

3 FIL para lógica de primeira ordem

Neste capítulo apresentamos o sistema FIL para lógica de primeira ordem. Chamaremos esse sistema ‘FIL1’ e provaremos a correção, completude e eliminação do corte. Usaremos o estilo notacional usado por De Paiva e Pereira na versão proposicional. Assim, ‘ Γ ’ representará a seqüência de fórmulas indexadas e ‘ Δ ’ representará a seqüência de fórmulas do sucedente com seus respectivos conjuntos de dependência. A prova de completude é trivial e, como veremos no início dessa sessão, mostrar a correção do sistema resulta mais complicado.

Consideremos as seguintes observações sobre FIL1 multiplicativo que encontra-se na Figura 17 do Apêndice¹:

- * As regras com duas premissas não têm índices em comum.
- * $\Delta[k|S]$ é o resultado de substituir cada S' em Δ tal que $k \in S'$ por $((S' - \{k\}) \cup S)$.
- * $\Delta[k, S']$ é o resultado de substituir cada S em Δ tal que $k \in S$ por $(S \cup S')$.
- * No \perp -axioma, $k \geq 1$.

Sistema FIL1 multiplicativo

Axiomas

$$A(n) \Rightarrow A/\{n} \quad \perp(n) \Rightarrow A_1/\{n}, \dots, A_k/\{n}$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta \quad A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|S]} \text{ (Corte)}$$

¹Agregamos na Figura 18 do apêndice a versão aditiva do mesmo.

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m), \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B(m), A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta} (E_L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, B/S', \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B/S', A/S, \Delta'} (E_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A(n), \Gamma \Rightarrow \Delta^\circ} (W_L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/\{ \}} (W_R)$$

onde n é um novo índice que pode ser (ou não) introduzido em algum ou mais conjuntos de dependência de Δ .

$$\frac{\Gamma, A(n), A(m) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A(k) \Rightarrow \Delta[\max(n, m)|\{k\}]} (C_L)$$

onde $k = \min(n, m)$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, A/S'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \cup S'} (C_R)$$

Regras operacionais

$$\frac{\Gamma, A(n), B(m) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B)(k) \Rightarrow \Delta[\max(n, m)|\{k\}]} (\wedge_L)$$

onde $k = \min(n, m)$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B/S'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', (A \wedge B)/S \cup S'} (\wedge_R)$$

$$\frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta \quad \Gamma', B(m) \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' (A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta[i|\{k\}], \Delta'[i|\{k\}]} (\vee_L)$$

onde $k = \min(n, m)$ e $i = \max(n, m)$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, B/S'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)/S \cup S'} (\vee_R)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S \quad B(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{(A \rightarrow B)(n), \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n, S]} (\rightarrow_L)$$

$$\frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta, B/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B)/S^\circ} (\rightarrow_R)$$

(i) para todo S' em Δ
n não pertence a S' .
(ii) se $n \in S$,
então $S^\circ = S - \{n\}$.
Caso contrário, $S^\circ = S$.

$$\frac{\Gamma, A(a)(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x)(n) \Rightarrow \Delta} (\exists_L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)/S} (\exists_R)$$

onde 'a' não ocorre no seqüente inferior

$$\frac{\Gamma, A(t)(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x)(n) \Rightarrow \Delta} (\forall_L)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)/S} (\forall_R)$$

(i) 'a' não ocorre no seqüente inferior.
(ii) para todo S' em Δ ,
 $S' \cap S = \emptyset$.

3.1 Completude

Provamos a completude sintácticamente via o sistema $IL^>$ cuja equivalência com IL (provada por Schellinx) já foi referida no capítulo anterior. Não estamos fazendo aqui diferença notacional entre os antecedentes considerando que a letra Γ em $IL^>$ tem as mesmas fórmulas que a letra Γ em FIL1, mas tem-se em conta que em FIL as fórmulas do antecedente estão indexadas. Nesse sentido são antecedentes diferentes. Por outra parte o sistema $IL^>$ é aditivo e portanto, nas regras com duas premissas, Γ e Δ são os mesmos contextos. No caso de FIL1, Γ e Δ são também os mesmos contextos mas com índices diferentes.

Teorema 5 *Seja $\Gamma \Rightarrow \Delta$ um seqüente. Se $\vdash_{IL^>} \Gamma \Rightarrow \Delta$, então $\vdash_{FIL1} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$.*

Teorema 6 *Seja $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$ um seqüente. Se $\vdash_{IL} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$, então $\vdash_{FIL1} \Gamma \Rightarrow \Delta$.*

Prova. Por transitividade entre os teoremas 3 e 5.

Prova do teorema 5 por indução sobre derivações.

1. Axioma.

$$A \Rightarrow A \quad \longmapsto \quad A(n) \Rightarrow A/\{n\}$$

2. \perp -axioma.

$$\frac{\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta} \quad \longmapsto \quad \frac{\perp(n) \Rightarrow \Delta/S}{\Gamma, \perp(n) \Rightarrow \Delta/S^\circ} (w_L)$$

onde $S = \{n\}$ para m fórmulas de Δ e $S^\circ = S$ ou S° é o resultado de agregar índices das fórmulas de Γ no conjunto de S .

3. (Corte).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \quad \longmapsto \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta \quad A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|S]}$$

4. (E_L).

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta} \quad \longmapsto \quad \frac{\Gamma, A(n), B(m), \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B(m), A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

5. (E_R).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Delta'} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S, B/S', \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B/S', A/S, \Delta'}$$

6. (W_L).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A(k) \Rightarrow \Delta^\circ}$$

(onde $\Delta^\circ = \Delta$ ou é o resultado de agregar o índice k em algum ou mais conjunto(s) de dependência em Δ)

7. (W_R).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A/\{\}, \Delta}$$

8. (C_L).

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma, A(n), A(m) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A(k) \Rightarrow \Delta/[max(n, m)|k]}$$

onde $k = \min(n, m)$

9. (C_R).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A/S, A/S', \Delta}{\Gamma \Rightarrow A/(S \cup S'), \Delta}$$

10. (\forall_L)

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B(m) \Rightarrow \Delta}{\frac{\Gamma, \Gamma, (A \vee B)(n) \Rightarrow \Delta, \Delta}{\Gamma, (A \vee B)(n) \Rightarrow \Delta}} \quad (C_{R,L})$$

11. (\forall_R^1)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta}{\frac{\Gamma \Rightarrow A/S, B/\{\}, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B)/S, \Delta}} \quad (W_R)$$

(De modo similar para (\forall_R^2)).

12. (\wedge_L^1)

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A(n), B(m) \Rightarrow \Delta} (W_L)}{\Gamma, (A \wedge B)(n) \Rightarrow \Delta^\circ}$$

 (De modo similar para (\wedge_L^2)).

 13. (\wedge_R)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B), \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B/S', \Delta}{\Gamma, \Gamma \Rightarrow (A \wedge B)/S, \Delta, \Delta} (C_{R,L})}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B)/S, \Delta}$$

 14. (\rightarrow_L)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta \quad \Gamma, B(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma, (A \rightarrow B)(n) \Rightarrow \Delta, \Delta[n, S]} (C_{R,L})}{\Gamma, (A \rightarrow B)(n) \Rightarrow \Delta[n, S]}$$

 15. (\rightarrow_R)

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma, A(n) \Rightarrow B/S}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)/S^\circ}$$

 16. (\exists_L)

$$\frac{\Gamma, A(a) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma, A(a)(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x)(n) \Rightarrow \Delta}$$

onde 'a' não ocorre nos seqüentes inferiores.

 17. (\exists_R)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(t)/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A(x)/S}$$

 18. (\forall_L)

$$\frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\Gamma, A(t)(n) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x)(n) \Rightarrow \Delta}$$

19. (\forall_R)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)} \quad \longmapsto \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A(a)/S}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)/S}$$

onde 'a' não ocorre nos seqüentes inferiores.

3.2

Correção

Teorema 7 *Se $\vdash_{FIL1} \Gamma \Rightarrow \Delta$, então $\vdash_{IL^>} \Gamma \Rightarrow \Delta$ (onde a única diferença com as derivações de $IL^>$ é a eliminação das relações de dependência do sistema $FIL1$).*

Teorema 8 *Se $\vdash_{FIL1} \Gamma \Rightarrow \Delta$, então $\vdash_{IL} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$.*

Prova. POr transitividade entre os teoremas 3 e 7.

Pela extensão da prova do teorema 7, preferimos explicar antes a estrutura da mesma. Embora fiquem para depois algumas definições achamos que ajudará na compreensão dos lemas.

A diferença entre ambos sistemas radica nas regras que introduzem o condicional e o universal à direita. (O \perp -axioma de FIL é um caso particular do \perp -axioma de $IL^>$). Assim, para provar a correção de FIL, é suficiente com mostrar que as derivações de $FIL1$ podem ser transformadas em derivações onde as aplicações de (\rightarrow_R) e (\forall_R) têm somente uma fórmula no sucedente da premissa. Mas, ambos casos necessitam ser analisados de modo diferente. Portanto a prova de correção é feita pelos lemas 9 e 10 deste capítulo cada um dos quais se ocupa de uma destas regras.

