5
Referências bibliográficas

BRAÜNER, T. A Cut-Free Gentzen Formulation of Modal Logic S5. **The Logic Journal of the IGPL**, vol.8, No.5,p.629-643, 2000.

BRAÜNER, T. and DE PAIVA, V. Cut-Elimination for Full Intuitionistic Linear Logic. Dinamarca: BRICS Report Series, RS-96-10,1996.

MEDEIROS, M.P.N. Investigações acerca de uma versão modal para a lógica intermediária dos domínios constanes. **Principios**, 8(10), 2001.

DE PAIVA, V.; PEREIRA,L.C. A new proof system for intuitionistic logic. **The Bulletin of Symbolic Logic**.1(1), p.101, 1995

DE PAIVA,V.; PEREIRA,L.C.. A Short Note on Intuitionistic Propositional Logic with Multiple Conclusions. **Manuscrito**. Campinas, v.28,n.2, jul.-dez.2005.

DOSEN, K.; SCHRÖDER-HEISTER, P. **Subestructural Logic**. Oxford: Clarendon Press, 1993.

DRAGALIN, A.G. **Mathematical Intuitionism: Introduction to proof theory**. Rhode Island: American Mathematical Society, 1988.

DUMMETT, M. **Elements of intuitionism**. Oxford: Clarendon Press, 1977.

DYCKHOFF, R. Contraction-Free Sequent Calculi for Intuitionistic Lógic. **The Journal of Symbolic Logics** 57, p.795-807, 1992.

DYCKHOFF, R. Dragalin's proof's of cut-admissibility for the intuitionistic sequent calculi G3i and G3i'. Research Report CS/97/8, Computer Science Division, St. Andrews University.

FRANKLIN, L. **Sistemas com múltiplas conclusões para a lógica proposicional intuicionista**. Dissertação (Mestrado em Filosofia). Pontificia Universidade Católica de Rio de Janeiro, 2000.

GENTZEN, G. **The collected papers of Gerhard Gentzen**. SZABO, M.E. (Ed.). Amsterdam: North-Holland, 1969.

HYLAND, M.; DE PAIVA, V. Full Intuitionistic Linear Logic.(Extended abstract). **Annals of Pure and Applied Logic**, vol. 64(3), 1993, p. 273-291.

KASHIMA, R. Cut-Elimination Theorem for the Intermediate Logic CD. Tokyo Institute of Technology. Research Report No. C-100, 1991.

Kashima,R.; SHIMURA,T. Cut-Elimination Theorem for the Logic of Constant Domains. **Mathematical Logical Quarterly** 40, 1994, p.153-172.

KLEENE, S.C. **Introducción a la metamatemática**. Madrid: Tecnos, 1974.

KLEENE, S.C. Permutability of Inferences in Gentzen's Calculi LK and LJ.

LOPEZ-ESCOBAR, K. A second paper "on the interpolation theorem for the logic of constant domains". **JSL** 48, 1983, pp.595-599.

LOPEZ-ESCOBAR, K. On the interpolation theorem for the logic of constant domains. **JSL** 46, 1981, pp.87-88.

MAEHARA, S. Eine Darstellung der intuitionistischen Logik in der klassischen. **Nagoya Mathematical Journal**, 7, p.45-64, 1954.

MATES, B. **Lógica elementar**.São Paulo: Companía Editora Nacional/Editora da Universidade de São Paulo, 1968.

PALLARES, M.F. Extending the First Gentzen´s Consistency Proof to the Intuitionistic Case. **The Logic Journal of the IGPL**, Vol. 12, No.6, p.549-560.

PEREIRA, L.C. Uma Breve Nota sobre o Condicional e Múltiplas Conclusões. In: **Lógica e ontología. Ensaios em homenagem a Balthasar Barbosa Filho.**EVORA, F. et al.(Eds). São Paulo: Discuros Editorial, 2004.

PRAWITZ, D. **Natural Deduction. A Proof Theoretical Study.** Estocolmo: Almqvist and Wiksell, 1965.

SCARPELLINI, B. Some Aplications of Gentzen's second consistency proof. **Mathematische Annalen**. Berlin, Springer, vol.181, No. 4, Dec. 1969.

SCHELLINX, H. Some Syntactical Observations on Linear Logic. **J.Logic Computation** 1(4), p. 537-559, 1991.

TAKEUTI, G. **Proof Theory**. Amsterdam: North-Holland, 1975.

TROELSTRA, A.S. Metamatical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. **Lecture Notes in Mathematics**, 344. Springer-Verlag, 1973.

TROELSTRA, A.S.; SCHWICHTENBERG. **Basic Proof Theory**. Cambridge University Press, 1996.

