

4

Conclusão e trabalhos futuros

Como vimos, na versão proposicional de FIL, o caráter intuicionista do sistema é assegurado por restrições na regra do condicional. Na parte quantificacional do sistema, a diferença entre a lógica clássica e intuicionista se concentra na regra de introdução do universal.

Nesta tese, desenvolvemos os seguintes resultados. Em primeiro lugar, os lemas 7 e 8 mostraram as seguintes características de FIL1. Pelo lema 7, as derivações de um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em FIL1 podem ser transformadas em derivações onde esse seqüente final não tem W-fórmulas. Isto poderia ser feito com outros sistemas mas, a informação internalizada sobre as aplicações de enfraquecimento feita em FIL com o símbolo ‘*’, permite saber isso sem necessidade de revisar a derivação completa. Pelo lema podemos eliminar uma fórmula $A(a)/S^*$ e introduzir uma fórmula $\forall x A(x)/\{\}^*$ diretamente por (W_R) . Este resultado justifica que, no caso da fórmula ativa de uma aplicação de $(\forall_R)$ ser uma W-fórmula, essa fórmula pode ser quantificada. Em segundo lugar, pelo lema 8, verificamos que uma derivação de um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em FIL1 pode ser fracionada de acordo com as relações de dependência obtendo como resultado n derivações de seqüentes $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0/S_0, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n/S_n$ nos quais cada conjunto S_i é disjunto dos demais. Desse modo, se temos uma fórmula $A(a)$ que é a única fórmula em Δ_i , então seu conjunto de dependência é disjunto do resto, podendo ser quantificada. Com esses dois resultados justificamos a correção da regra da introdução do universal com sucedente múltiplo para a lógica intuicionista.

Além disso, vimos que a marcação das relações de dependência num sistema nos permite uma outra técnica para eliminar os cortes diretamente que pode ser usada em determinados casos, complementando e acelerando a eliminação dos cortes numa prova no estilo Gentzen.

Comparemos, agora, e brevemente o caso da regra do universal com o caso do condicional. Segundo referimos no capítulo 2, a interpretação das vírgulas do sucedente como uma disjunção implícita, a diferença entre ambas lógicas no nível proposicional, não radicava na regra da disjunção (que é a mesma em ambos sistemas) mas, no modo em que o condicional pode ser

internalizado nessa disjunção. De modo análogo, poderíamos pensar que, na versão para predicados, a diferença entre a parte cuantificacional clássica e intuicionista radica nas condições impostas para internalizar o universal na disjunção. Mas, pelo resultado do lema 8 essa disjunção no sucedente mostra-se fracionada de acordo com as relações de dependência. Isto não acontece com o condicional tendo em vista que a fórmula ativa na premissa pode compartilhar hipóteses com o resto do sucedente. Consideremos um seqüente de FIL1 qualquer, como exemplo. De acordo com o lema 8 podemos interpretar que o que acontece é o seguinte:

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow \delta_1^1/S_1^1; \delta_2^1/S_2^1; \delta_3^1/S_3^1, \delta_3^2/\{\}^*, \dots, \delta_3^n/S_3^n; \delta_4^1/\{\}$$

onde cada setor separado com ‘;’ tem conjuntos de dependência disjuntos dos outros setores. Então, podemos quantificar (se cumprem com o requerimento dos parâmetros) as fórmulas $\delta_1^1/S_1^1, \delta_2^1/S_2^1, \delta_3^2/\{\}^*, \delta_4^1/\{\}$. Véja-se que colocamos a W-fórmula ($\delta_3^2/\{\}^*$) de modo arbitrário em Δ_3 segundo o trabalho no lema 9, para que não seja isolada do resto. Notemos que a quantificação feita a fórmulas ativas que são W-fórmulas (quando elas tem seu conjunto de dependência vazio) e a teoremas fica incluída no requerimento que está formulado no sistema já que seus conjuntos são, em realidade, disjuntos do resto. Isto é, embora a quantificação das W-fórmulas necessitem uma justificação diferente, na formulação do sistema elas cumprem o mesmo requerimento de que seu conjunto de dependência seja disjunto do resto. O que é necessário quando trabalhando com o próprio sistema é uma derivação onde a regra (W_L) seja aplicada de modo pertinente, como já referimos. Simplesmente, estudandolas com o lema 8, não podemos isolá-las porque afirmariamos que as mesmas são deriváveis como os teoremas segundo já foi explicado no início do capítulo 3.