Para o caso do condicional com premissa de sucedente múltiplo presente na versão proposicional realizada por De Paiva e Pereira é sugerido o trabalho de Kashima e Shimura como modelo para provar a correção. Nós seguiremos a prova de Kashima e Shimura para o caso da regra do condicional com a seguinte diferença: aplicaremos o lema a derivações de FIL que já tem as aplicações do (\forall_R) com premissa de sucedente único resultando em derivações de $IL^>$. O lema de Kashima e Shimura é o último lema requerido para a correção é o lema 10 deste capítulo:

Lema 10. *Seja π uma prova do seqüente $S = \Gamma \Rightarrow \Delta$ em $FIL1$ onde as premissas de todas as aplicações de (\forall_R) têm somente uma fórmula no sucedente. Seja $\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0/S_0; \Delta_1/S_1$ uma partição de S tal que os índices das fórmulas de Γ_1 não ocorrem em S_0 . Então podemos construir uma derivação π' do seqüente $S' \equiv \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge(\Gamma_1) \rightarrow \bigvee(\Delta_1))$ em $FIL1$ onde toda aplicação de (\rightarrow_R) em π' tem somente uma fórmula no sucedente.*

O nosso principal trabalho constituía, então, provar a correção da regra (\forall_R) e para isso desenvolvemos os lemas 7, 8 e 9. O lema afirma:

Lema 9. *Seja π uma derivação em $FIL1$ de $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Então, existe uma derivação π' de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $FIL1$ tal que toda aplicação de (\forall_R) em π' tem apenas uma fórmula no sucedente da premissa.*

Revisamos agora os principais problemas para chegar ao lema 9. Consideremos a formulação da regra do universal. Pela restrição da regra o conjunto de dependência da fórmula ativa deve ser disjunto do resto. Considerando que um seqüente $\Gamma \Rightarrow A(a), \Delta$ em FIL1 onde a fórmula $A(a)$ vai ser quantificada, o conjunto de dependência de $A(a)$ é disjunto do resto. Portanto, podemos fracionar essa derivação em (possivelmente) várias outras. Uma das derivações obtidas será uma derivação do seqüente $\Gamma_i \Rightarrow A(a)$ onde Γ_i é um submulticonjunto de Γ e tem as hipóteses das quais $A(a)$ depende. Isolando essa derivação poderemos introduzir o universal a partir de uma premissa de sucedente único. A idéia intuitiva seria poder “fracionar” uma derivação de FIL1 isolando a fórmula ativa de toda aplicação de $(\forall_R)^2$. Deste modo, a introdução de fórmulas universais em FIL1 mostra-se equivalente às aplicações em $IL^>$.

Esta idéia poderia ser formulado do seguinte modo (que foi uma das primeiras versões do lema 8:

Seja $\Gamma \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n$ um seqüente derivável em FIL1 onde Γ, Δ_i e Δ_j (com $1 \leq i \leq n$) são multiconjuntos de fórmulas e S_i e S_j (com $1 \leq i \leq n$) é a união generalizada dos conjuntos de dependência das fórmulas de Δ_i e Δ_j respectivamente. Consideremos que para todo S_i e S_j no sucedente, $S_i \cap S_j = \emptyset$. Então, para cada Δ_i/S_i existe um $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ tal que $\vdash_{FIL} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ onde Γ_i tem as fórmulas das quais as fórmulas de Δ_i dependem.

O grande problema para este caso o contitui as fórmulas introduzidas por enfraquecimento. Tal como é apresentado em FIL e FIL1, podemos ver que do mesmo modo que os teoremas, as fórmulas introduzidas por (W_R) têm o conjunto de dependência vazio já que não dependem de nenhuma fórmula. Na preparação do lema 9 necessitamos expresar essa diferença notacional entre as mesmas para evitar o caso $\vdash_{FIL1} A/\{\}$ onde A é uma fórmula qualquer. Assim agregamos aos conjuntos de dependência das fórmulas introduzidas por (W_R) uma estrela:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/\{\}}^*$$

e para o caso de (W_L) agregamos a estrela ao índice novo:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A(n^*), \Gamma \Rightarrow \Delta}^\circ$$

²Notamos que não é possível aplicar esta idéia ao condicional de FIL1 já que, exceto a hipótese a ser descarregada, as restantes hipóteses do contexto Γ podem ser compartilhadas com as fórmulas do contexto Δ , enquanto, a própria regra do universal somente pode ser aplicada quando nenhuma hipótese é compartilhada.

podendo colocar n^* em algum conjunto de dependência de Δ .

Desta forma o lema 8 fica reformulado da seguinte maneira:

Lema 8. Seja $\Gamma \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n$ um seqüente derivável em FIL1 onde Γ , Δ_i e Δ_j (com $1 \leq i \leq n$) são multiconjuntos de fórmulas e S_i e S_j (com $1 \leq i \leq n$) é a união generalizada dos conjuntos de dependência das fórmulas de Δ_i e Δ_j respectivamente e:

- (i) Cada Δ_i tem, no mínimo, uma fórmula que não é W-fórmula.
- (ii) Para todo S_i e S_j no sucedente, $S_i \cap S_j = \emptyset$.

Então, para cada Δ_i/S_i existe um $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ tal que $\vdash_{FIL} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ onde Γ_i tem as fórmulas das quais as fórmulas de Δ_i dependem.

Assim, (pela condição (i)), uma fórmula qualquer introduzida por enfraquecimento não pode ficar isolada e não podemos afirmar a sua derivabilidade pelo lema 9. Isto é, o lema 9 pode isolar as fórmulas sem estrela, cujo conjunto de dependência é disjunto do resto, justificando a sua quantificação. Mas também resulta pertinente que a quantificação possa ser feita para fórmulas introduzidas por enfraquecimento. De fato, as mesmas poderiam ser introduzidas por (W_R) diretamente quantificadas. A justificação da quantificação destas fórmulas é a função do lema 7, a seguir:

Lema 7. Seja $\Gamma \Rightarrow \Delta$ um seqüente derivável em FIL1. Então, o seqüente $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$ é derivável em FIL1 (onde Γ^{-w} é o resultado de tirar as W-fórmulas de Γ e Δ^{-w} é o resultado de tirar as W-fórmulas de Δ).

Como veremos, o lema 7 obtém seqüentes deriváveis mas não tenta manter as fórmulas ativas de cada regra. De fato, si a fórmula principal for com estrela, ela poderá ser tirada. Logo, o lema 9 que afirma que toda derivação em FIL1 pode ser transformada numa derivação onde toda aplicação de (\forall_R) tem somente uma fórmula na premissa, considera também o caso no qual a fórmula ativa é uma fórmula introduzida por enfraquecimento. O lema 7 permite tira-la e o lema 9 prova que possível reintroduzi-la por (W_R) diretamente quantificada.

A respeito da regra de enfraquecimento aproveitamos para realizar algumas outras observações também úteis para a compreensão do sistema. Estas observações valem para a extensão para primeira ordem que realizaremos. Véja-se na apresentação do apêndice que a regra (W_L) permite colocar índices nos conjuntos de dependência do sucedente. Assim é feito no caso de FIL e no

caso de NFIL. Essa colocação é útil por exemplo, para restituir relações de dependência. Por exemplo a seguinte derivação:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S^1 \quad A(1), \Gamma' \Rightarrow A/\{1\}, B/S}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A/((\{1\} - \{1\}) \cup S^1), B/S} \text{ (corte)}$$

pode ser transformada na seguinte derivação livre de corte:

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S^1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S^1, B/\{1\}} (W_R)}{\Gamma', \Gamma \Rightarrow \Delta, A/S^1, B/S} (W_R)$$

Neste exemplo, podem ser colocados no conjunto vazio de B, os índices das fórmulas de Γ' das quais B depende, resituindo assim as relações de dependência originais. Mas tenhamos em conta que a inserção dos índices no sucedente não pode ser feita de modo arbitrário já que pode impedir a aplicação da regra (\rightarrow_R) por exemplo:

$$\frac{\frac{A(1) \Rightarrow A/\{1\}}{A(1) \Rightarrow A/\{1\}, B/\{1\}} (W_R)}{B(2), A(1) \Rightarrow A/\{1, 2\}, B/\{2\}} (W_L)$$

Neste caso não poderíamos formar o condicional ($B \rightarrow B$) no sucedente porque o índice também ocorre no conjunto da fórmula A. Para poder introduzir esse condicional podemos colocar o índice '2' no conjunto de dependência de B ou não colocá-lo. O importante na regra de introdução do condicional é que as demais fórmulas do sucedente não dependam dessa hipótese. Portanto, o uso da regra (W_L) deve ser feito de uma modo adequado. Qualquer aplicação da regra não nos permite cumprir com os requerimentos para introduzir o condicional e o universal na direita. No caso do sistema de FIL para primeira ordem, (e como se poderá apreciar mais adiante) a colocação dos índices também alteraria a interseção dos conjuntos de dependência impedindo a introdução do universal.

De fato, no sistema de Kashima e Shimura, a introdução de fórmulas por enfraquecimento não gera relações de dependência. Este é possivelmente um dos temas pendentes da tese: em que maneira devemos considerar a este tipo de fórmulas num sistema que explicita as relações de dependência? De fato, as relações das fórmulas introduzidas por enfraquecimento, (quando não são a restauração de antigas relações de dependência como fazemos uso neste resultados metasistêmicos), são falsas. Esse é o problema: devemos deixá-las sem vínculo ou permitir gerar relações de dependência falsas?

Explicamos brevemente que a regra (W_R) não pode ser omitida no sistema. Considerando que o \perp -axioma gera o sucedente múltiplo e portanto, nos poderia levar a pensar que o mesmo substitui uma regra de (W_R) e que a regra poderia ser admissível no sistema. Mas, provar a admissibilidade de (W_R) em FIL1, tem como primeiro problema a alteração das relações de dependência: as fórmulas introduzidas no sucedente do \perp -axioma dependem todas da mesma fórmula e portanto têm um mesmo conjunto de dependência não vazio, enquanto uma série de fórmulas introduzidas por (W_R) tem conjuntos vacíos. Além disso, a prova da admissibilidade necessita ser feita para um sistema FIL1 híbrido que mistura versões aditivas e multiplicativas. Sem (W_R) , esse sistema híbrido não é completo em relação a LJ que é aditivo.

Portanto, devemos trabalhar com a regra (W_R) e devemos considerar que as aplicações das outras regras produzem novos conjuntos de dependência e mudança nos índices. Estas modificações não representam a formulação de um novo sistema, mas são provisórias para esta prova de correção. Por exemplo, por (W_L) podemos colocar num conjunto $\{ \}^*$ índices com estrela resultando por exemplo, $\{n^*, m^*\}^*$ (notemos que os conjuntos das fórmulas introduzidas por W_R não continuam sendo necessariamente vacíos ao longo da derivação). Portanto, para representar eles de um modo mais geral, usaremos ' S^* '. Também podemos ver que os teoremas podem ter índices em seus conjuntos pela aplicação de (W_L) . Pelo resultado da operação *min* no antecedente algum índice pode ser substituído por um outro índice sem estrela, resultando por exemplo: $\{n^*, k\}^*$. O mesmo pode acontecer num conjunto sem estrela. Ou seja, não somente teremos combinações de subíndices mas também combinações entre os conjuntos.