UMEZAWA, T. On intermediate propositional logics. **JSL**, vol.24, núm.1, Março 1959.

UMEZAWA, T. On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic. **JSL**, vol. 24, núm. 2, June 1959.

VON PLATO, J. **Structural Proof Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

6
Apêndice

Figura 1.

Sistema LK. G.Gentzen. 1935.

Seqüente inicial

$$A \Rightarrow A$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta' \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta}\,(Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(E_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Delta'}\,(E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,(W_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(W_R)$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,(C_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(C_R)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow \Delta}\,(\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\,(\vee_R^1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\,(\vee_R^2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\,(\wedge_L^1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\,(\wedge_L^2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B), \Delta}\,(\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', (A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(\rightarrow_L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B), \Delta}\,(\rightarrow_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow, \Delta}\,(\neg_L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\,(\neg_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A(x) \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow, \Delta, \forall x A(x)}\,(\forall_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow, \Delta}\,(\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x (A(x)}\,(\exists_R)$$

(A variável a não ocorre no seqüente inferior de $(\exists_L)$ e $(\forall_R)$)

Figura 2.

Sistema LJ. G.Gentzen.1935.

Seqüente inicial

$$A \Rightarrow A$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow B}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B}\,(Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow B}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow B}\,(E_L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma, A \Rightarrow B}\,(W_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(W_R)$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \Rightarrow B}\,(C_L)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C \qquad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow C}\,(\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B)}\,(\vee_R^1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B)}\,(\vee_R^2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow C}\,(\wedge_L^1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow C}\,(\wedge_L^2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B)}\,(\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma', B \Rightarrow C}{\Gamma, \Gamma', (A \rightarrow B) \Rightarrow C}\,(\rightarrow_L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)}\,(\rightarrow_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow}\,(\neg_L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}\,(\neg_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A(x) \Gamma \Rightarrow C}\,(\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)}\,(\forall_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow C}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow C}\,(\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \exists x(A(x)}\,(\exists_R)$$

(A variável a não ocorre no seqüente inferior de $(\exists_L)$ e $(\forall_R)$)

Figura 3.

Sistema LJ’. S.Maehara. 1954.

Seqüente inicial

$$A \Rightarrow A$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta' \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta}\,(Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(E_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Delta}\,(E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,(W_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(W_R)$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,(C_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(C_R)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow \Delta}\,(\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\,(\vee_R^1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B),}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\,(\wedge_L^1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\,(\wedge_L^2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B), \Delta}\,(\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', (A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(\rightarrow_L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)}\,(\rightarrow_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\neg_L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A}\,(\neg_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A(x) \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)}\,(\forall_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\exists_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x(A(x)}\,(\exists_R)$$

(A variável a não ocorre no seqüente inferior
de $(\exists_L)$ e $(\forall_R)$)

Figura 4.

Sistema IL. H. Schellinx. 1991.

Seqüentes iniciais

$$A \Rightarrow A \qquad \Gamma, \perp \Rightarrow A$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow B}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B}\,(Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow C}\,(E_L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma, A \Rightarrow B}\,(E_L)$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \Rightarrow B}\,(C_L)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C \qquad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow C}\,(\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B)}\,(\vee_R^1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B)}\,(\vee_R^2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow C}\,(\wedge_L^1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow C}\,(\wedge_L^2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, C \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B)}\,(\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, (A \rightarrow B) \Rightarrow C}\,(\rightarrow_L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)}\,(\rightarrow_R)$$

$$\frac{A(t), \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A(x) \Gamma \Rightarrow C}\,(\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)}\,(\forall_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow C}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow C}\,(\exists_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x (A(x)}\,(\exists_R)$$

(A variável a não ocorre no seqüente inferior de $(\exists_L)$ e $(\forall_R)$)

Figura 5.

Sistema $IL^{>}$. H. Schellinx. 1991.

Seqüentes iniciais

$$A \Rightarrow A \qquad \Gamma, \perp \Rightarrow \Delta$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta' \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta}\ (Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\ (E_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B, A, \Delta}\ (E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\ (E_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\ (E_R)$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\ (C_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\ (C_R)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow \Delta}\ (\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\ (\vee_R^1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\ (\vee_R^2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\ (\wedge_L^1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\ (\wedge_L^2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B), \Delta}\ (\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta}\ (\rightarrow_L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)}\ (\rightarrow_R)$$

$$\frac{A(t), \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A(x) \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)}\ (\forall_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\exists_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x (A(x)}\ (\exists_R)$$

(A variável a não ocorre no seqüente inferior de $(\exists_L)$ e $(\forall_R)$)

Figura 6.

