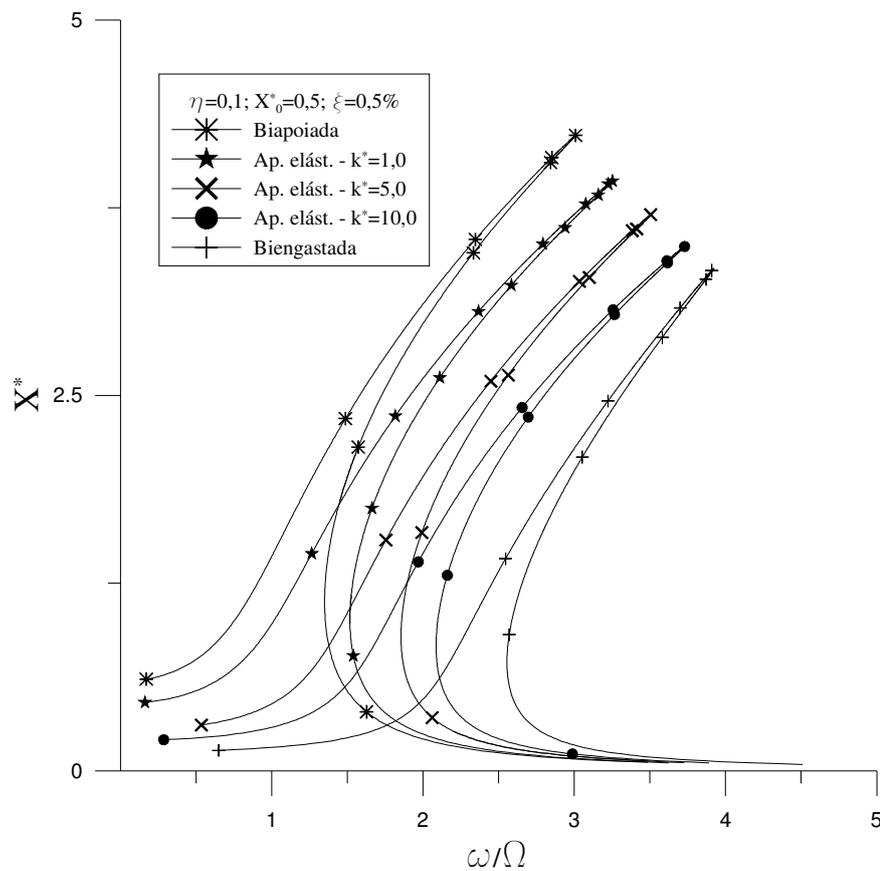


Figura 4-13 Influência dos valores da constante da mola nas curvas de ressonância para vibração forçada amortecida

#### 4.3.4. Correção não-linear

A extensão para as outras condições de contorno das metodologias de aproximação da correção não-linear da função deslocamento, utilizada para viga biapoiada, será exemplificada para a situação de vibração forçada amortecida de vigas com extremidades engastadas e apoiada-engastada.

##### 4.3.4.1. Viga apoiada-engastada

A função polinomial de quarta ordem normalizada obtida pela análise linear em elementos finitos, para representar o primeiro modo de vibração de uma viga apoiada-engastada é dada pela seguinte expressão:

$$p_0(x) = 7,809x^4 - 19,415x^3 + 11,606x^2 \quad (4-14)$$

Utilizando-se as expressões (3-74) e (3-75) chega-se a seguinte função de correção:

$$\begin{aligned} p_1(x) = & -1857,650x^{12} + 1385,310x^{11} - 42735,007x^{10} \\ & + 69743,634x^9 - 63519,210x^8 - 30611,895x^7 - 6099,973x^6 \\ & + 22,657x^4 - 56,333x^3 + 33,676x^2 \end{aligned} \quad (4-15)$$

Os gráficos de  $p_0(x)$  e  $p_1(x)$  são mostrados na Figura 4-14.