A definição dos resultados destas combinações incluem decisões arbitrárias que tem a ver com a possibilidade de gerar ou não uma relação de dependência com as mesmas. De fato, consideramos que os detalhes destas operações não afetam a validade do lema 7 como veremos na sua prova. Uma primeira forma de simplificar é considerar que diretamente estamos trabalhando com derivações nas quais as aplicações da regra de (W_L) não aplicou o novo índice no sucedente do seqüente.

Apresentamos uma proposta para estas combinações mais sistematicamente e chamaremos fórmulas do tipo $A(n^*)$ e A/S^* como *W-fórmulas*, que tem *W-índices* e *W-conjuntos*. As demais fórmulas poderão ser chamadas de *genuínas*. Vejamos as operações entre os conjuntos e os índices:

- $(C_L): [S^* \cup S'] = [S \cup S']$
- $(C_R) : [\min(n^*, m)] = [\min(n, m)]$
- $(\vee_R): [S^* \cup S'] = [S \cup S']$

- (\wedge_L) : $[\min(n^*, m)] = [\min(n, m)]$
- (\vee_L) : $[\min(n^*, m)] = [\min(n, m)]^*$ e para todo índice $j \in S$ tal que $n \in S$ e/ou $m \in S$, então j é substituído por j^* no seqüente inferior.
- (\wedge_R) : $[S^* \cup S'] = [S \cup S']^*$ e para todo índice $j \in S \cup S'$, então j é substituído por j^* no seqüente inferior.
- (Corte): quando $\Delta'[n|S^*]$ para algúm S' em Δ tal que $n \in \Delta$, $(S' - \{n\}) \cup S^* = [(S' - \{n\}) \cup S]^*$.
- (Corte): quando $\Delta'[n|S]$ para algúm $S^{*'}$ em Δ tal que $n \in \Delta$, $(S^{*' - \{n\}}) \cup S = [(S' - \{n\}) \cup S]^*$.
- (\rightarrow_L) : $\Delta'[n, S^*]$ para algúm S' em Δ tal que $n \in \Delta$, $(S' \cup S^*) = [(S' \cup S)]^*$.
- (\rightarrow_L) quando $\Delta'[n, S]$ para algúm $S^{*'}$ em Δ tal que $n \in \Delta$, $(S^{*' \cup S}) = [(S' \cup S)]^*$.

Ainda assim, achamos que as decisões sobre estas relações de dependência devem ser revisadas.

Notação 1 *Apresentamos, a continuação, notação específica para ser usada nos próximos lemas conjuntamente com alguma já usada a modo de esclarecimento:*

1. *Consideraremos que $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ são multiconjuntos e que representam os diferentes contextos, como por exemplo, nas regras de duas premissas nas versões multiplicativas.*
2. *Para mostrar variações nos contextos usaremos $\Gamma^\circ, \Gamma^{\circ\circ}, \Gamma^{\circ\circ\circ}, \dots, \Delta^\circ, \Delta^{\circ\circ}, \dots$. Ou seja, Γ° é uma variação de Γ resultado de aplicar uma regra do sistema e assim sucesivamente. O mesmo critério usaremos para representar a diferença entre uma fórmula ativa na premissa e a fórmula principal da conclusão (A e A°) ou em conjuntos de dependência (S° é o resultado de variar algum índice no conjunto S).*
3. *Para um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, escreveremos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \Rightarrow \Delta_1, \dots, \Delta_n$ para representar com cada Γ_i , tal que $(1 \leq i \leq m)$, um submulticonjunto de Γ e com cada Δ_j tal que $(1 \leq j \leq n)$, um submulticonjunto de Δ . Usaremos i, j e k como subíndices para submulticonjuntos.*
4. *O contexto Δ representa as fórmulas do sucedente conjuntamente com seus conjuntos de dependência $\delta^1/S^1, \dots, \delta^n/S^n$ onde o superíndice (também com as letras i, j, k) indica a fórmula à qual corresponde. Se necessário, usaremos Δ/S onde $S = \bigcup S^i$ tal que S^i são os conjuntos de dependência das fórmulas de Δ . Para o caso dos submulticonjuntos escreveremos Δ_i/S_i . Observe que S^i é um conjunto de dependência de uma*

fórmula, mas, S_i é o conjunto que é a união generalizada dos conjuntos de dependência das fórmulas Δ_i .

5. Podemos escrever $[A]\Gamma \Rightarrow \Delta, [B]$ para representar um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ onde $[A]$ é uma fórmula destacada que pertence a Γ e $[B]$ é uma fórmula destacada que pertence a Δ , podendo destacar uma ou mais de uma fórmula.

Conforme mencionamos, os próximos lemas (7 e 8) visam a transformação de derivações com a regra de (\forall_R) em derivações onde as premissas dessa regra tem somente a fórmula ativa $A(a)/S$. O lema 7 aplica-se para o caso em que a fórmula ativa de (\forall_R) é uma W-fórmula. Aquim o universal pode ser introduzido por enfraquecimento. No outro caso, quando a fórmula ativa não é uma W-fórmula, é usado o lema 8.

Lema 7 *Seja $\Gamma \Rightarrow \Delta$ um seqüente derivável em FIL1. Então, o seqüente $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$ é derivável em FIL1 (onde Γ^{-w} é o resultado de eliminar as W-fórmulas e Δ^{-w} é o resultado de eliminar as W-fórmulas e os W-índices).*

Prova por indução sobre derivações de FIL1.

Caso base.

1. Axioma: $A(n) \Rightarrow A/\{n\}$. Cumpre trivialmente o lema.
2. \perp -axioma: $\perp(n) \Rightarrow A_1/\{n\}, \dots, A_k/\{n\}$. Idem ao caso anterior.

Consideremos uma derivação π do seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ na qual R é a última regra de inferência.

Vejamos o caso em que R não afeta W-fórmulas:

$$\frac{\pi}{\frac{\Gamma^\circ \Rightarrow \Delta^\circ}{\Gamma \Rightarrow \Delta}} (R)$$

Por H.I. temos π' de $\Gamma^{\circ-w} \Rightarrow \Delta^{\circ-w}$ e obtemos aplicando a regra R, $\vdash_{FIL1} \Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$. Se R tem duas premissas, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ e $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, por H.I. podemos obter $\Gamma^{\circ-w} \Rightarrow \Delta^{\circ-w}$ e $\Gamma'^{\circ-w} \Rightarrow \Delta'^{\circ-w}$ e aplicando R, obtemos $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$.

Consideremos agora os casos em que R afeta W-fórmulas.

1. R = (C_R) .

1.1. As duas ocorrências são W-fórmulas:

$$\frac{\pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C/S^{1*}, C/S^{2*}} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C/(S^1 \cup S^2)^*}{(C_R)}$$

Por H.I. temos π' de $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$.

1.2. Somente uma das ocorrências é uma W-fórmula:

$$\frac{\pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C/S^{1*}, C/S^2} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C/(S^1 \cup S^2)}{(C_R)}$$

Pela H.I. $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}, C/S^2$.

2. R = (C_L) .

2.1. Caso em que as duas ocorrências são W-fórmulas:

$$\frac{\pi}{C(n^*), C(m^*), \Gamma \Rightarrow \Delta} \frac{C[\min(n, m)]^* \Gamma \Rightarrow \Delta}{(C_L)}$$

Pela H.I. $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$.

2.2. Somente uma das ocorrências é uma W-fórmula, por exemplo:

$$\frac{\pi}{C(n_1), C(n_2^*), \Gamma \Rightarrow \Delta} \frac{C[\min(n_1, n_2)], \Gamma \Rightarrow \Delta}{(C_L)}$$

Pela H.I. (e considerando n_2 como mínimo e sem perder a generalidade), temos $C(n_2), \Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$.

3. R = (\wedge_R) .

Vejamos neste caso e a modo de exemplo como podemos lidar com regras de duas premissas tanto nos casos em que uma das fórmulas ativas é W-fórmula quanto as duas fórmulas são W-fórmulas:

3.1. Caso em que as duas fórmulas ativas são W-fórmulas:

$$\frac{\pi_1 \quad \pi_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta C/S^{1*} \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta', D/S^{2*}} \frac{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', (C \wedge D)/(S^1 \cup S^2)^*}{(\wedge_R)}$$

Por H.I. temos π'_1 de $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$ e π'_2 de $\Gamma'^{-w} \Rightarrow \Delta'^{-w}$. Podemos obter uma derivação da conclusão sem W-fórmulas com a seguinte derivação:

$$\frac{\frac{\pi'_1}{\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}} (W_R) \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma'^{-w} \Rightarrow \Delta'^{-w}} (W_L)}{\Gamma^{-w}, \Gamma'^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}, \Delta'^{-w}} (corte)$$

Verificamos que as fórmulas introduzidas agora por enfraquecimento para serem cortadas não geraram nenhuma relação de dependência.

3.2. Caso em que somente uma das fórmulas ativas seja W-fórmula:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C/S^{1*}} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', D/S^2}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', (C \wedge D)/(S^1 \cup S^2)^*} (\wedge_R)$$

Por H.I. temos π'_1 de $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$ e π'_2 de $\Gamma'^{-w} \Rightarrow \Delta'^{-w}, D/S^{2-w}$ (ou seja, ao conjunto S^2 lhe foram tirados os W-índices das W-fórmulas do antecedente).

Desta forma vemos que, a partir de somente um dos componentes genuínos podemos afirmar, em regras de duas premissas, por H.I., que temos π'_1 de $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$. Desse modo, no lema 10, poderemos restituir por enfraquecimento a fórmula principal diretamente quantificada.

4. R = (\wedge_L) . Similar a (C_L) .

5. R = (\vee_R) . Similar a (C_R) .

6. R = (\vee_L) . Similar a \wedge_R 7. R = (\rightarrow_R) .

8.1. Caso em que as duas fórmulas ativas são W-fórmulas:

$$\frac{\pi}{\frac{C(n^*), \Gamma \Rightarrow \Delta, D/S^{1*}}{\Gamma, \Rightarrow \Delta, (C \rightarrow D)/S^{1*o}} (\rightarrow_R)}$$

Por H.I. $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$. Notemos que a única mudança em S^{1*} é a possível perda de um w-índice mas a regra não modifica seu status de W-conjunto.