Sistemas G_1. S.C.Kleene. 1952.

Seqüente inicial

$$A \Rightarrow A$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta' \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta', \Delta}\ (Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\ (E_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Delta'}\ (E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\ (W_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\ (W_R)^{(*)}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\ (C_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\ (C_R)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow \Delta}\ (\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\ (\vee_R^1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\ (\vee_R^2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\ (\wedge_L^1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\ (\wedge_L^2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B), \Delta}\ (\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', (A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (\rightarrow_L) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B)}\ (\rightarrow_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow, \Delta}\ (\neg_L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\neg_R)^{(*)}$$

(*) onde $\Delta = \varnothing$ no caso intuicionista.

Figura 7.

Sistemas G_2. S.C.Kleene. 1952.

Seqüente inicial

$$A \Rightarrow A$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma \Rightarrow \Omega}{\Gamma, \Sigma_A \Rightarrow \Delta_A, \Omega}\,(Mix)^{(*)}$$

(*) onde A é uma fórmula em Σ e Δ
cujas ocorrencias são todas suprimidas em Σ_A e Δ_A.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(E_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B, A, \Delta}\,(E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,(W_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(W_R)^{(*)}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,(C_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,(C_R)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow \Delta}\,(\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\,(\vee_R^1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\,(\vee_R^2)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\,(\wedge_L^1) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}\,(\wedge_L^2) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B), \Delta}\,(\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta^\circ \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta}\,(\rightarrow_L^{(**)}) \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)}\,(\rightarrow_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow, \Delta}\,(\neg_L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\,(\neg_R^{(*)})$$

(*) onde $\Delta = \varnothing$ no caso intuicionista.

(**) onde $\Delta^o = \varnothing$ no caso intuicionista.

Figura 8.

Sistemas G_3 S.C.Kleene. 1952.

Seqüente inicial

$$A, \Gamma \Rightarrow A$$

Regras operacionais

$$\frac{A, (A \vee B), \Gamma \Rightarrow \Delta \quad e \quad B, (A \vee B), \Gamma \Rightarrow \Delta}{(A \vee B), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad ou \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B)} (\vee_R)$$

$$\frac{A, (A \wedge B), \Gamma \Rightarrow \Delta \quad ou \quad B, (A \wedge B), \Gamma \Rightarrow}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta} (\wedge_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad e \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B)} (\wedge_R)$$

$$\frac{(A \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow A \quad e \quad B, (A \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow \Delta}{(A \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\rightarrow_L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma, (A \rightarrow B)} (\rightarrow_R)$$

$$\frac{\neg A, \Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} (\neg_L)^* \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg A} (\neg_R)$$

onde Δ tem no máximo uma fórmula.

Figura 9.

Sistema GHPC. A.G.Dragalin. 1979.

(Γ e Δ são multiconjuntos)

Seqüentes iniciais

$$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

$$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$$

(onde A é fórmula atômica)

Regras operacionais

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{(A \vee B), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)} (\vee_R)$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{(A \wedge B), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\wedge_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B)} (\wedge_R)$$

$$\frac{(A \to B), \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{(A \to B), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\to_L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \to B)} (\to_R)$$

$$\frac{A(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A(x) \Gamma \Rightarrow \Delta} (\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)} (\forall_R)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} (\exists_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x (A(x)} (\exists_R)$$

(A variável a não ocorre no seqüente inferior de $(\exists_L)$ e $(\forall_R)$)

Figura 10.

Sistema LJ^D e LJT. R. Dyckhoff.

Seqüentes iniciais

$$\bot, \Gamma \Rightarrow G \qquad A, \Gamma \Rightarrow A$$

Regras operacionais

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow G \quad B, \Gamma \Rightarrow G}{(A \vee B), \Gamma \Rightarrow G}(\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B)}(\vee_R) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B)}(\vee_R)$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow G}{(A \wedge B), \Gamma \Rightarrow G}(\wedge_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B)}(\wedge_R)$$

$$\frac{(A \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow G}{(A \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow G}(\rightarrow_L) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)}(\rightarrow_R)$$

Variações para LJT

$$\frac{B, A, \Gamma \Rightarrow G}{(A \rightarrow B), A, \Gamma \Rightarrow G}(\rightarrow_L^1)$$

(onde A é fórmula atômica)

$$\frac{C \rightarrow (D \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow G}{((C \wedge D) \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow G}(\rightarrow_L^2)$$

$$\frac{(C \rightarrow B), (D \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow G}{((C \vee D) \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow G}(\rightarrow_L^3)$$

$$\frac{(D \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow (C \rightarrow D) \quad B, \Gamma \rightarrow G}{((C \rightarrow D) \rightarrow B), \Gamma \Rightarrow G}(\rightarrow_L^4)$$

Figura 11.