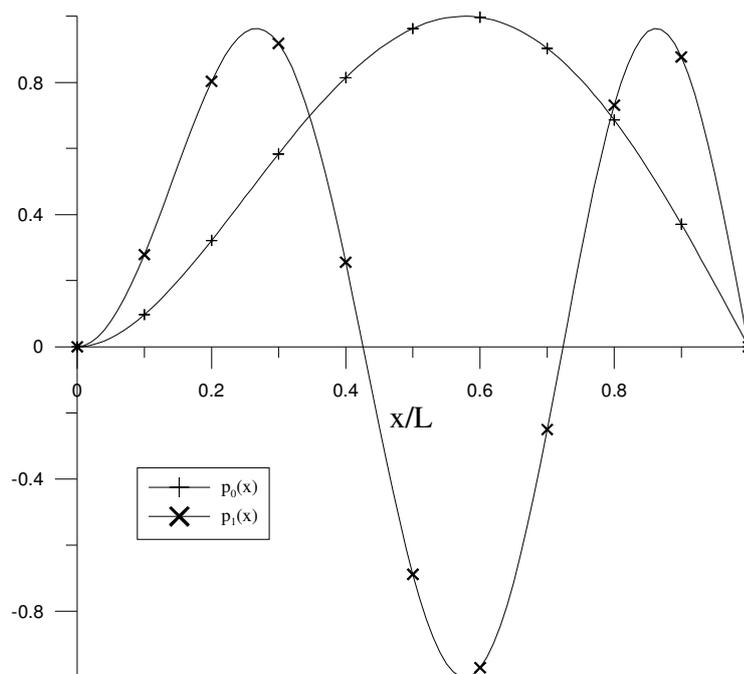


Figura 4-14 Gráficos de  $p_0(x)$  e  $p_1(x)$  para viga engastada-apoiada

A análise utilizando  $p_0(x)$  e  $p_1(x)$  é feita considerando valores unitários para as propriedades geométricas e de material da viga e para a amplitude do carregamento harmônico e um fator de amortecimento igual a 0,1%. Os resultados dessa análise encontram-se na Figura 4-15. Observa-se um comportamento semelhante ao da viga biapoiada, com um pico menor numa frequência nove vezes maior que a natural. A comparação entre as respostas com e sem a correção é mostrada na Figura 4-16. O efeito da correção se assemelha ao obtido para viga biapoiada, sendo mais relevante para valores mais elevados de amplitude na região de ressonância, tendendo a reduzir um pouco a inclinação que a curva faz para a direita, se comparado com a resposta sem a correção.

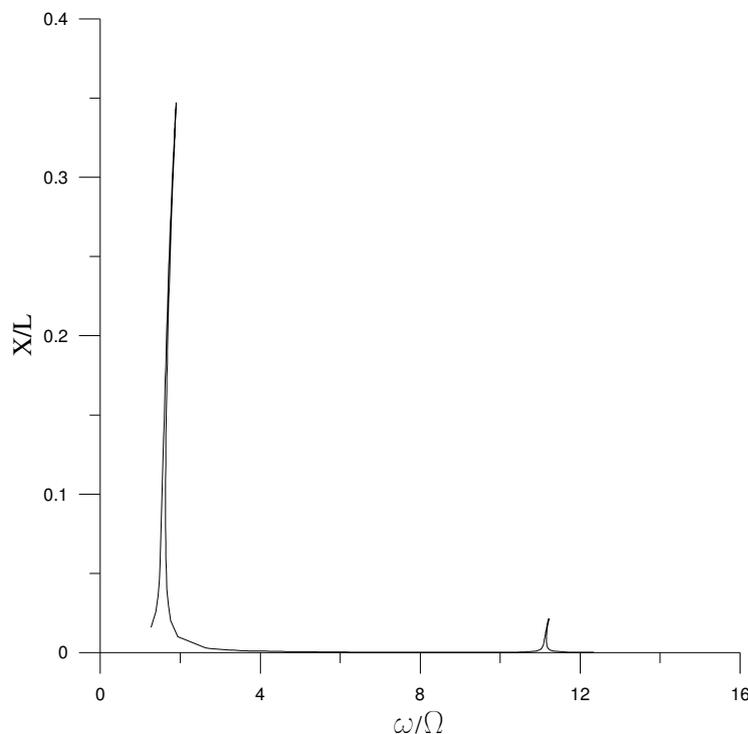


Figura 4-15 Resposta frequência-amplitude para vibração forçada amortecida para viga engastada-apoiada utilizando correção não-linear

Utilizando-se a metodologia apresentada no capítulo anterior para vigas biapoiadas, que emprega o método da perturbação e dos elementos finitos para efetuar a correção utilizando somente uma função corrigida na parte espacial no método de Ritz, chega-se à resposta frequência amplitude apresentada na Figura 4-17. Observa-se que a resposta produzida pela correção utilizando esta metodologia fica entre as respostas sem correção e com correção empregando duas funções. O valor da amplitude para o pico também sofre uma pequena

redução em relação às respostas não corrigidas e corrigidas com uso de duas funções.