8.2. Caso em que a hipótese é uma W-fórmula e D não seja uma W-fórmula.

Verificamos que a fórmula principal na conclusão não é uma W-fórmula:

$$\frac{\pi}{\frac{C(n^*), \Gamma \Rightarrow \Delta, D/S^1}{\Gamma, \Rightarrow \Delta, (C \rightarrow D)/S^{1o}} (\rightarrow_R)}$$

Por H.I. $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}, D/S^{1-w}$. Agregando por (W_L) uma fórmula $C(k^*)$ sem colocar o índice em Δ^{-w} podemos aplicar (\rightarrow_R) obtendo o seqüente $\Gamma^{-w}, \Rightarrow \Delta^{-w}, (C \rightarrow D)/S^{1-wo}$.

Vejam os que o seguinte caso da regra não é possível em FIL1:

$$\frac{\pi}{\frac{C(n), \Gamma \Rightarrow \Delta, D/(S \cup \{n\})^*}{\vec{A}, \Gamma, \Rightarrow \Delta, (C \rightarrow D)/S^*}} (\rightarrow_R)$$

Devemos considerar que a única forma de aumentar o número de índices dentro de um W-conjunto (que não esteja substituindo outro) é pela aplicação da regra de (W_L) e, portanto, o índice levaria estrela. Se o índice não tem estrela significa que é o resultado de alguma operação onde n substituiu i^* em D/S^{1*} . Como n era um índice não introduzido por (W_L) então alguma fórmula de Δ depende dele impedindo a aplicação de (\rightarrow_R) . (O argumento deve considerar também que o índice n seja o resultado de uma outra operação *min* e assim por diante).

9. R = (\rightarrow_L) .

10. R= Corte.

Os casos 9 e 10 podem ser tratados como as demais regras de duas premissas.

11. R = (\forall_R) .

11.1. Consideremos o caso em que a fórmula principal é uma W-fórmula:

$$\frac{\pi}{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C(a)^1/S^{1*}}{\Gamma, \Rightarrow \Delta, \vec{B}, \forall x C(x)^1/S^{1*}}} (\forall_R)$$

Pela H.I. $\Gamma^{-W} \Rightarrow \Delta^{-w}$.

11.2. Caso em que a fórmula principal não é uma W-fórmula:

$$\frac{\pi}{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta/S, C(a)^1/S^1}{\Gamma, \Rightarrow \Delta/S, \forall x C(x)^1/S^1}} (\forall_R)$$

Pela H.I. $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}/S^{-w}, C(a)/S^{1-w}$. Se $S \cap S^1 = \emptyset$ então $S^{-w} \cap S^{1-w} = \emptyset$ podendo-se aplicar (\forall_R) . Portanto, temos π' de $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}/S^{-w}, \forall x C(x)/S^{1-w}$. Então, o fato de eliminar W-índices não afeta a interseção.

12. R = (\forall_L) .

12.1. Se a fórmula ativa é uma W-fórmula:

$$\frac{\pi}{\frac{C(a)(n^*), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x C(x)(n^*), \Gamma, \Rightarrow \Delta}} (\forall_L)$$

Pela H.I. temos π' de $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$.

12.2. Se a fórmula ativa não é uma W-fórmula, temos pela H.I. $C(a)(n), \Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$ e por (\forall_L) obtemos $\forall x C(x)(n), \Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}$.

13. R = (\exists_R) . Similar a (\forall_R) .

14. R = (\exists_L) . Similar a (\forall_L) .

□

Lema 8 *Seja $\Gamma \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n$ um seqüente derivável em FIL1 onde Γ, Δ_i e Δ_j (com $1 \leq i \leq n$) são multiconjuntos de fórmulas e S_i e S_j (com $1 \leq i \leq n$) é a união generalizada dos conjuntos de dependência das fórmulas de Δ_i e Δ_j respectivamente e:*

(i) *Cada Δ_i tem, no mínimo, uma fórmula que não é W-fórmula. .*

(ii) *Para todo S_i e S_j no sucedente, $S_i \cap S_j = \emptyset$.*

Então, para cada Δ_i/S_i existe um $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ tal que $\vdash_{FIL} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ onde Γ_i tem as fórmulas das quais as fórmulas de Δ_i dependem.

Realizemos alguns esclarecimentos sobre a prova.

Pela diferença notacional introduzida e a condição (i) do lema, poderemos isolar, a partir de um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta, A/\{\}$ tal que A é um teorema, o seqüente $\Rightarrow A/\{\}$ mas, não poderemos isolar o seqüente $\Rightarrow A^1/S^{1*}$ e afirmar sua derivabilidade em FIL1. Certo é que poderíamos fazer uma versão do lema extraíndo simplesmente uma derivação mas, neste caso, podemos extrair uma derivação de FIL de um seqüente $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ a partir da derivação de um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em FIL1 sabendo que $(\Gamma - \Gamma_i) \Rightarrow (\Delta - \Delta_i)$ é derivável em FIL1 também. De esse modo podemos considerar uma derivação em FIL1 como uma composição de derivações.

Em segundo lugar, em função dos W-conjuntos não ser tidos em conta na interseção, consideraremos que as fórmulas correspondentes estão num Δ_i arbitrário. Além disso, verificaremos que não é o caso de que as relações de interseção dos conjuntos na conclusão sejam as mesmas que na premissa. Finalmente, veremos que o lema “extraí” seqüentes nos quais a fórmula principal da regra não ocorre necessariamente. Segundo veremos no lema 9, isto é fundamental para isolar a fórmula ativa na regra (\forall_R) .

Prova por indução sobre comprimento de derivações.

Caso base.

Axioma $A(n) \Rightarrow A/\{n\}$. Cumpre trivialmente o lema.

\perp -axioma $\perp(n) \Rightarrow A_1/\{n\}, \dots, A_k/\{n\}$. Cumpre o lema considerando que $A_1/\{n\}, \dots, A_k/\{n\}$ constituyen Δ_1 no sucedente.

Consideremos uma derivação π de $\Gamma \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n$ onde os conjuntos S_i são disjuntos e a última regra de inferência aplicada é ‘R’.

R = (W_L)

$$\frac{\pi}{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta/S}{A(k^*), \Gamma \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n}} (w_L)$$

Pela condição do lema sabemos que os conjuntos da conclusão são disjuntos. Portanto, se o índice k foi agregado no sucedente, somente pode estar num dos conjuntos e a aplicação da regra não varia a vacuidade da interseção. (Estamos nos referindo aos conjuntos na conclusão que são a união gerada dos conjuntos de dependência dos quais as fórmulas de uma Δ_i depende). Portanto, cada Δ_i disjunto do resto na conclusão vai ser disjunto do resto do sucedente da premissa.

- (a) Seja S_i um conjunto do sucedente da conclusão tal que k não pertence a S_i . Então $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$.
- (b) Seja S_j um conjunto tal que $k \in S_j$ na conclusão, então pela H.I. temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j^\circ/S_j^\circ$ e por (W_L) obtemos $\vdash_{FIL1} A(k^*), \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j/S_j$.

R = (W_R)

$$\frac{\pi}{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta/S}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n, [A/\{\}^*]}}$$

Pelas condições do lema sobre os conjuntos de dependência, uma W-fórmula não pode formar um Δ_i disjunto do resto. Portanto, a aplicação da regra não faz diferença entre as relações de dependência da conclusão e da premissa.

- (a) Suponhamos um Δ_i tal que $A/\{\}^* \in \Delta_i$. Esse Δ_i é também disjunto do resto na premissa. Pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ e pela aplicação de (W_R), $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i \cup \{A/\{\}^*\}$.
- (b) Consideremos o caso de um Δ_j tal que $A/\{\}^*$ não pertence a Δ_j . Pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j$.

R = (\wedge_L)

$$\frac{\pi}{\frac{\Gamma, A(m), B(n) \Rightarrow \Delta/S}{\Gamma, (A \wedge B)(k) \Rightarrow \Delta_1/S_1^\circ, \dots, \Delta_n/S_n^\circ}} (\wedge_L)$$

onde na fórmula $(A \wedge B)(k)$, $k = \min(m, n)$ e os conjuntos de dependência S^j na premissa tal que n ou m pertencem a eles foram substituídos na conclusão por $[(S^j - \max(m, n)), k]$.

Pelas condições do lema, o índice k ocorre somente num dos componentes da interseção. Mas k é o resultado da operação min e, portanto, podemos ter nessa premissa um grupo de conjuntos de dependência com índice m disjunta de um outro grupo de conjuntos com índice n . Nesta situação teríamos na conclusão S_i que é a união desses conjuntos disjuntos na premissa. Notemos que em geral, as regras com a operação min as relações de interseção entre os conjuntos de dependência na conclusão são diferentes daqueles na premissa. Analisemos então, as possibilidades:

- (a) Se n e m pertencem a grupos de conjuntos de dependência não disjuntos na premissa, então temos por H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_i, A(m), B(n) \Rightarrow \Delta_i / (S_i \cup \{m, n\})$ e por (\wedge_L) , $\vdash_{FIL1} \Gamma_i, (A \wedge B)(k) \Rightarrow \Delta_i / (S_i \cup \{k\})$.
- (b) Se n e m pertencem a coleções de conjuntos disjuntos na premissa, pela H.I. $\Gamma_i, A(m) \Rightarrow \Delta_i / (S_i \cup \{m\})$ e $\Gamma_j, B(n) \Rightarrow \Delta_j / S_j \cup \{n\}$ a partir de cada uma podemos obter outras derivações como por esemplo:

$$\frac{\frac{\frac{\pi'}{\Gamma_i, A(m) \Rightarrow \Delta_i / (S_i \cup \{m\})}}{\Gamma_i, A(m^*), B(n) \Rightarrow \Delta_i / (S_i \cup \{m, n^*\})} (W_L)}{\Gamma_i, (A \wedge B)(k) \Rightarrow \Delta_j / (S_i \cup \{k\})} (\wedge_L)$$

- (c) Consideremos um submulticonjunto Δ_i na conclusão tal que k não pertence a S_i . Então, as fórmulas de Δ_i não dependiam na premissa, nem da fórmula com índice n nem da fórmula com índice m . Além disso, considerando que Δ_i na conclusão é disjunto dos conjuntos que tinham o índice k , então S_i era disjunto das uniões generalizadas na premissa que tinham o índice n ou o índice m . Portanto, pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i / S_i$

Um argumento similar pode ser feito a partir de $B(n)$.