Sistema FILL. T.Braüner e V.de Paiva. (1996)

Definição de Dep_{π}(A) para multiplicativos.

Γ, Δ e Δ' são conjuntos de fórmulas e o conjunto $\Gamma[\Delta \rightarrowtail \Delta']$ é definido da seguinte maneira:

$$\Gamma[\Delta \rightarrowtail \Delta'] = \begin{cases} \Gamma - \Delta) \cup \Delta\text{'}, & \text{se } \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset; \\ \Gamma & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

$$\frac{}{A \Rightarrow A}(Ax) \qquad Dep_\pi(\mathrm{A}) = \mathrm{A}.$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta \quad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}(corte) \quad Dep_\pi(\mathrm{A}) = \begin{cases} \mathrm{Dep}_{\pi 1}(\mathrm{A}), & \text{se A} \in \Delta; \\ \mathrm{Dep}_{\pi 2}(\mathrm{A})[\{\mathrm{B}\} \rightarrowtail Dep_{\pi 1}(\mathrm{B})], & \text{se } A \in \Delta'. \end{cases}$$

$$\frac{\Gamma, B, C, \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B \otimes C \Rightarrow \Delta}(\otimes_L) \qquad Dep_\pi(\mathrm{A}) = Dep_{\pi 1}(\mathrm{A})[\{B, C\} \rightarrowtail \{B \otimes C\}]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta \quad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B \otimes C, \Delta, \Delta'}(\otimes_R) \qquad Dep_\pi(A) = \begin{cases} \mathrm{Dep}_{\pi 1}(\mathrm{A}), & \text{se A} \in \Delta; \\ \mathrm{Dep}_{\pi 2}(\mathrm{A}), & \text{se } A \in \Delta'. \\ \mathrm{Dep}_{\pi 1}(\mathrm{B}) \cup Dep_{\pi 2}(C), & \text{se A} = \mathrm{B} \otimes \mathrm{C}. \end{cases}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, I \Rightarrow \Delta}(I_L) \qquad Dep_\pi(\mathrm{A}) = Dep_{\pi 1}(\mathrm{A})$$

$$\frac{}{\Rightarrow I}(I_R) \qquad Dep_\pi(\mathrm{I}) = \emptyset$$

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \quad \Gamma', C \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' B \Box C \Rightarrow \Delta, \Delta'}(\Box_L) \qquad Dep_\pi(\mathrm{A}) = \begin{cases} \mathrm{Dep}_{\pi 1}(\mathrm{A})[\{\mathrm{B}\} \rightarrowtail \{B \Box C\}], & \text{se A} \in \Delta; \\ \mathrm{Dep}_{\pi 2}(\mathrm{A})[\{\mathrm{C}\} \rightarrowtail Dep_{\pi 1}(B)], & \text{se } A \in \Delta'. \end{cases}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B, C, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B \Box C, \Delta}(\Box_R) \qquad Dep_\pi(A) = \begin{cases} \mathrm{Dep}_{\pi 1}(A), & \text{se A} \in \Delta; \\ \mathrm{Dep}_{\pi 1}(B) \cup Dep_{\pi 1}(C), & \text{se } A = B \Box C. \end{cases}$$

$$\frac{}{\bot \Rightarrow}(\bot_L) \qquad \text{Nada a definir.}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \bot, \Delta}(\bot_R) \qquad Dep_\pi(A) = \begin{cases} \mathrm{Dep}_{\pi 1}(A), & \text{se A} \in \Delta; \\ \emptyset & \text{se } A = \bot \end{cases}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta \;\; \Gamma', C \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' B \multimap C \Rightarrow \Delta, \Delta'}(\multimap_L) \qquad Dep_\pi(A) = \begin{cases} \mathrm{Dep}_{\pi 2}(A)[\{C\} \rightarrowtail \{B \multimap C\} \cup Dep_{\pi 1}(B)], \\ se A \in \Delta' \\ \mathrm{Dep}_{\pi 1}(A), \text{se } A \in \Delta. \end{cases}$$

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow C, \Delta}{\Gamma \Rightarrow B \multimap C, \Delta}(\multimap_R) \qquad Dep_\pi(A) = \begin{cases} \mathrm{Dep}_{\pi 1}(A)[\{B\} \rightarrowtail \emptyset], \text{ se A} \in \Delta'. \\ \mathrm{Dep}_{\pi 1}(C)[\{B\} \rightarrowtail \emptyset], \text{ se A} = B \multimap C. \end{cases}$$

Figura 12.

