

2 Formulação geral

No estudo do comportamento dinâmico de estruturas um dos objetivos básicos é a determinação do conjunto de posições que as estruturas ocupam no espaço durante um intervalo de tempo. No caso de estruturas contínuas que apresentam, portanto, um número infinito de graus de liberdade, as expressões matemáticas que definem os deslocamentos dinâmicos são chamadas de equações diferenciais parciais de movimento da estrutura, e sua solução fornece este histórico no conjunto espaço-tempo.

De acordo com Clough e Penzien (1975) a formulação das equações de movimento é uma das fases mais importantes no procedimento de análise dinâmico-estrutural e, em muitos casos, a mais difícil. Em geral existem três métodos para a formulação dessas equações: o princípio d'Alembert, o princípio dos deslocamentos virtuais e o princípio de Hamilton. O primeiro é o método mais direto e estabelece o equilíbrio dinâmico das forças atuantes sobre um sistema. Em sistemas complexos, este equilíbrio vetorial dinâmico pode ser inviável e métodos de energia simplificam e viabilizam esta tarefa.

No princípio dos trabalhos virtuais as forças atuantes sobre o sistema são avaliadas explicitamente enquanto que as equações de movimento são derivadas por considerações do trabalho realizado durante a aplicação de deslocamentos virtuais compatíveis. O princípio de Hamilton, por outro lado, é uma formulação alternativa em que os efeitos das forças atuantes sobre o sistema (e não diretamente estas) são levados em conta por meio de variações de energia cinética e potencial.

Essas três metodologias são completamente equivalentes e resultam em equações idênticas para um mesmo sistema elástico. A escolha dentre elas depende em grande parte da natureza do sistema sob consideração (Clough e Penzien, 1975). Face à não-linearidade e às propriedades das estruturas a serem estudadas é utilizado, nesse trabalho, o Princípio de Hamilton e, a partir das

técnicas variacionais, as equações de movimento serão então obtidas, primeiramente para vigas e depois para pórticos.

2.1.

Princípio de Hamilton

Como já mencionado, uma metodologia para se contornar os problemas no estabelecimento de equações de equilíbrio vetoriais é a de se fazer uso de balanço de quantidades de energia, numa formulação variacional. O Princípio de Hamilton prescreve, em linhas gerais, que a variação da energia cinética e potencial mais a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas durante qualquer intervalo de tempo de t_1 a t_2 deve ser nula. Isso matematicamente pode ser expresso por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0, \quad (2-1)$$

onde δ é o símbolo utilizado para representar a variação das quantidades à sua direita, T é a energia cinética, Π a energia potencial total e W_{nc} o trabalho realizado por forças não conservativas.

2.2.

Formulação para vigas

A seguir apresenta-se a formulação para vigas esbeltas (desprezam-se, portanto, as deformações provenientes dos esforços cizalhantes), elásticas, isotrópicas e homogêneas. A formulação aqui utilizada se baseia na formulação Lagrangeana total. Não há restrição dos apoios ao deslocamento das vigas na direção axial. Considera-se também que as deformações axiais são insignificantes quando comparadas às deformações transversais e serão, portanto, desprezadas. Assim, a energia cinética para uma viga de comprimento L e área de seção transversal A é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L w_{,t}^2 dx, \quad (2-2)$$

onde ρ é a massa específica da viga, w o deslocamento transversal e x a coordenada do eixo axial da viga. A energia potencial total é expressa por:

$$\Pi = U + V, \quad (2-3)$$

onde U é a parcela dada pela energia interna de deformação elástica e V o potencial das cargas externas atuantes sobre a estrutura.

Como as deformações axiais são desprezadas, somente se considera a parcela de energia interna devido à flexão da viga. Tem-se desse modo:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \chi^2 dx, \quad (2-4)$$

onde χ é a mudança de curvatura da linha neutra, E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia da seção transversal.

Para obtenção da expressão para a mudança de curvatura, um elemento diferencial da linha neutra da viga é isolado. Este elemento está inicialmente paralelo ao eixo x , na posição x e z , apresentado na Figura 2-1.