R= (C_L)

$$\frac{\frac{\pi}{\Gamma, A(m), A(n) \Rightarrow \Delta / S}}{\Gamma, (A)(k) \Rightarrow \Delta_1 / S'_1, \dots, \Delta_n / S'_n} (\wedge_L)$$

onde na fórmula $A(k)$, $k = min(m, n)$ e alguns conjuntos de dependência S^j na premissa, foram substituídos na conclusão por $[(S_j - max(m, n)), k]$.

Considerando que os conjuntos S_1, \dots, S_n são disjuntos na conclusão, o índice k ocorre somente num dos componentes dessa interseção sendo o resultando da operação min . A análise é similar ao caso da regra (\wedge_L) .

$$R = (\forall_L) \frac{\begin{array}{c} \pi \\ \Gamma, A(n) \Rightarrow \Delta/S \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi' \\ \Gamma', B(m) \Rightarrow \Delta'/S' \end{array}}{\Gamma, \Gamma'(A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_1/S_1^\circ, \dots, \Delta_n/S_n^\circ} (\forall_L) \forall$$

De modo similar às regras anteriores, o índice k pertence somente a uma das coleções da conclusão. Segundo a apresentação da regra (\forall_L) no sistema as premissas não têm índices em comum.

- (a) Consideremos um S_i no sucedente da conclusão tal que o índice k não pertence a S_i . Pelo requerimento do sistema, as regras de duas premissas têm necessariamente índices diferentes. Portanto Δ_i/S_i pode ser um submulticonjunto de Δ que não depende da fórmula com índice n ou pode ser um submulticonjunto de Δ' que não depende do índice m . Suponhamos o primeiro caso. Pela H.I. temos $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ tal que $\Delta_i \subseteq \Delta$ e n não pertence a S_i . No segundo caso, pela H.I. temos $\Gamma_j \Rightarrow \Delta_j$ tal que $\Delta_j \subseteq \Delta'$ e m não pertence a S_j .
- (b) Estudemos agora o caso de S_i° na conclusão tal que $k \in S_i^\circ$. Considerando que nas regras de duas premissas, as premissas não têm índices em comum, então os índices n e m provem necessariamente de conjuntos disjuntos entre si. Então $S_i^\circ = S_j \cup S'_k$ tal que: (i) $S_j \subseteq S$ na premissa esquerda no qual $n \in S_j$ e $S_j \cap (S - S_j) = \emptyset$; (ii) $S'_k \subseteq S'$ na premissa direita tal que $m \in S'_k$ e $S'_k \cap (S' - S'_k) \neq \emptyset$.
Pela H.I. temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_j, A(n) \Rightarrow \Delta_j/S_j$ e $\vdash_{FIL1} \Gamma'_k, B(m) \Rightarrow \Delta'_k/S'_k$.
Por (\forall_L) obtemos $\Gamma_j, \Gamma'_k(A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_j/S_j^\circ, \Delta'_k/S'_k^\circ$.

$$R = (\rightarrow_L) \frac{\begin{array}{c} \pi \\ \Gamma \Rightarrow A/S^\circ, \Delta/S \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi' \\ \Gamma', B(n) \Rightarrow \Delta'/S' \end{array}}{\Gamma, \Gamma'(A \rightarrow B)(n) \Rightarrow \Delta_1/S_1^\circ, \dots, \Delta_n/S_n^\circ} (\rightarrow_L)$$

- (a) Consideremos um S_i tal que n não pertence a S_i . Então, S_i não mistura índices de ambas premissas. Por esse fato, ou $S_i \subseteq S$ ou $S_i \subseteq S'$. Vejamos essas duas possibilidades:
1. Se $S_i \subseteq S'$ então, pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma'_i \Rightarrow \Delta'_i/S_i$ tal que $\Delta'_i \subseteq \Delta'$ na premissa direita e este seqüente cumpre o lema. Notamos que este caso inclui também a possibilidade de que $B(n)$ seja uma W-fórmula e que seu índice não tinha sido colocado no sucedente da premissa.
 2. Se $S_i \subseteq S$ então temos duas possibilidades: $S_i \cap S^1 = \emptyset$ ou $S_i \cap S^1 \neq \emptyset$. No segundo caso, por ter a fórmula A no sucedente estaríamos obrigados a aplicar a regra com o seqüente com fórmula $B(n)$. Mas, nesse caso,

estariamos com um Δ_i dependendo do índice n , que não é o caso. Por tanto temos que analisar em relação a premissa direita a situação em que $S_i \cap S^1 = \emptyset$. Pela H.I. temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ onde $\Delta_i \subseteq \Delta$ cumprindo o lema. Veja neste caso que pela H.I. poderíamos obter também um seqüente $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow A/S^1$. Mas, com a necessidade de aplicar a regra (\rightarrow_R) usando a premissa direita com o B(n) acabaríamos tendo um sucedente Δ_i que depende de n , e, como já temos explicado, este não é o caso que estamos analisando.

- (b) Consideremos um S_i tal que $n \in S_i$. Em função do visto no primeiro caso, conjuntos que têm n na conclusão, não necessariamente têm n na premissa e podem provenir da premissa esquerda. Vejamos as possibilidades.
1. Se é o caso em que S_i tem n , pode ser o resultado do seguinte processo. Pela H.I. temos $\Gamma'_j[B(n)] \Rightarrow \Delta'_j/S_i$. Pela aplicação de (\rightarrow_L) usando a premissa esquerda original temos $\vdash_{FIL1} \Gamma, \Gamma'_i, (A \rightarrow B)(n) \Rightarrow \Delta, \Delta_i/S_i$ tal que S_i tem: n , os conjuntos de dependência das fórmulas de Δ não disjuntos dos conjuntos que têm n e os conjuntos de dependência da premissa direita que não são disjuntos de S^1 . Este seqüente cumpre o lema. (Lembremos que pela aplicação da regra, os conjuntos que têm n recebem o conjunto de dependência da fórmula A). Portanto, verificamos que S_i na conclusão não tem que ser exactamente subconjunto de um conjunto de uma premissa, mas um conjunto que mistura índices de ambas premissas.
 2. Consideremos um Δ_i que é o resultado de um outro processo. Se $S_i \cap S^1 \neq \emptyset$ então, pela H.I. temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow A/S^1, \Delta_j/S_j$ tal que $S_i = S^1 \cup S_j$. Aplicando (\rightarrow_R) usando a premissa direita, temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_j, \Gamma', (A \rightarrow B)(n) \Rightarrow \Delta_j/S_j, \Delta'/S'[n, S^1]$ que cumpre o lema.
 - 3 Lembremos que no caso (a), se $S_i \cap S^1 = \emptyset$, pela H.I. também podiamos obter um seqüente $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow A/S^1$. (Notemos que, neste caso, a fórmula A não pode ser uma W-fórmula, ja que a mesma não poderia ser isolada). Com a aplicação da regra (\rightarrow_R) usando a premissa direita com B(n) obtemos $\vdash_{FIL1} \Gamma_j, \Gamma', (A \rightarrow B)(n) \Rightarrow \Delta'/S'[n, S^1]$ que cumpre também o lema.

R= (C_R)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta/S, [A/S^1], [A/S^2]}{\Gamma \Rightarrow [A/(S^1 \cup S^2)], \Delta_1^\circ/S_1^\circ, \dots, \Delta_n^\circ/S_n^\circ} (C_R)$$

onde $[A/S^1 \cup S^2]$ pertencem a algum Δ_i/S_i da conclusão. Consideremos a premissa. Não sabemos se $S^1 \cup S^2$ são ou não disjuntos entre eles nem se são disjuntos do resto.

- (a) Se na premissa $S^1 \cap S^2 = \emptyset$, então $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j/S_j, [A/S^1]$. Também obtemos $\vdash_{FIL1} \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k/S_k, [A/S^2]$ onde Γ_k tem as fórmulas cujos índices estão em S_k . Qualquer dos dois seqüentes resultantes cumprem o lema e não necessitamos neste caso aplicar a contração.
- (b) Se na premissa $S^1 \cap S^2 \neq \emptyset$ então temos por H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k/S_k, [A/S^1], [A/S^2]$ onde Γ_k tem às fórmulas cujos índices estão em S_k . Por (C_R) temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k^\circ/S_k, [A/(S^1 \cup S^2)]$.
- (c) Se para algum Δ_i da conclusão, $A/(S^1 \cup S^2)$ não pertence a Δ_i , então Δ_i ocorre na premissa na qual é disjunto do resto e tal que $A/(S^1$ não pertence a Δ_i nem $S^2)$ pertence a Δ_i . Pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$.

R= (\wedge_R)

$$\frac{\begin{array}{c} \pi \\ \Gamma \Rightarrow [A/S^1], \Delta/S \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi' \\ \Gamma' \Rightarrow [B/S^2], \Delta'/S' \end{array}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow [(A \wedge B)/(S^1 \cup S^2)], \Delta_1^\circ/S_1^\circ, \dots, \Delta_n^\circ/S_n^\circ} (\wedge_R)$$

onde $[(A \wedge B)/(S^1 \cup S^2)]$ pertence a algum Δ_i/S_i da conclusão. Pela apresentação da regra as premissas tem índices diferentes.

- (a) Consideremos a premissa esquerda: $\Gamma \Rightarrow [A/S^1], \Delta/S$. Pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow [A/S^1], \Delta_j/S_j$ onde S_j tem exactamente os índices de Γ_j e são disjuntos do resto dos conjuntos no sucedente. De igual modo, pela H.I. temos a partir da premissa direita, $\Gamma'_k \Rightarrow [B/S^2], \Delta'_k/S'_k$. Por $(\wedge_R) \vdash_{FIL1} \Gamma_j, \Gamma'_k \Rightarrow [(A \wedge B)/(S^1 \cup S^2)], \Delta_j^\circ/S_j^\circ, \Delta'_k/S'_k$.
- (b) Consideremos o caso de um Δ_i no qual a conjunção não ocorre. Então, S_i pode ser subconjunto de S tal que A não ocorre em Δ_i ou pode ser subconjunto de S' tal que B não ocorre em Δ_i . Em qualquer dos casos, Δ_i/S_i não mudaria das premissas a conclusão. Portanto, a partir da H.I. pode ser isolado o $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ que cumpre com o lema.