Retornando à análise dos seqüentes de FIL1, este fracionamento de derivações poderia ser interpretado como uma série de disjunções no sucedente (dependendo de séries de conjunções no antecedente), por exemplo:

$$\gamma_0^1 \wedge \dots \wedge \gamma_0^j; \gamma_1^1 \wedge \dots \wedge \gamma_1^k \Rightarrow \delta_0^1 \vee \dots \vee \delta_0^n; \delta_1^1 \vee \dots \vee \delta_1^m$$

O lema 9 nos permite concluir que, no caso do seqüente acima ser derivável, os seqüentes:

$$\gamma_0^1, \dots, \gamma_0^j \Rightarrow \delta_0^1, \dots, \delta_0^n$$

e

$$\gamma_1^1, \dots, \gamma_1^k \Rightarrow \delta_1^1, \dots, \delta_1^m$$

são deriváveis em FIL1.

Esta divisão nas derivações baseada nas relações de dependência também nos permite introduzir os condicionais. Então se, por exemplo, um seqüente $\bigwedge \Gamma_0; \bigwedge \Gamma_1 \Rightarrow \bigvee \Delta_0; \bigvee \Delta_1$ é derivável, e as fórmulas de Γ_0 somente ocorrem nos conjuntos de dependência de Δ_0 , então podemos deduzir o seqüente $\bigwedge \Gamma_1 \Rightarrow (\bigwedge \Gamma_0 \rightarrow \bigvee \Delta_0); \bigvee \Delta_1$ e o seqüente $\Rightarrow (\bigwedge \Gamma_0 \rightarrow \bigvee \Delta_0); (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)$.

Também podemos apreciar, revisando o sistema proposicional de Dedução Natural de múltiplas conclusões (NFIL), que as únicas regras que permitem abrir as derivações são as de eliminação da disjunção e enfraquecimento. Mas, uma diferença importante entre ambas é que a regra da disjunção gera componentes que têm, no mínimo, um índice em comum (o que é feito por $(\vee_L)$ em cálculo de seqüentes. Ao contrário, é o enfraquecimento a única regra que ‘abre’ as derivações podendo gerar componentes novos com conjuntos de dependência disjuntos e permitindo fracionar a derivação. O que vemos é que, na altura das aplicações de universal á direita, elas podem ser fracionadas (no mínimo) em duas derivações onde uma delas tem sucedente único. Gostariamos, num futuro trabalho, revisar mais e melhor o desenho das derivações em FIL1.

Finalmente, enumeramos algumas análises pendentes do próprio sistema e alguns problemas que achamos seria de interesse estudar com FIL1:

- (1) Realizar a versão para primeira ordem do sistema de Dedução Natural de Múltiplas Conclusões feito por Ludmilla Franklin.
- (2) Considerando o enfraquecimento feito por Prawitz dos requerimentos sobre os parâmetros na regra de introdução do universal em *Natural Deduction*, acreditamos que é possível fazer esse mesmo trabalho para cálculo de seqüentes e para Dedução Natural de Múltiplas Conclusões.
- (3) Reformular a prova de consistência de HA de Scarpellini na qual uma regra intuicionista para o universal que permita múltiplas conclusões reduziria os aspetos não construtivos da prova.
- (4) Utilizar FIL1 para a apresentação de sistemas para lógicas intermediárias e aritméticas intermediárias. Em “Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis”, Troelstra prova que não existe uma aritmética intermediária com a lógica de Domínios Constantes, isto é, se à lógica de Domínios Constantes (que, por certo, cumpre a propriedade da disjunção) agregamos a aritmética, ela colapsa com PA. A primeira pergunta seria: podemos formular aritméticas intermediárias?

Troelstra sugere que sim. A proposta seria formular sistemas para essas aritméticas intermediárias e estudar o que acontece com as propriedades das diferentes lógicas intermediárias quando a aritmética é agregada a elas.

- (5) Realizar uma tradução de FIL1 para LJ.