Após a flexão da viga, o elemento sofre uma deformação no plano xz e apresenta um comprimento ds e ocupa a posição (x^*, z^*) descrita pelas seguintes relações:

$$x^* = x + u; \quad (2-5)$$

$$z^* = z + w, \quad (2-6)$$

onde u e w são os deslocamentos axiais e transversais respectivamente. Diferenciando-se as equações (2-5) e (2-6) em relação a x , tem-se:

$$\frac{dx^*}{dx} = 1 + \frac{du}{dx}, \quad (2-7)$$

$$\frac{dz^*}{dx} = \frac{dw}{dx} \quad (2-8)$$

Como consequência da hipótese de serem desprezíveis as deformações axiais, tem-se que dx é igual a ds . Da Figura 2-1 retiram-se as seguintes relações geométricas:

$$\text{sen}(\beta_0) = \frac{-dz^*}{ds} = -\frac{dw}{dx} = -w_{,x} \quad (2-9)$$

Logo:

$$\beta_0 = \arcsen(-w_{,x}) \quad (2-10)$$

O ângulo β_0 nessas expressões representa o ângulo entre a linha neutra da viga nas configurações indeformada e deformada. A mudança de curvatura é dada por:

$$\chi = \beta_{0,x} = \left[\arcsen(-w_{,x}) \right]_{,x} = -w_{,xx} (1 - w_{,x}^2)^{-1/2} \quad (2-11)$$

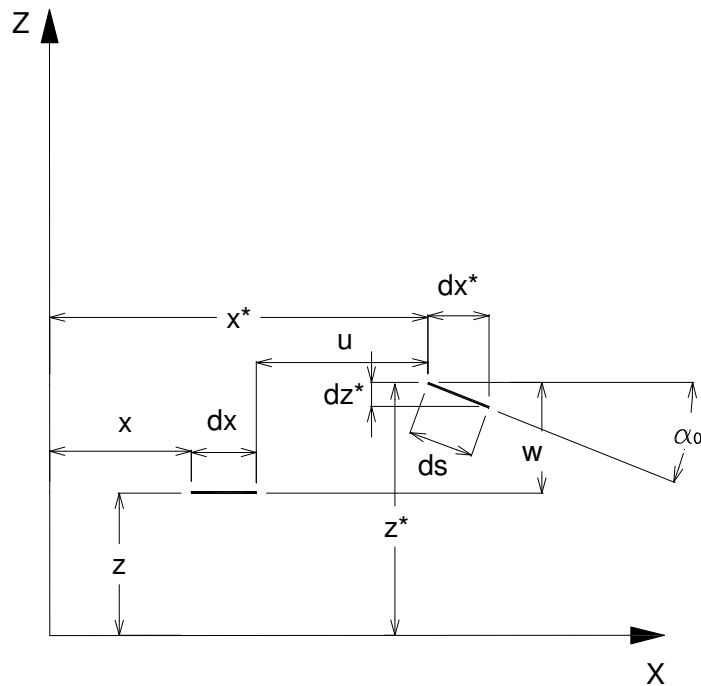


Figura 2-1 Elemento diferencial da viga antes e após a deformação

Considerando-se a última parte da eq. (2-11) como produto de duas funções e expandindo a segunda em série de Taylor até os termos de segunda ordem, chega-se à seguinte expressão para a mudança de curvatura:

$$\chi \cong -w_{,xx} \left(1 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) \quad (2-12)$$

A aproximação obtida pela expressão (2-12) é substituída na eq. (2-4), resultando na seguinte expressão para a energia de deformação interna:

$$U \cong \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) dx \quad (2-13)$$

O uso desta expressão não-linear em alguns trabalhos anteriores (Andrade, 1993; Sampaio, 2004; Serebrenick, 2004) demonstrou que ela é suficientemente precisa para descrever adequadamente o comportamento não-linear de estruturas com grandes deslocamentos.