R= (\vee_R)

$$\frac{\begin{array}{c} \pi \\ \Gamma \Rightarrow [A/S^1], [B/S^2], \Delta/S \end{array}}{\Gamma \Rightarrow [(A \vee B)/(S^1 \cup S^2)], \Delta_1^\circ/S_1^\circ, \dots, \Delta_n^\circ/S_n^\circ} (\vee_R)$$

onde $[(A \vee B)/(S^1 \cup S^2)]$ é uma fórmula destacada de algum dos conjuntos Δ_i° mas podendo ser S^1 e S^2 disjuntos na premissa. Novamente temos as duas possibilidades na premissa.

- (a) Se na premissa $S^1 \cap S^2 = \emptyset$, então pela H.I. temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j/S_j, [A/S^1]$ onde Γ_j tem as fórmulas cujos índices estão em S_j . Também obtemos $\vdash_{FIL1} \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k/S_k, [B/S^2]$ onde Γ_k tem as fórmulas cujos índices estão em S_k . A partir de qualquer uma das duas podemos introduzir o outro componente por (W_R) e logo introduzir a disjunção. Para manter as relações de dependência, a derivação teria a seguinte forma:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma_j \Rightarrow \Delta_j, [A/S^1]}{\Gamma_j \Rightarrow \Delta_j, [A/S^1][B/\{\}^*], \Delta_k/\{\}^*} (W_R)}{\Gamma_k, \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j^\circ, [A/S^1][B/S^2], \Delta_k/S_k} (W_L)}{\Gamma_k, \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j^\circ, [A \vee B/(S^1 \cup S^2)], \Delta_k^\circ/S_k^\circ} (\vee_L)$$

onde Γ_k é o conjunto de fórmulas cujos índices estão em S_k . Embora os índices introduzidos por (W_L) sejam novos, as relações de dependência obtidas são as mesmas.

- (b) Se na premissa $S^1 \cap S^2 \neq \emptyset$ então temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k/S_k, [A/S_k^1], [B/S_k^2]$ onde Γ_k tem as fórmulas cujos índices estão em S_k . Por (\vee_R) temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k^\circ/S_k^\circ, [(A \vee B)/(S^1 \cup S^2)]$.
- (c) Se para algum Δ_i na conclusão $(A \vee B)/(S^1 \cup S^2)$ não ocorre nela, então, Δ_i ocorre na premissa disjuncto do resto e pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ cumprindo o lema.

R= (\rightarrow_R)

$$\frac{\frac{\pi}{A(n), \Gamma \Rightarrow [B/S^1], \Delta/S}}{\Gamma \Rightarrow [(A \rightarrow B)/S_i^{1,\circ}], \Delta_1^\circ/S_1^\circ, \dots, \Delta_n^\circ/S_n^\circ} (\rightarrow_R)$$

onde $[(A \rightarrow B)/S_i^{1,\circ}]$ pertence a algum Δ_i° da conclusão. Pela formulação da regra, sabemos que o índice n não pertence a nenhuma das coleções da conclusão. A diferença com o sucedente da premissa é que o índice n pode ocorrer, mas somente num dos conjuntos de dependência (pela restrição da própria regra), neste caso, em S^1 . Isto não altera as relações de interseção da conclusão para a premissa.

Tem-se em conta que, se o índice n não ocorre no sucedente da premissa, então, $A(n)$ é uma W-fórmula. Consideremos as duas possibilidades:

- (a) Consideremos então na premissa que $[B^j/S_i^j \cup \{n\}]$ pertence a Δ_i/S_i onde uma S_i é disjunta do resto. Pela H.I., $\vdash_{FIL1} \Gamma_i, A(n) \Rightarrow \Delta_i/S_i \cup \{n\}$ e por (\rightarrow_R) , $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i^\circ, [(A \rightarrow B)^j/S_i^j]$ onde Δ_i° é o resultado de substituir B^j/S_i^j em Δ_i por $(A \rightarrow B)^j/S_i^j$.
- (b) Consideremos então na premissa que $[B^j/S_i^j]$ pertence a Δ_i/S_i e o índice n não pertence a S_i^j . Pela H.I., $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, [B^j/S_i^j]$. Por (W_L) , $\vdash_{FIL1} \Gamma_i, A(n^*) \Rightarrow \Delta_i, [B^j/S_i^j]$. O índice n é novo e não ocorre em S_i (embora a regra de enfraquecimento permita isso). Portanto, podemos aplicar (\rightarrow_R) para obter $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i^\circ, [(A \rightarrow B)^j/S_i^j]$ onde Δ_i° é o resultado de substituir B^j/S_i^j em Δ_i por $(A \rightarrow B)^j/S_i^j$.
- (c) Consideremos um Δ_i que não contém a fórmula principal. Então n não pertence a Δ_i pelas restrições da regra. Portanto ele não é afetado pela regra. Temos por H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ que cumpre o lema.

R= (\exists_R)

$$\frac{\pi \quad \Gamma \Rightarrow [A(t)/S^1], \Delta/S}{\Gamma \Rightarrow [(\exists x A(x)/S^1], \Delta_1^\circ/S_1, \dots, \Delta_n^\circ/S_n} (\exists_R)$$

Do mesmo modo que nas demais regras quantificacionais, a aplicação da regra não faz mudança nenhuma nos conjuntos de dependência pelo que o sucedente da premissa tem a mesma partição do conjunto Δ que na conclusão. Portanto consideremos os seguintes casos:

- (a) Δ_i°/S_i tal que $[\exists x A(x)/S^\circ]$ pertence a ele disjuncto do resto. Como não tem variação $[A(t)/S^1] \in \Delta_i/S_i$ na premissa. Pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow [A(t)/S^1], \Delta_i/S_i$. Por (\exists_R) , $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow [\exists x A(x)/S^1], \Delta_i^\circ/S_i$ onde Δ_i° é o resultado de substituir a fórmula $A(t)$ em Δ_i pelo existencial.
- (b) Se Δ_i é disjuncto do resto na conclusão e não contém a fórmula principal, então o mesmo Δ_i na premissa é disjuncto do resto. Portanto pela H.I. $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ cumprindo o lema. Este mesmo argumento se pode aplicar as demais regras quantificacionais.

R= (\exists_L)

$$\frac{\pi \quad A(a)(n), \Gamma \Rightarrow \Delta/S}{\exists x A(x)(n), \Gamma \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n} (\exists_L)$$

(onde a variável ‘a’ não ocorre no sucedente inferior).

De modo similar a (\exists_R) os conjuntos de dependência não têm mudanças da premissa para a conclusão. Portanto pela H.I. $\vdash_{FIL1} A(a)(n), \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ e por (\exists_L) , $\vdash_{FIL1} \exists x A(x)(n), \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$. No caso de um Δ_i no qual não ocorre o índice n, pela H.I. temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j/S_j$.

$$R = (\forall_L) \quad \frac{\pi \quad A(t)(n), \Gamma \Rightarrow \Delta/S}{\forall x A(x)(n), \Gamma \Rightarrow \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n} (\forall_L)$$

Idem ao caso anterior.

$$R = (\forall_R) \quad \frac{\pi \quad \Gamma \Rightarrow [A(a)/S^1], \Delta/S}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)/S^1, \Delta_1/S_1, \dots, \Delta_n/S_n} (\forall_R)$$

(onde ‘a’ não pertence ao seqüente inferior)

Temos duas possibilidades:

- (a) Se $A(a)$ é uma W-fórmula que ocorre num Δ_i , então pela H.I. $\Gamma \Rightarrow \Delta_i$. Pelo lema 7, existe uma π' do seqüente $\Gamma_i^{-w} \Rightarrow \Delta_i^{-w}/S^{-w}$ onde a fórmula universal pode ser introduzida diretamente por (W_R) .

$$\frac{\pi \quad \Gamma_i^{-w} \Rightarrow \Delta_i^{-w}/S^{-w}}{\Gamma_i^{-w} \Rightarrow [\forall x A(x)/\{\}^*], \Delta_i^\circ/S_i^{-w}} (W_R) \\ \frac{}{\Gamma_i^\circ \Rightarrow [\forall x A(x)/S^{1*}], \Delta_i^\circ/S_i^\circ} (W_R)$$

onde Γ_i° é o resultado de tirar de Γ todas as W-fórmulas e reintroduzir somente aquelas cujos índices estavam em $[\forall x A(x)/S^{1*}], \Delta_i^\circ$

- (b) Se S^1 não é um W-conjunto então aplicamos a H.I. à premissa e temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow A(a)/S^1$ (onde a fórmula $\Delta_i = A(a)$) e por (\forall_R) temos $\vdash_{FIL1} \Gamma_i \Rightarrow \forall x A(x)/S^1$ onde Γ_i tem somente as hipóteses das quais $\forall x A(x)$ depende.

R = Corte

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A/S, \Delta \quad A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|S]} (Corte)$$

Revisamos os seguintes casos:

- (a) Consideremos um Δ_i da conclusão. Se Δ_i é um subconjunto do conjunto Δ' na premissa direita, então ela não depende da fórmula $A(n)$ e pela

H.I. temos $\vdash_{FIL1} \Gamma'_i \Rightarrow \Delta'_i$ que cumpre o lema. Nótese que isto inclui o caso de que a fórmula $A(n)$ seja uma W-fórmula cujo índice não foi colocado no sucedente. Portanto, na aplicação do corte não se recebem índices da premissa esquerda).

- (b) Consideremos agora a mesma possibilidade mas em relação a premissa esquerda, ou seja, que o conjunto Δ_i na conclusão é um subconjunto do conjunto Δ na premissa esquerda que não contém a fórmula de corte. Então, temo pela H.I. obtemos $\vdash_{FIL1} \Gamma_j \Rightarrow \Delta_j$ que cumpre o lema.
- (c) Consideremos o caso em que um $S_i = S^1 \cap (S_j \subseteq S) \cap S'$ tal que $\Delta_j \cup \Delta \neq \emptyset$. (inclui o caso em que S^1 é um W-conjunto e portanto seus índices podem ser colocados em Δ_j). Então pela H.I. temos $\Gamma_j \Rightarrow \Delta_j/S_j, A/S_1$. Então, podemos aplicar um corte com a premissa esquerda $A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. Isto resulta no seqüente $\Gamma_j, \Gamma'_i \Rightarrow \Delta_j \Delta' / S' [n | S^1]$ cumprindo o lema.