Sistema FILL. T.Braüner e V.de Paiva. (1996)

Definição de $Dep_\pi(A)$ para modalidades.

$$\frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !B \Rightarrow \Delta}\,(1_L) \qquad Dep_\pi(A) = Dep_{\pi 1}(A)[\{B\} \rightarrowtail \{!B\}]$$

$$\frac{!\Gamma \Rightarrow B, ?\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !B, ?\Delta}\,(!_R) \qquad Dep_\pi(A) = \begin{cases} Dep_{\pi 1}(A), & \text{se A} \in ?\Delta; \\ \text{Dep}_{\pi 1}(B), & \text{se } A = !B. \end{cases}$$

$$\frac{!\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{!\Gamma, ?B \Rightarrow ?\Delta}\,(?_L) \qquad Dep_\pi(A) = Dep_{\pi 1}(A)[\{B\} \rightarrowtail \{?B\}]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?B, \Delta}\,(?_R) \qquad Dep_\pi(A) = \begin{cases} Dep_{\pi 1}(A), & \text{se A} \in \Delta; \\ \text{Dep}_{\pi 1}(B), & \text{se } A = ?B. \end{cases}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !B \Rightarrow \Delta}\,(W_L) \qquad Dep_\pi(A) = Dep_{\pi 1}(A)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?B, \Delta}\,(W_R) \qquad Dep_\pi(A) = \begin{cases} Dep_{\pi 1}(A), & \text{se A} \in \Delta; \\ \emptyset, & \text{se } A = ?B. \end{cases}$$

$$\frac{\Gamma, !B', !B'' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !B \Rightarrow \Delta}\,(C_L) \qquad Dep_\pi(A) = Dep_{\pi 1}(A)[\{!B', !B''\} \rightarrowtail \{!B\}]$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow ?B', ?B'', \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?B, \Delta}\,(C_R) \quad Dep_\pi(A) = \begin{cases} Dep_{\pi 1}(A), & \text{se A} \in \Delta; \\ \text{Dep}_{\pi 1}(?B') \cup Dep_{\pi 1}(?B''), & \text{se } A = ?B. \end{cases}$$

Figura 13.

Sistema FIL. De Paiva e Pereira.1995.

Axiomas

$$\frac{}{A(n) \Rightarrow A/\{n\}}$$

$$\frac{}{\perp(n) \Rightarrow A_1/\{n\}, ..., A_k/\{n\}} (\perp_L)$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta \quad A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|S]} (Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m), \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B(m), A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta} (E_L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta A/S, B/S', \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta B/S', A/S, \Delta'} (E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A(n), \Gamma \Rightarrow \Delta^\circ} (W_L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/\{\}} (W_R)$$

$$\frac{\Gamma, A(n), A(m) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A(min(n,m)) \Rightarrow \Delta[max(n,m)\{k\}]} (C_L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, A/S'}{\Gamma \Rightarrow \Delta A/S \cup S'} (C_R)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma', B(m) \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma'(A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta[n|\{k\}], \Delta'[m|\{k\}]} (\vee_L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, A/S'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)/(S \cup S')} (\vee_R)$$

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B)(min(n,m)) \Rightarrow \Delta[max(n,m)|\{k\}]} (\wedge_L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B/S'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta', (A \wedge B)/S \cup S'} (\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta A/S \quad B(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{(A \rightarrow B)(n)\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n, S]} (\rightarrow_L) \quad \frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta, B/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B)/S - \{n\}} (\rightarrow_R)$$

1. As regras com duas premissas não têm subíndices em comúm.
2. Em (W_L), n é um índice novo e$\Delta^\circ = \Delta$ ou é o resultado de introduzir n em algum conjunto S em Δ.
3. $\Delta[n, \{k\}]$ é o resultado de agregar aos conjuntos de Δ que tem o índice n o índice k.
4. $\Delta[n|\{k\}]$ é o resultado de substituir, nos conjuntos que tem índice n, n por k.
5. Em $(\rightarrow_R)$, n é um índice que pode ou não pertencer a S, mas não pode ocorrer em nenhum conjunto de dependência Δ.

Figura 14.

Sistema CLD. R.Kashima e T.Shimura.1994.

Axiomas

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \qquad \frac{}{\perp \Rightarrow A}$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A^1 \quad A^1, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Corte)$$

Onde:

(i)As conexões entre Γ e Δ e entre Γ' e Δ' são herdadas.

(ii)$\Gamma' \nsim \Delta$ na conclusão.