Os sistemas forçados aqui estudados consideram a ação de uma carga harmônica com a mesma frequência ω do sistema e amplitude X_0 e admitindo-se sua forma como co-senoidal, tem-se:

$$P(t) = X_0 \cos(\omega t) \quad (2-14)$$

O trabalho realizado por esta força pode ser escrito como:

$$W = \int_0^L P(t) w dx \quad (2-15)$$

As equações (2-14) e (2-15) são combinadas e o potencial das cargas externas é descrito do seguinte modo:

$$V = -W = -\int_0^L X_0 \cos(\omega t) w dx \quad (2-16)$$

O amortecimento considerado neste estudo é assumido de tal forma que as forças de amortecimento que surgem sejam proporcionais ao módulo da velocidade, tendo c como constante de proporcionalidade, chamada constante de amortecimento. Este tipo de amortecimento é conhecido como amortecimento viscoso. De acordo com Paz (1997), ainda que algumas características dissipativas dos sistemas reais não sejam capturadas por esse modelo de amortecimento, em muitos casos o mecanismo de dissipação é aproximadamente viscoso. Além disso, esta abordagem leva à uma análise matemática relativamente simples. O trabalho realizado por essa força de amortecimento é dado por:

$$W_{nc} = \frac{1}{2} c \int_0^L w_{,t}^2 dx \quad (2-17)$$

Substituindo-se as expressões (2-2), (2-13), (2-16) e (2-17) na eq. (2-1) chega-se ao Lagrangeano para a viga:

$$L_g = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho A w_{,t}^2 - \frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) + X_0 \cos(\omega t) w + \frac{1}{2} c w_{,t}^2 \right] dx \quad (2-18)$$

O funcional de energia não-linear J para a viga tem a seguinte forma:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L L_g(w, w_{,x}, w_{,xx}, w_{,t}, x, t) dx dt \quad (2-19)$$

Aplicando-se as técnicas variacionais, obtém-se a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L_g}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L_g}{\partial w_{,x}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L_g}{\partial w_{,t}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L_g}{\partial w_{,xx}} = 0 \quad (2-20)$$

Substituindo (2-18) em (2-20) e efetuando as respectivas derivações chega-se à equação de movimento da viga:

$$\rho A w_{,tt} + c w_{,t} + EI w_{,xxxx} + EI \left(w_{,xx}^3 + w_{,x}^2 w_{,xxx} + 4 w_{,x} w_{,xx} w_{,xxx} \right) \quad (2-21)$$

$$\left. + \frac{3}{2} w_{,x}^2 w_{,xx}^3 + \frac{1}{4} w_{,x}^4 w_{,xxxx} + 2 w_{,x}^3 w_{,xx} w_{,xxx} \right) = X_0 \cos(\omega t)$$

A fim de tornar mais fácil a análise do problema e mais eficiente o estudo paramétrico, a eq. (2-21) será adimensionalizada. As variáveis independentes serão alteradas pela inclusão dos seguintes parâmetros:

$$\zeta = \frac{x\pi}{L}, \quad (2-22)$$

$$\tau = \omega t, \quad (2-23)$$

onde ζ é o parâmetro adimensional da coordenada axial x e τ o parâmetro adimensional da coordenada temporal t . O deslocamento transversal é escrito na forma adimensional da seguinte maneira:

$$w^* = \frac{w}{h}, \quad (2-24)$$

onde h é altura da seção transversal da viga. Outro parâmetro inserido é η , definido como :

$$\eta = \left(\frac{\pi h}{L} \right)^2 \quad (2-25)$$

A primeira frequência natural de uma viga biapoiada, Ω e o parâmetro adimensional de frequência, α , são dados por:

$$\Omega = \sqrt{\frac{EI\pi^4}{\rho AL^4}}; \quad (2-26)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} \quad (2-27)$$