Vemos que, no caso de que as duas fórmulas de corte sejam W-fórmulas e o índice da fórmula de corte na premissa direita não ocorre no sucedente da premissa, então não tem Δ_i na conclusão que contenha índices das duas premissas.

Como referimos, o lema é formulado para multiconjuntos o que facilita a agrupação das fórmulas segundo as relações de interseção dos seus conjuntos de dependência. Mas vejamos que, no caso de fazer uma versão deste lema com seqüências de fórmulas (onde fato necessário para que as indicações do corte indexado tenham sentido) não tem obstáculo maior. Apresentamos cómo consideraríamos o tratamento do corte indexado.

R = Corte indexado.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma'^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta''} < A; n_1, \dots, n_k; m_1, \dots, m_j >$$

onde $< A; n_1, \dots, n_k; m_1, \dots, m_j >$ significa que a fórmula do corte A é retirada de Δ nas posições n_1, \dots, n_k e em Γ' é retirada nas posições m_1, \dots, m_j . O corte indexado é uma variação do mix onde podemos escolher as ocorrências que queremos deletar em vez de cortar todas elas como o faz a regra do mix. Este caso é equivalente ao corte e ao mix que resultam casos particulares dele.

O estudo deste caso é análogo ao corte. A diferença consiste em que, cada vez que mencionamos na prova acima a ocorrência da fórmula de corte, devemos pensar no grupo de fórmulas do corte indexado indicadas para serem cortadas.

Por exemplo, no caso (a) devemos considerar que o Δ_i das premissas não depende de nenhuma ocorrência da fórmula de corte que esteja indicada. Disto se conclui que no Δ_i podem ocorrer as ocorrências da fórmula de corte que não tenham sido cortadas nessa aplicação.

□

Lema 9 *Seja π uma derivação em FIL1 de $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Então, existe uma derivação π' de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em FIL1 tal que toda aplicação de (\forall_R) em π' tem apenas uma fórmula no sucedente da premissa.*

Prova.

Oferecemos um procedimento que, para cada derivação de FIL1, vai recorrendo a derivação fazendo a transformação de todas as aplicações da regra (\forall_R) . Consideramos os dois casos possíveis: quando a fórmula ativa é uma W-fórmula fazendo uso do lema 7 e o caso em que a fórmula ativa não é uma W-fórmula fazendo uso do lema 8. Com estas duas técnicas recuperamos sempre as mesmas relações de dependência.

Consideremos uma derivação π onde R é a última regra aplicada e $R = (\forall_R)$:

$$\frac{\pi \quad \Gamma \Rightarrow A(a)^j/S^j, \Delta/S}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)^j/S^j, \Delta/S} (\forall_R)$$

na qual temos duas possibilidades:

- (a) Consideremos que $A(a)$ é uma W-fórmula no seqüente $\Gamma \Rightarrow A(a)^j/S^j, \Delta/S$. Então, pelo lema 7, existe uma derivação π' do seqüente $\Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}/S^{-w}$ a partir da qual podemos recuperar o seqüente final de π :

$$\frac{\pi' \quad \Gamma^{-w} \Rightarrow \Delta^{-w}/S^{-w}}{\Gamma^{-w} \Rightarrow \forall x A(x)/\{\}^*, \Delta/S^{-w}} (W_R) \\ \frac{}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)/S^{1*}, \Delta/S} (W_L)$$

Tenhamos em conta que um W-conjunto sempre pode se deixar vazio. É suficiente com não introduzir índices nele pela aplicação de (W_L) . Deste modo cumpre o requerimento da regra de ser disjunto do resto.

- (b) $A(a)$ não é uma W-fórmula no seqüente $\Gamma \Rightarrow A(a)^j/S^j, \Delta/S$. Como a última regra de inferência em π é (\forall_R) sabemos que $(S^j \cap S) = \emptyset$. Portanto, pelo lema 8 temos uma derivação π' do seqüente $\Gamma_i \Rightarrow A(a)^j/S_i^j$ tal que

Γ_i tem as hipóteses das quais o submulticonjunto $\{A(a)\}$ depende:

$$\begin{array}{c} \pi' \\ \frac{\Gamma_i \Rightarrow A(a)^j / S_i^j}{\Gamma_i \Rightarrow \forall x A(x)^j / S_i^j} (\forall_R) \\ \frac{\Gamma_i \Rightarrow \forall x A(x)^j / S_i^j, \Delta / \{\}}{\Gamma_i \Rightarrow \forall x A(x)^j / S_i^j, \Delta / \{\}}^* (W_R) \\ \frac{\Gamma_i \Rightarrow \forall x A(x)^j / S_i^j, \Delta / \{\}}{(\Gamma - \Gamma_i), \Gamma_i \Rightarrow \forall x A(x)^j / S_i^j, \Delta / S^*} (W_{L,R}) \end{array}$$

onde as relações de dependência são as mesmas e a premissa de (\forall_R) tem somente uma fórmula.

□

Revisemos agora o motivo para formular de modo excepcional às regras de corte e (\rightarrow_L) . Consideremos o seguinte exemplo:

$$\frac{\frac{A(1) \Rightarrow A / \{1\}}{A(1) \Rightarrow A / \{1\}, C / \{\}}^* (W_R) \quad \frac{B(a)(2) \Rightarrow B(a) / \{2\}}{\forall x B(x)(2) \Rightarrow B(a) / \{2\}} (\forall_L)}{A(1), (C \rightarrow \forall x B(x))(2) \Rightarrow A / \{1\}, B(a) / \{2\}} (\rightarrow_L)$$

Pela regra de (\forall_R) a fórmula $B(a)$ na conclusão poderia ser quantificada mas, pelo lema 8, o seqüente $(C \rightarrow \forall x B(x))(2) \Rightarrow B(a) / \{2\}$ seria considerado derivável. Com a notação específica para este caso, o seqüente $A(1), (C \rightarrow \forall x B(x))(2) \Rightarrow A / \{1\}, B(a) / \{2\}^*$ não seria fracionável pelo lema 9. Então, a justificativa para quantificar a fórmula $B(a) / \{2\}^*$ deveria ser feita pelo lema 8. Com este lema se afirma que existe uma derivação do seqüente $A(1), (C \rightarrow \forall x B(x))(2) \Rightarrow A / \{1\}$ onde o seqüente final não tem W-fórmulas. De modo geral, um seqüente da forma $A(1), B(2) \Rightarrow A / \{1\}$ sem W-fórmulas pode ser derivado sem usar um axioma com mais de uma fórmula no sucedente:

$$\frac{\frac{A(1) \Rightarrow A / \{1\}}{B(2) \Rightarrow B / \{2\}, A(1) \Rightarrow A / \{1\}} (W_R)}{\frac{B(2), A(1) \Rightarrow A / \{1\}}{A(1), B(2) \Rightarrow A / \{1\}} (E_L)} (corte)$$

Considerando que os problemas com corte e (\rightarrow_L) radicam nos casos em que a fórmula ativa na premissa direita é uma W-fórmula, trabalhamos com cortes onde a fórmula activa na premissa direita é uma W-fórmula com a qual a operação entre conjuntos não se encontra nos casos especiais.

Pelos lemas 7-9, demostramos que as derivações de FIL1 com regras de sucedente múltiplo podem ser transformadas em derivações onde aplicações de (\forall_R) tem somente uma fórmula na premissa. Seguindo o trabalho de Kashima e Shimura, veremos que, tendo em conta as relações de dependência, se um

seqüente $\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta$ é derivável (onde Δ não depende da fórmula A), então temos uma derivação do seqüente $\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B), \Delta$. Como resultado, as derivações de sucedente múltiplo terão sucedente único nas premissas de (\forall_R) e também de (\rightarrow_R) de igual modo que no sistema $IL^>$ (se apagamos a informação sobre as relações de dependência).

Definição 18 (Partição) *Seja $\Gamma \Rightarrow \Delta$ um seqüente onde Γ e Δ são multiconjuntos. $\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0; \Delta_1$ é uma partição (\wp) de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tal que Γ_i ($i=0,1$) é um submulticonjunto de Γ e Δ_i é um submulticonjunto de Δ . Poderemos explicitar nessa partição as coleções de conjuntos de dependência da seguinte maneira $\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0/S_0; \Delta_1/S_1$*

Notação 2 *Nos seqüentes a seguir poderemos abreviar com o símbolo $\{\Gamma; \Delta\}$ a fórmula $(\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta)$ que é a interpretação padrão de um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$.*

Segundo a definição de *partição* a separação entre Γ_0 e Γ_1 é feita por “;”. Poderemos referir a esses sectores de Γ e Δ como ‘parte 0’ ou ‘parte 1’ ou ‘sector 0’ ou ‘sector 1’. Para ressaltar alguma fórmula A desses conjuntos, escreveremos $\Gamma_0, A(n); \Gamma_1$, podendo também escrever $A(n); \Gamma_1$ quando $A(n)$ é a única fórmula de Γ_0 . Mesmo caso para o sucedente. Para referir às relações de dependência usaremos o mesmo símbolo usado por Kashima e Shimura para seu conceito de *conexão* entre fórmulas, $\Gamma_i \sim \Delta_i$ que representa que no mínimo uma das fórmulas de Δ_i depende das fórmula de Γ_i ou mais especificamente a relação de um conjunto de fórmulas com uma fórmula específica: $\Gamma_i \sim A$.