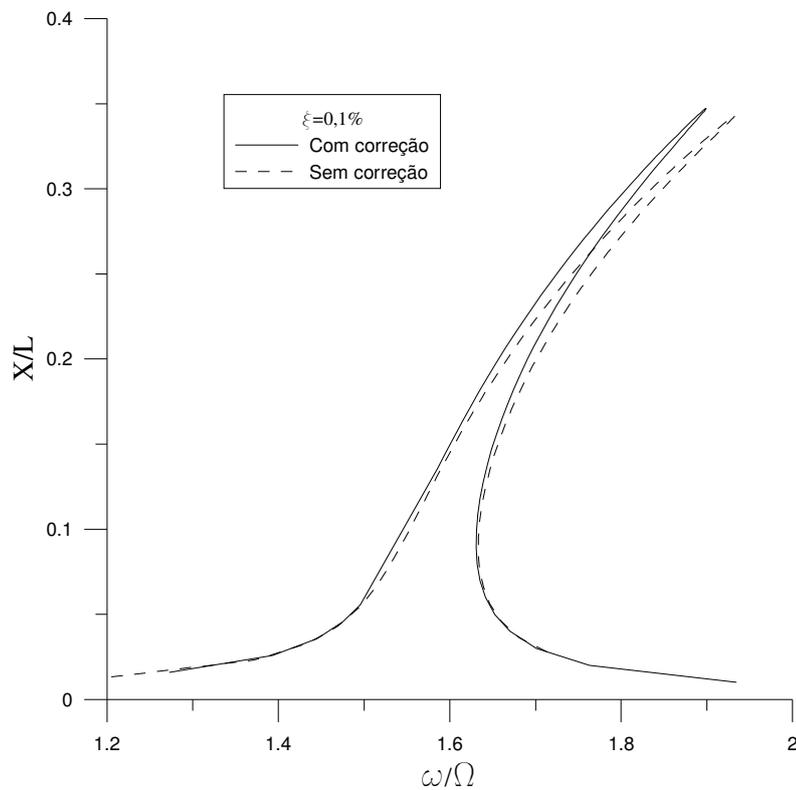


Figura 4-16 Influência da correção na resposta frequência-amplitude para vibração forçada amortecida de vigas engastada-apoiadas

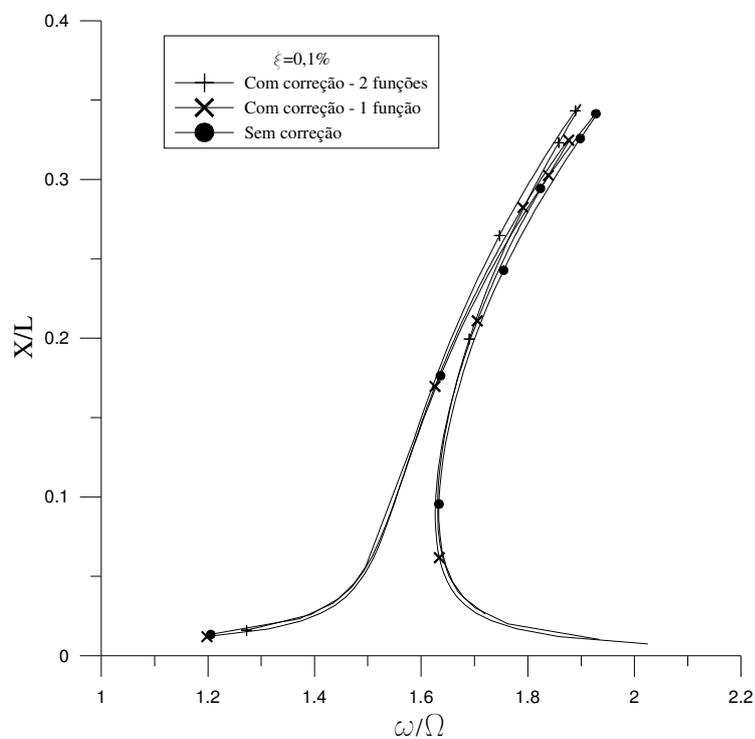


Figura 4-17 Resposta frequência-amplitude para vibração forçada amortecida de viga engastada-apoiada utilizando correção não-linear com uma e duas funções

#### 4.3.4.2. Viga biengastada

Para a viga biengastada, o primeiro modo de vibração, interpolado do resultado da análise linear em elementos finitos, é:

$$p_0(x) = 16,000x^4 - 32,000x^3 + 16,000x^2 \quad (4-16)$$

Utilizando-se as expressões (3-74) e (3-75), chega-se na seguinte função de correção:

$$\begin{aligned} p_1(x) = & -15582,748x^{12} + 93496,488x^{11} - 2,337.10^5 x^{10} \\ & + 3,116.10^5 x^9 - 2,337.10^5 x^8 + 93496,488x^7 - 15582,748x^6 \\ & + 44,870x^4 - 89,740x^3 + 44,870x^2 \end{aligned} \quad (4-17)$$