Além desses, o parâmetro adimensional de amortecimento β , é definido como:

$$\beta = \frac{2\xi\omega_0}{\Omega}, \quad (2-28)$$

onde ω_0 é a primeira frequência natural do sistema linearizado e ξ é o fator de amortecimento definido por:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}, \quad (2-29)$$

onde c_{cr} é a constante de amortecimento crítico expressa pela seguinte expressão:

$$c_{cr} = 2\rho A\omega_0 \quad (2-30)$$

O último parâmetro inserido é o que se relaciona à amplitude da carga harmônica aplicada, X_0^* :

$$X_0^* = \frac{X_0}{\rho Ah\Omega^2} \quad (2-31)$$

Inserindo-se os parâmetros dados pelas equações de (2-22) a (2-31) na eq.(2-21) e efetuando-se as simplificações necessárias, chega-se à equação de movimento para a viga na sua forma adimensional:

$$\begin{aligned} & \alpha^4 w_{,\tau\tau}^* + \alpha^2 \beta w_{,\tau}^* + w_{,\zeta\zeta\zeta\zeta}^* + \eta \left(w_{,\zeta\zeta}^*{}^3 + w_{,\zeta}^*{}^2 w_{,\zeta\zeta\zeta}^* \right. \\ & \left. + 4w_{,\zeta}^* w_{,\zeta\zeta}^* w_{,\zeta\zeta\zeta}^* \right) + \eta^2 \left(\frac{3}{2} w_{,\zeta}^*{}^2 w_{,\zeta\zeta}^*{}^3 + \frac{1}{4} w_{,\zeta}^*{}^4 w_{,\zeta\zeta\zeta\zeta}^* \right. \\ & \left. + 2w_{,\zeta}^*{}^3 w_{,\zeta\zeta}^* w_{,\zeta\zeta\zeta}^* \right) = X_0^* \cos(\tau) \end{aligned} \quad (2-32)$$

2.3. Formulação para pórticos

Considera-se neste trabalho pórticos planos, elásticos, isotrópicos e homogêneos sujeitos a vibrações de grande amplitude. As alterações mais relevantes na derivação das equações de movimento para pórticos em relação à formulação obtida para vigas resultam da inclusão das deformações axiais para barras de pórticos. Esta inclusão somada à não-linearidade do problema faz surgir os acoplamentos entre deslocamentos transversais e axiais, o que leva a um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares. A derivação da equação diferencial de movimento para cada barra de pórtico pode ser obtida a partir de uma formulação para viga-coluna, como o da Figura 2-2.

A energia cinética de um elemento de uma viga-coluna de comprimento L é expressa por:

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(u_{,t}^2 + w_{,t}^2 \right) dx \quad (2-33)$$

A energia de deformação interna é formada pela contribuição devida à flexão e à deformação axial dos elementos, sendo matematicamente expressa por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EA\varepsilon^2 + EI\chi^2 \right) dx \quad (2-34)$$

onde ε é a deformação axial e χ a mudança de curvatura da viga-coluna. As relações cinemáticas para estas quantidades podem ser determinadas

geometricamente com ajuda mais uma vez da Figura 2-1. Do triângulo retângulo formado pelos lados ds , dx^* e dz^* e pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$ds^2 = dx^{*2} + dz^{*2} \quad (2-35)$$

Dividindo-se a eq. (2-35) por dx^2 e usando as expressões (2-7) e (2-8), chega-se a:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + 2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 1 + 2u_{,x} + u^2_{,x} + w^2_{,x} \quad (2-36)$$

Sendo a deformação axial expressa por:

$$\varepsilon = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{ds}{dx} - 1 \quad (2-37)$$

Pode-se escrever:

$$\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1\right] \quad (2-38)$$

Como os problemas aqui estudados se limitam àqueles submetidos somente à pequenas deformações, de (2-36) tem-se:

$$\varepsilon \cong \frac{1}{2}\left[\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1\right] = u_{,x} + \frac{1}{2}(u^2_{,x} + w^2_{,x}) \quad (2-39)$$

A relação cinemática para a mudança de curvatura pode ser obtida de forma equivalente à eq. (2-9) para vigas, ou seja:

$$\tan(\beta_0) = \frac{-dz^*}{dx^*} = \frac{-dz^*}{dx} \frac{dx}{dx^*} \quad (2-40)$$