(iii) Para todo γ em Γ e δ' em Δ': $\gamma \sim \delta'$ na conclusão sss $\gamma \sim A^1$ na premisa esquerda e $A^1 \sim \delta'$ na premisa direita.

$$\frac{\Gamma, A^1, B^2, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B^2, A^1, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(E_L)$$

Onde:

(i)As conexões entre (Γ, Γ') e Δ são herdadas.

(ii) Para toda δ em Δ: $A^1 \sim \delta$ na conclusão sss o está na premissa;

$B^2 \sim \delta$ na conclusão se o está na premissa.

Simétrico para (E_R).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A^1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(W_L)$$

Onde:

(i) As conexões estão herdadas.

(ii)$A^1 \sim \Delta$ na conclusão.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A^1}\,(W_R)$$

Onde:

(i)As conexões entre Γ e Δ são herdadas.

(ii) $A^1 \sim \Gamma$ na conclusão.

$$\frac{A^1, A^2, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A^3 \Rightarrow \Delta} \, (C_L)$$

Onde:
(i) As conecões entre Γ e Δ são herdadas.
(ii) Para toda δ em Δ: $A^3 \sim \delta$ na conclusão sss $A^1 \sim \delta ou A^2 \sim \delta$ na premissa.

Simétrico para (C_L).

Regras operacionais

$$\frac{A^1, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B)^1 \Rightarrow \Delta} \, (\wedge_L)$$

Onde:
(i) As conecões entre Γ e Δ são herdadas.
(ii) $(A \wedge B)^1 \sim \delta$ na conclusão sss $A^1 \sim \delta$ na premissa.

Similar para premissa com fórmula B.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A^1 \qquad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B^1}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'(A \wedge B)^1} \, (\wedge_R).$$

Onde:
(i) As conecões entre Γ e Δ e entre Γ' e Δ' são herdadas.
(ii) $\Gamma \nsim \Gamma'$ e $\Delta \nsim \Delta'$ na conclusão.
(iii) Para todo γ em Γ e todo δ em Δ: $\delta \sim (A \wedge B)^1$ na conclusão sss $\gamma \sim A^1$ na premissa e $\gamma' \sim (A \wedge B)^1$ sss $\gamma' \sim B^1$ na premissa.

$(\vee_L)$, $(\vee_R)$ são simétricas a $(\wedge_R)$ e $(\wedge_L)$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A^1 \qquad B^1, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{(A \rightarrow B)^1 \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \, (\rightarrow_L)$$

Onde:
(i) As conecões entre Γ e Δ e entre Γ' e Δ' são herdadas.
(ii) $\Gamma' \nsim \Delta$ e $(A \rightarrow B)^1 \sim \delta'$ na conclusão.
(iii) Para todo γ em Γ e toda γ'em Γ': $(A \rightarrow B)^1 \sim \delta'$ na conclusão sss $B^1 \sim \delta'$ na premissa; $\delta \sim \delta'$ na conclusão sss $\delta \sim A^1$ e $B^1 \sim \delta'$ nas premissas.

$$\frac{A^1, \Gamma \Rightarrow \Delta, B^2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B)^3} \ (\rightarrow_R)$$

Onde para toda γ em Γ e toda δ em Δ:

(i) $A^1 \nsim \delta$ na conclusão.

(ii) $\gamma \sim \delta$ na conclusão sss $\gamma \sim \delta$ na premissa.

(iii) $\gamma \sim (A \rightarrow B)^3$ na conclusão sss $\gamma \sim B^2$ na premissa.

$$\frac{A(t)^1, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A(x)^1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (\forall_L)$$

Onde todas as conecões são herdadas.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)^1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)^1} \ (\forall_R)$$

Onde:

(i) A variável a não ocorre na conclusão.

(ii) Todas as conecões são herdadas.

($\exists_L$ e ($\exists_R$) são simétricos a ($\forall_R$) e ($\forall_L$).

Figura 15.

Sistema NFIL multiplicativo. L. Franklin.2000.

(As regras com duas premissas não podem ter índices em comúm)

Formação de hipótese.

$$\frac{A(n)}{A/\{n\}}$$

Regras estruturais.

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ \Delta_1, A/S_1, A/S_2, \Delta_2\end{array}}{\Delta_1, A/S_1 \cup A/S_2, \Delta_2}\,(C_{int.}) \qquad \frac{\dfrac{A(k)}{A/\{k\}} \qquad \begin{array}{c}[A(n_1)] \ldots [A(n_j)]\\ \vdots \\ \Delta\end{array}}{\Delta[(n_1, ..., n_j) \leftarrow \{k\}]}\,(C_{elim.})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ \Delta\end{array}}{\Delta, A/\emptyset}\,(W_{int.}) \qquad \frac{\dfrac{A(k)}{A/\{k\}} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ \Delta\end{array}}{\Delta^*}\,(W_{elim.})$$

(Em $(W_{elim.})$, k novo e Δ_* é obtido de Δ pela introdução do índice k em pelo menos um conjunto de dependência S em Δ).