Os gráficos de  $p_0(x)$  e  $p_1(x)$  são mostrados na Figura 4-18

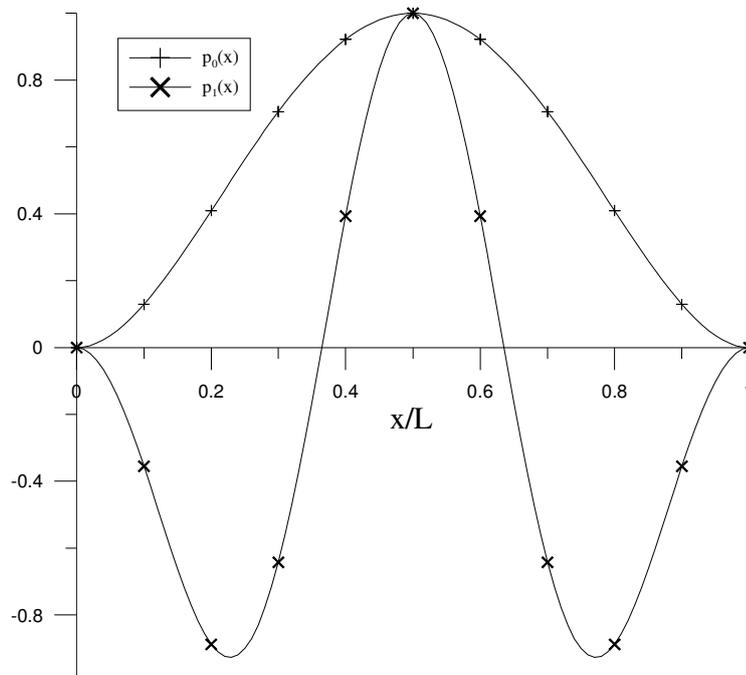


Figura 4-18 Gráficos de  $p_0(x)$  e  $p_1(x)$  para viga biengastada

A aplicação da metodologia resulta na resposta frequência-amplitude da Figura 4-19. Novamente usam-se valores unitários para os parâmetros da viga e de carga. A comparação da resposta corrigida e não-corrigida pode ser vista na Figura 4-20. O resultado da correção é semelhante ao já encontrado para vigas biapoiada e engastada-apoiada.

Utilizando-se a metodologia que emprega o método da perturbação e dos elementos finitos para efetuar a correção utilizando somente uma função, chega-se

à resposta frequência-amplitude apresentada na Figura 4-21. Nota-se também o mesmo comportamento já observado para vigas biapoiada e engastada-apoiada.

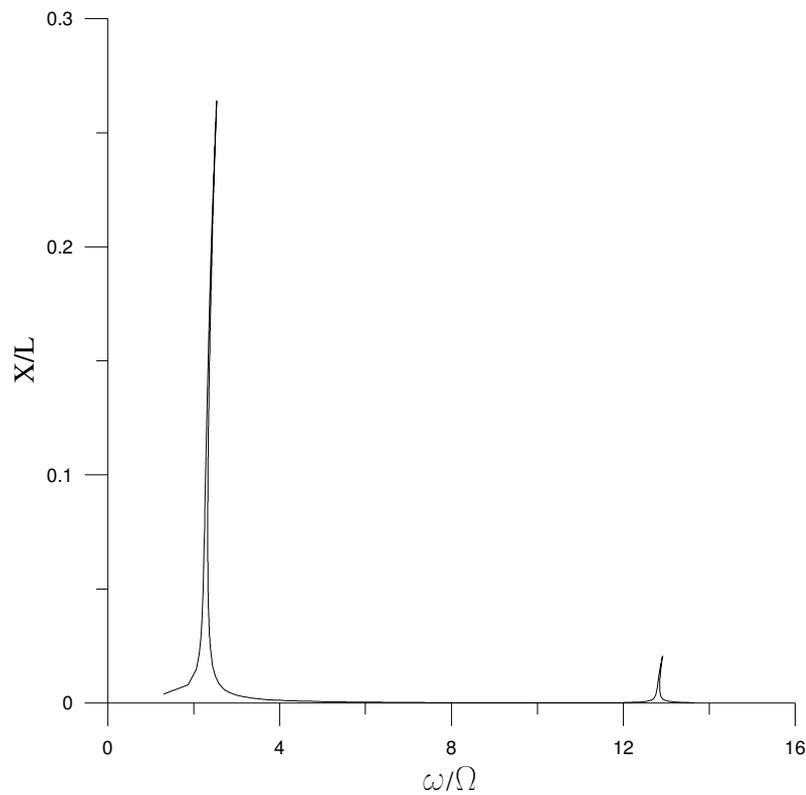


Figura 4-19 Resposta frequência-amplitude para vibração forçada amortecida para viga biengastada utilizando correção não-linear