Utilizando-se as equações (2-7) e (2-8), obtém-se:

$$\tan(\beta_0) = -\frac{w_{,x}}{1 + u_{,x}} \quad (2-41)$$

Logo:

$$\chi = (\beta_0)_{,x} = \left[\arctan\left(-\frac{w_{,x}}{1 + u_{,x}}\right) \right]_{,x} \quad (2-42)$$

Após a derivação, tem-se:

$$\chi = -\left[w_{,xx}(1 + u_{,x}) - w_{,x}u_{,xx} \right] \left[(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2 \right]^{-1} \quad (2-43)$$

Considerando-se o lado direito da eq. (2-43) como produto de duas funções e expandido-se a segunda em série de Taylor até termos de segunda ordem, tem-se para a curvatura a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \chi \cong & -w_{,xx} \left(1 + u_{,x} + u_{,x}^2 - w_{,x}^2 - u_{,x} w_{,x}^2 + 3u_{,x}^3 \right) \\ & - u_{,xx} \left(-w_{,x} + 2w_{,x} u_{,x} - w_{,x}^3 - 3w_{,x} u_{,x}^2 \right) \end{aligned} \quad (2-44)$$

A substituição das relações (2-39) e (2-44) na eq. (2-34) resulta na expressão da energia de deformação interna para uma viga-coluna.

Na avaliação do potencial das cargas externas deve-se acrescentar ao trabalho realizado pela força harmônica, dado pela eq. (2-15), o trabalho realizado por uma carga estática axial P de compressão sobre o encurtamento Δ da viga-coluna, resultando em:

$$W = \int_0^L P(t) w dx + P\Delta \quad (2-45)$$

Um elemento típico de viga-coluna sob ação dessas forças pode ser visto na Figura 2-2. Tem-se então que o encurtamento Δ é expresso por:

$$\Delta = \int_0^L \varepsilon dx \quad (2-46)$$

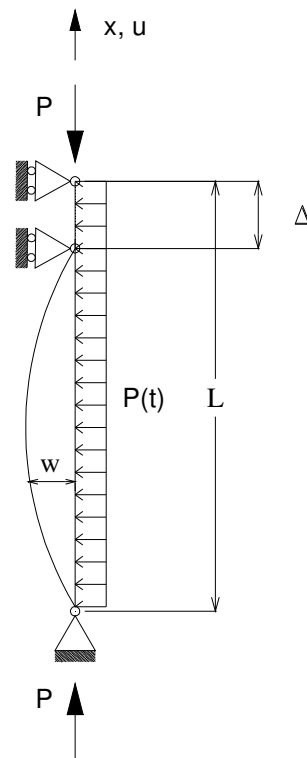


Figura 2-2 Elemento de viga-coluna sob ação de carregamento axial e transversal

Logo, das equações (2-14),(2-39), (2-45) e (2-46), escreve-se o potencial das cargas externas V como:

$$V = -W = -\int_0^L \left\{ X_0 \cos(\omega t) w + P \left[u_{,x} + \frac{1}{2} (u^2_{,x} + w^2_{,x}) \right] \right\} dx \quad (2-47)$$

O trabalho realizado pela força de amortecimento viscoso é agora dado por:

$$W_{nc} = \frac{1}{2} c \int_0^L (u_{,t}^2 + w_{,t}^2) dx \quad (2-48)$$

Substituindo-se as expressões (2-33), (2-34), (2-47) e (2-48) na eq. (2-1) chega-se a:

$$\begin{aligned} L_g = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \rho A (u_{,t}^2 + w_{,t}^2) - \frac{1}{2} EA \left[u_{,x} + \frac{1}{2} (u^2_{,x} + w^2_{,x}) \right]^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} EI \left[-w_{,xx} \left(1 + u_{,x} + u_{,x}^2 - w_{,x}^2 - u_{,x} w_{,x}^2 + 3u_{,x}^3 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - u_{,xx} \left(-w_{,x} + 2w_{,x} u_{,x} - w_{,x}^3 - 3w_{,x} u_{,x}^2 \right) \right]^2 + P \left[u_{,x} + \frac{1}{2} (u^2_{,x} + w^2_{,x}) \right] \right. \\ \left. + X_0 \cos(\omega t) w + \frac{1}{2} c (u_{,t}^2 + w_{,t}^2) \right\} dx \end{aligned} \quad (2-49)$$