Regras operacionais

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots \\ A/S_1, \Delta_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \vdots \\ B/S_2, \Delta_2\end{array}}{(A \wedge B)/S_1 \cup S_2, \Delta_1, \Delta_2}\,(\wedge_{int.}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots \\ (A \wedge B)/S_1, \Delta_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2[A(n)][B(m)]\\ \vdots \\ \Delta_2\end{array}}{\Delta_1, \Delta_2[(n, m) \leftarrow S']}\,(\wedge_{elim.})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ A/S_1, B/S_2, \Delta\end{array}}{(A \vee B)/S_1 \cup S_2, \Delta}\,(\vee_{int.}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ (A \vee B)/S, \Delta\end{array}}{A/S, B/S, \Delta}\,(\vee_{elim.})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma(n)]\\ \vdots \\ B/S, \Delta\end{array}}{(A \rightarrow B)/S_n, \Delta}\,(\rightarrow_{int.}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots \\ A/S_1, \Delta_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \vdots \\ (A \rightarrow B)/S_2, \Delta_2\end{array}}{B/S_1 \cup S_2, \Delta_1, \Delta_2}\,(\rightarrow_{elim.})$$

(Em $(\rightarrow_{elim.})$, $n \in S$ e para todo S' tal que S' $\in \Delta$, então n não pertence a S'.)

Figura 16

Sistema NFIL aditivo. L. Franklin.2000.

(Nas premissas das regras ($\wedge_R$) e ($\vee_L$), Γ e $Delta$ são os mesmos contextos mas não necessáriamente com as mesmas relações de dependência).

Formação de hipótese.

$$\frac{A(n)}{A/\{n\}}$$

Regras estruturais.

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A/S_1, A/S_2, \Delta\end{matrix}}{A/S_1 \cup A/S_2, \Delta}\,(C_{int.}) \qquad \frac{\dfrac{A(k)}{A/\{k\}} \qquad \begin{matrix}[A(n_1)] \ldots [A(n_j)]\\ \vdots\\ \Delta\end{matrix}}{\Delta[(n_1, ..., n_j) \leftarrow \{k\}]}\,(C_{elim.})$$

Em ($C_{elim.}$) o índice k é novo)

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \Delta\end{matrix}}{\Delta, A/\emptyset}\,(W_{int.}) \qquad \frac{A(n) \qquad \begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \Delta\end{matrix}}{\Delta^{*}}\,(W_{elim.})$$

(Em ($W_{elim.}$), n é novo e Δ_* é obtido de Δ pela introdução do índice n em pelo menos um conjunto de dependência S em Δ).

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma \quad \begin{matrix}[\Gamma]\\ \vdots\\ A/S, \Delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\Gamma]\\ \vdots\\ B/S, \Delta\end{matrix}}{(A \wedge B)/S, \Delta}\,(\wedge_{int.}) \qquad \frac{(A \wedge B)/S, \Delta}{A/S, \Delta}\,(\wedge_{elim.}) \qquad \frac{(A \wedge B)/S, \Delta}{B/S, \Delta}\,(\wedge_{elim.})$$

$$\frac{A/S, \Delta}{(A \vee B)/S, \Delta}\,(\vee_{int.}) \qquad \frac{B/S, \Delta}{(A \vee B)/S, \Delta}\,(\vee_{int.}) \qquad \frac{\Gamma \quad \begin{matrix}\Gamma'\\ \vdots\\ (A \vee B)/S', \Delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\Gamma][A(n)]\\ \vdots\\ \Delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\Gamma][B(n)]\\ \vdots\\ \Delta\end{matrix}}{\Delta', \Delta](n) \leftarrow S']}\,(\vee_{elim.})$$

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma(n)]\\ \vdots\\ B/S, \Delta\end{matrix}}{(A \rightarrow B)/S_n, \Delta}\,(\rightarrow_{int.}) \qquad \frac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A/S_1, \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma'\\ \vdots\\ (A \rightarrow B)/S', \Delta'\end{matrix}}{B/S \cup S', \Delta, \Delta'}\,(\rightarrow_{elim.})$$

(Em ($\rightarrow_{elim.}$), $n \in S$ e para todo S' tal que S' $\in \Delta$, então n não pertence a S'.)

Figura 17.

Sistema FIL1 multiplicativo.

* As regras com duas premissas não têm índices em comum.

* $\Delta[k|S]$ é o resultado de substituir cada S' em Δ tal que k ϵ S' por $((S' - \{k\}) \cup S)$.