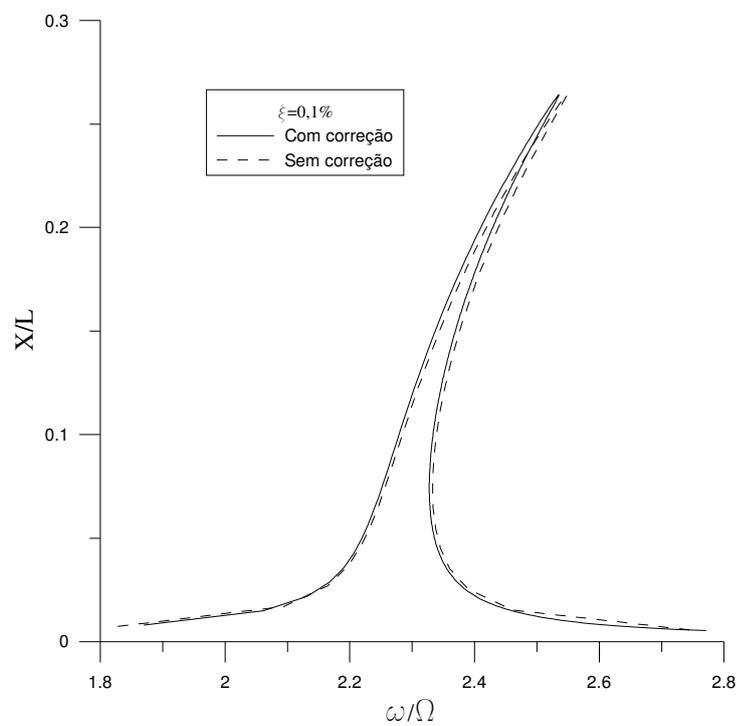


Figura 4-20 Influência da correção na resposta frequência-amplitude para vibração forçada amortecida de vigas biengastadas

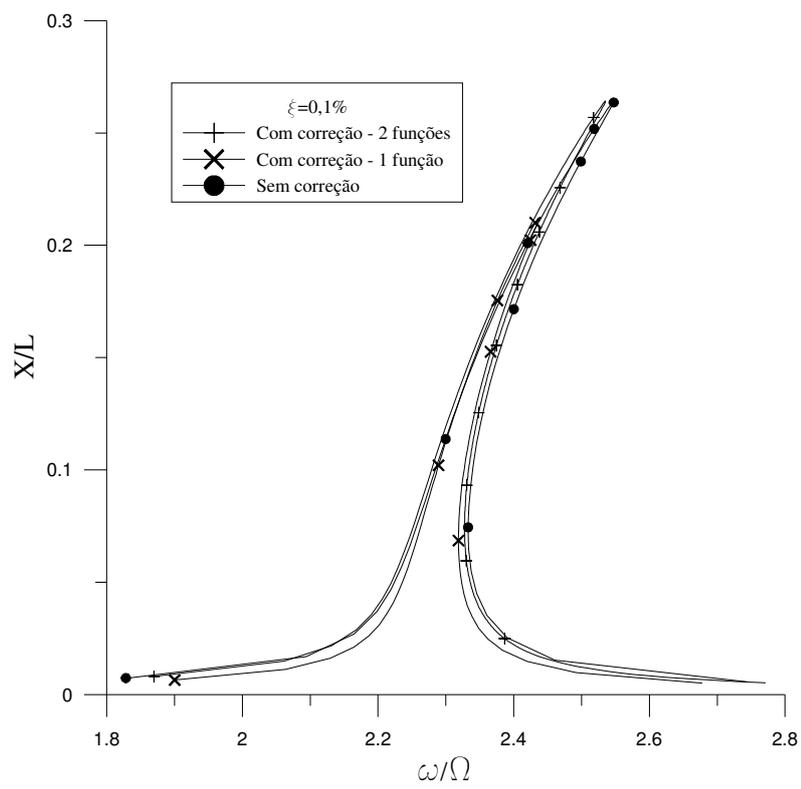


Figura 4-21 Resposta frequência-amplitude para vibração forçada amortecida de viga biengastada utilizando correção não-linear com uma e duas funções