Tem-se assim para uma viga-coluna um funcional de energia não linear do tipo:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L L_g(u, u_{,x}, u_{,xx}, w, w_{,x}, w_{,xx}, u_{,t}, w_{,t}, x, t) dx dt \quad (2-50)$$

Aplicando-se as técnicas variacionais, obtêm-se as seguintes equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L_g}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L_g}{\partial u_{,x}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L_g}{\partial u_{,t}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L_g}{\partial u_{,xx}} = 0; \quad (2-51)$$

$$\frac{\partial L_g}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L_g}{\partial w_{,x}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L_g}{\partial w_{,t}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L_g}{\partial w_{,xx}} = 0 \quad (2-52)$$

Já que o desenvolvimento dessas equações contém muitos termos, uma forma de apresentá-las, de modo a facilitar sua visualização, é separar os seus termos de acordo com a ordem de não-linearidade. Para tal far-se-á uso dos símbolos $T_{i,j}$ para estes termos onde i faz referência à equação, assim $i=1$ se refere à eq. (2-51) e $i=2$ refere-se à eq. (2-52). O índice j refere-se à ordem da não-linearidade dos termos, assim $j=0$ se refere aos termos constantes, $j=1$ aos termos

lineares, $j=2$ aos termos com não-linearidade quadrática e assim por diante. Desse modo são reescritas as equações (2-51) e (2-52) na forma:

$$T_{1,1} + T_{1,2} + T_{1,3} + T_{1,4} + T_{1,5} + T_{1,6} + T_{1,7} = T_{1,0}; \quad (2-53)$$

$$T_{2,1} + T_{2,2} + T_{2,3} + T_{2,4} + T_{2,5} + T_{2,6} + T_{2,7} = T_{2,0}, \quad (2-54)$$

onde os Termos $T_{i,j}$ são apresentados por conveniência no Apêndice A.

Para a obtenção da forma adimensional das equações (2-53) e (2-54) serão utilizados os mesmos parâmetros do procedimento de adimensionalização de vigas descritos pelas expressões (2-22) a (2-31), com a exceção do parâmetro η , que agora será descrito por:

$$\eta = \frac{\pi h}{L}, \quad (2-55)$$

e pela inserção de novos parâmetros como λ definido como:

$$\lambda = \frac{P}{P_{cr}}, \quad (2-56)$$

onde:

$$P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2}, \quad (2-57)$$

é a carga crítica de uma coluna biapoçada com as mesmas propriedades geométricas e de material que a viga-coluna. Um outro parâmetro adimensional utilizado é:

$$\kappa = \frac{L^2}{r^2\pi^2}, \quad (2-58)$$

onde r é o raio de giração da seção transversal expresso por:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2-59)$$

Define-se P^* como a razão entre a rigidez axial do pórtico e P_{cr} .

$$P^* = \frac{EA}{P_{cr}} \quad (2-60)$$

Além disso, o deslocamento axial adimensional, u^* é:

$$u^* = \frac{u}{h} \quad (2-61)$$

Após a inserção destes parâmetros nos termos das equações (2-53) e (2-54) chega-se à sua forma adimensional:

$$T_{1,1}^* + \eta T_{1,2}^* + \eta^2 T_{1,3}^* + \eta^3 T_{1,4}^* + \eta^4 T_{1,5}^* + \eta^5 T_{1,6}^* + \eta^6 T_{1,7}^* = T_{1,0}^*; \quad (2-62)$$

$$T_{2,1}^* + \eta T_{2,2}^* + \eta^2 T_{2,3}^* + \eta^3 T_{2,4}^* + \eta^4 T_{2,5}^* + \eta^5 T_{2,6}^* + \eta^6 T_{2,7}^* = T_{2,0}^*, \quad (2-63)$$

onde os termos T_{ij}^* são os equivalentes adimensionais dos termos T_{ij} e são também apresentados no Apêndice A.