* $\Delta[k, S']$ é o resultado de substituir cada S em Δ tal que k ϵ S por $(S \cup S')$.

Axiomas

$$\frac{}{A(n) \Rightarrow A/\{n\}}$$

$$\frac{}{\bot(n) \Rightarrow A_1/\{n\}, ..., A_k/\{n\}}$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta \qquad A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|S]} \, (Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m), \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B(m), A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta} \, (E_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, B/S', \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B/S', A/S, \Delta'} \, (E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A(n), \Gamma \Rightarrow \Delta^*} \, (W_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/\{\}} \, (W_R)$$

onde n é um novo índice que pode ser introduzido em algúm ou mais conjuntos de dependência de Δ.

$$\frac{\Gamma, A(n), A(m) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A(k)) \Rightarrow \Delta[max(n,m), k]} \, (C_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, A/S'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \cup S'} \, (C_R)$$

onde k = min(n,m).

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B)(k) \Rightarrow \Delta[max(n,m), k]} (\wedge_L)$$

onde k = min(n,m).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B/S'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', (A \wedge B)/S \cup S'} (\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta \quad \Gamma', B(m) \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma'(A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta, \Delta'} (\vee_L)$$

onde k = min(n,m)
e o max(n,m) é substituido
em Δ e Δ' por k.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, B/S'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)/S \cup S'} (\vee_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \qquad B(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{(A \rightarrow B)(n)\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n, S]} (\rightarrow_L)$$

$$\frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta, B/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B)/S^*} (\rightarrow_R)$$

(i)para todo S' em Δ
n não pertence a S' .
(ii)se n ϵ S,
então $S^* = S - \{n\}$.
Caso contrário, $S^* = S$.

$$\frac{\Gamma, A(a)(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x)(n) \Rightarrow \Delta} (\exists_L)$$

onde 'a' não ocorre no seqüente inferior

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)/S} (\exists_R)$$

$$\frac{\Gamma, A(t)(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x)(n) \Rightarrow \Delta} (\forall_L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)/S} (\forall_R)$$

(i)'a' não ocorre no
seqüente inferior.
(ii)para todo S' em Δ,
S' $\cap S = \emptyset$.

Figura 18.

Sistema FIL1 aditivo.

* As regras ($_R$) e ($\vee_L$) têm os mesmos contextos com os mesmos índices. (Mas podem ter relações de dependência diferentes). A regra ($\rightarrow_L$) é multiplicativa e portanto ós índices das premissas devem ser diferentes.

* $\Delta[k|S]$ é o resultado de substituir cada S' em Δ tal que k ϵ S' por $((S' - \{k\}) \cup S)$.

* $\Delta[k, S']$ é o resultado de substituir cada S em Δ tal que k ϵ S por $(S \cup S')$.

Axiomas

$$\frac{}{A(n) \Rightarrow A/\{n\}}$$

$$\frac{}{\bot(n) \Rightarrow A_1/\{n\}, ..., A_k/\{n\}}$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta \qquad A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|S]} (Corte)$$

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m), \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B(m), A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta} (E_L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, B/S', \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B/S', A/S, \Delta'} (E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A(n), \Gamma \Rightarrow \Delta^*} (W_L)$$

onde n é um novo índice que pode ser introduzido em algúm ou mais conjuntos de dependência de Δ.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/\{\}} (W_R)$$

$$\frac{\Gamma, A(n), A(m) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A(k)) \Rightarrow \Delta[max(n, m), k]} (C_L)$$

onde k = min(n,m).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, A/S'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \cup S'} (C_R)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B)(n) \Rightarrow \Delta}\ (\wedge_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B)/S}\ (\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma(A \vee B)(n) \Rightarrow \Delta}\ (\vee_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)/S}\ (\vee_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \qquad B(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{(A \rightarrow B)(n)\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n, S]}\ (\rightarrow_L) \qquad \frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta, B/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B)/S^*}\ (\rightarrow_R)$$

(i)para todo S' em Δ
n não pertence a S' .
(ii)se n ϵ S,
então $S^* = S - \{n\}$.
Caso contrário, $S^* = S$.

$$\frac{\Gamma, A(a)(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x)(n) \Rightarrow \Delta}\ (\exists_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)/S}\ (\exists_R)$$

onde ‘a’ não ocorre no seqüente inferior

$$\frac{\Gamma, A(t)(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x)(n) \Rightarrow \Delta}\ (\forall_L) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)/S}\ (\forall_R)$$

(i)‘a’ não ocorre no
seqüente inferior.
(ii)para todo S' em Δ,
S' $\cap S = \emptyset$.