Lema 10 *Seja π uma prova do seqüente $S = \Gamma \Rightarrow \Delta$ em FIL1 onde as premissas de todas as aplicações de (\forall_R) têm somente uma fórmula no sucedente. Seja $\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0/S_0; \Delta_1/S_1$ uma partição de S tal que os índices das fórmulas de Γ_1 não ocorrem em S_0 . Então podemos construir uma derivação π' do seqüente $S' \equiv \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge(\Gamma_1) \rightarrow \bigvee(\Delta_1))$ em FIL1 onde:*

- (i) *Se δ_0 depende de γ_0 no seqüente S' , então δ_0 depende da mesma fórmula γ_0 no seqüente S .*
- (ii) *Se $(\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)$ depende de uma fórmula γ_0 no seqüente S' , então tem uma fórmula δ_1 que depende da mesma fórmula γ_0 em S .*
- (iii) *Toda aplicação de (\rightarrow_R) em π' tem somente uma fórmula no sucedente*

A prova da correção para um conjunto com relações de dependência foi realizada por Kashima e Shimura em duas versões. A primeira corresponde ao artigo de Kashima do ano 1991 onde faz uma versão generalizada do lema. No

texto realizado em 1994 conjuntamente com Shimura pode-se apreciar também o uso de um lema com o mesmo espírito que nosso lema 9³. No caso de $\bigwedge \Gamma$ ser vazio seria interpretado, no estilo Kashima e Shimura como $\perp \rightarrow \perp$, assim como no caso de $\bigvee \Delta$ ser vazio também poderia ser interpretado como \perp . Como se poderá ver, na análise de alguns casos o condicional formado $(\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)$ seria uma fórmula do tipo $((\perp \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$, segundo a interpretação no primeiro artigo de Kashima onde se trabalha uma versão generalizada do lema. Para nosso caso não é necessário.

A divisão do seqüente segundo as relações de dependência permite provar que, respeitando as relações de dependência entre as fórmulas que são indicadas na regra (\rightarrow_R) , seja qual for a regra anterior aplicada, o condicional pode ser introduzido. A idéia pode ser detalhada da seguinte maneira. Consideremos uma derivação do seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ expressado como a partição $\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0; \Delta_1$ e escrevemos uma só premissa para simplificar:

$$\frac{\begin{array}{c} \pi' \\ \vdots \\ \Gamma_0^\circ; \Gamma_1^\circ \Rightarrow \Delta_0^\circ; \Delta_1^\circ \end{array}}{\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0; \Delta_1} (R)$$

$$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)$$

Pelo lema, seja qual for a fórmula introduzida por (R), no sistema de sucedente múltiple FIL1 poderemos introduzir um condicional com a regra (\rightarrow_R) de sucedente único e obter todo seqüente de sucedente múltiple derivável em FIL1. Se pela regra (R) temos introduzido uma fórmula à esquerda cujo índice não ocorre em Δ_0 , ela poderá ser usada como hipótese de um condicional à direita. Também, se a regra (R) introduz uma fórmula à direita e o resto do sucedente não depende de hipóteses em Γ_1 , então essa fórmula introduzida poderá ser usada como sucedente de um condicional de antecedente $\bigwedge \Gamma_1$. Percebe-se o fato de que se uma fórmula está em Γ_0 ela não está proibida de ser utilizada como antecedente; simplesmente ela não é usada. Qualquer fórmula que cumpra essas condições pode, mas não necessariamente, ser usada na introdução do condicional. A necessidade de trabalhar com um multiconjunto de fórmulas do sucedente que não depende de um submulticonjunto de fórmulas no antecedente corresponde à utilização da H.I. nos casos de (\wedge_R) e (\vee_R) em cujas premissas temos mais de uma fórmula.

³O texto do lema 4.5 na pag. 163 afirma: *If $S = \Gamma \Rightarrow \Delta$ is provable in $CLDS'$ and $\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta$ is a partition of S where $\Gamma_1 \sim \Delta$, then $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta$ is provable in $CLDS'$, where the connections between Γ_0 and Δ are the same as at S*

Portanto para uma fórmula A principal que tem sido introduzida à esquerda, consideraremos os casos em que ela está em Γ_0 e o caso em que está em Γ_1 . No caso da fórmula ser introduzida à direita, temos também a possibilidade de que esteja em Δ_0 e o caso de que esteja em Δ_1 . A prova é uma indução sobre derivações e portanto na consideração das premissas deveremos considerar como subcasos, a possibilidade de que uma fórmula activa esteja na ‘parte 0’ do multiconjunto e a outra fórmula activa da mesma aplicação esteja na ‘parte 1’.

Tenhamos em conta também que os teoremas e as fórmulas introduzidas por enfraquecimento não estão vinculadas a nenhuma fórmula. Desse modo cumprem com a condição do lema de não se encontrar no caso proibido. Desenvolveremos os casos mais importantes e, por temas de espaço, a menos que seja necessário, não anotaremos as relações de dependência.

Prova

1. $\pi = A(n) \Rightarrow A/\{n\}$.

Como neste caso a fórmula do sucedente sempre está vinculada à do antecedente não é possível que $A(n)$ esteja em Γ_1 e $A/\{n\}$ esteja em Δ_0 . O condicional sempre pode ser introduzido e podemos obter uma π' :

$$\frac{A(n) \Rightarrow A/\{n\}}{\Rightarrow (A \rightarrow A)\{n\}} (\rightarrow_R)$$

2. $\pi = \perp(n) \Rightarrow A_1/\{n\}, \dots, A_k/\{n\}$.

O sucedente do \perp -axioma não pode ser fracionado. Então, π' tem a forma:

$$\frac{\frac{\perp(n) \Rightarrow A_1/\{n\}, \dots, A_k/\{n\}}{\perp(n) \Rightarrow (A_1 \vee \dots \vee A_k)/\{n\}} (\vee_R)}{\Rightarrow (\perp(n) \rightarrow (A_1 \vee \dots \vee A_k)/\{n\})} (\rightarrow_R)$$

H.I. Seja π uma derivação de $S = \Gamma \Rightarrow \Delta$ tal que $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é premissa da regra R. Então, existe π' de $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)$ onde Γ_1 são hipóteses de S cujos índices não ocorrem nos conjuntos de dependência de Δ_0 .

3. $\mathbf{R} = (W_L)$

$$\frac{\pi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta}{A(n^*), \Gamma \Rightarrow \Delta^\circ} (W_L)$$

3.1. $\wp = A(n^*), \Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0^\circ; \Delta_1^\circ$.

(W_L) não altera ao conjunto Γ mas pode ter variações nos conjuntos de

dependência de Δ . Dada a premissa $\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0; \Delta_1$, temos uma π' de $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0; (\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta_1)$ pela H.I. De acordo com as possibilidades da regra podemos ter diferentes resultados.

3.1.1. O índice n^* foi colocado em algum conjunto de dependência de Δ_0/S_0 .

$$\frac{\pi' \quad \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0/S_0; (\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta_1)}{A(n^*), \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0/S_0 \cup \{n^*\}; (\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta_1)}$$

3.1.2. O índice n^* foi colocado em algum conjunto de dependência de Δ_1/S_1 .

Como o índice n^* é novo e diferente ao respeito dos índices das fórmulas de Γ , se ele é introduzido em algum conjunto de S_1 , ele permanecerá nesse conjunto depois da aplicação da regra (\rightarrow_R). Portanto podemos colocar ele no conjunto de dependência do condicional formado.

$$\frac{\pi' \quad \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0; (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)/S_1}{A(n^*), \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0; (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)/(S_1 \cup \{n^*\})}$$

3.1.3. O índice n^* foi colocado em Δ_0/S_0 e em Δ_1/S_1 .

$$\frac{\pi' \quad \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0/S_0; (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)/S_1}{A(n^*), \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0/(S_0 \cup \{n^*\}); (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)/(S_1 \cup \{n^*\})}$$

3.1.4. O índice n^* não foi colocado em nenhum conjunto de dependência do sucedente. Neste caso, as relações de dependência não tem variação entre premissa e conclusão. Portanto, aplicando a H.I. à partição da premissa $\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0; \Delta_1$ temos:

$$\frac{\pi' \quad \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0/S_0; (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)/S_1}{A(n^*), \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0/S_0; (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)/S_1}$$

3.2. $\varphi = \Gamma_0; \Gamma_1, A(n^*) \Rightarrow \Delta_0; \Delta_1$.

Pela H.I. temos π' de $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)$. Como as fórmulas de Δ_0 não dependem das fórmulas de Γ_1 pelas condições do lema, o índice n^* não pode estar em conjuntos de S_0 , somente em S_1 .

Pela H.I. temos:

$$\Gamma_0, A(n) \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \text{ e}$$

$$\Gamma'_0, B(m) \Rightarrow \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1).$$

Por (\vee_L) obtemos:

$$\Gamma_0, \Gamma'_0, (A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_0, \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1), (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1).$$

Necessitamos obter:

$$\Gamma_0, \Gamma'_0, (A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_0, \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma_1 \wedge \bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1 \vee \bigvee \Delta'_1).$$

Consideremos que temos a seguinte derivação π :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\bigwedge \Gamma_1 \Rightarrow \bigwedge \Gamma_1 \quad \bigvee \Delta_1 \Rightarrow \bigvee \Delta_1}{\bigwedge \Gamma_1, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \Rightarrow \bigvee \Delta_1} (\rightarrow_L)}{\bigwedge \Gamma_1, \bigwedge \Gamma'_1, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \vee (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1) \Rightarrow \bigvee \Delta_1, \bigvee \Delta'_1} (\vee_L)}{\bigwedge \Gamma_1, \bigwedge \Gamma'_1, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \vee (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1) \Rightarrow \bigvee \Delta_1 \vee \bigvee \Delta'_1} (\vee_R)}{\frac{\bigwedge \Gamma_1 \wedge \bigwedge \Gamma'_1, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \vee (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1) \Rightarrow \bigvee \Delta_1 \vee \bigvee \Delta'_1} (\wedge_L)}{\bigwedge \Gamma_1 \wedge \bigwedge \Gamma'_1, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \vee (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1) \Rightarrow \bigvee \Delta_1 \vee \bigvee \Delta'_1} (\rightarrow_R)}{(\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \vee (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1) \Rightarrow \bigwedge \Gamma_1 \wedge \bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1 \vee \bigvee \Delta'_1} (\rightarrow_R)$$

Podemos utilizar essa derivação aplicando um corte com o seqüente obtido antes $\Gamma_0, \Gamma'_0, (A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_0, \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1), (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1)$ do seguinte modo ⁴:

$$\frac{\Gamma_0, \Gamma'_0, (A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_0, \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \vee (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1) \quad \pi}{\Gamma_0, \Gamma'_0, (A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_0, \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma_1 \wedge \bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1 \vee \bigvee \Delta'_1)} (\text{corte})$$

6.1.2. Caso em que uma fórmula ativa está na parte 0

Consideremos o caso em que $A(n)$ está na parte 0 da premissa esquerda e $B(m)$ está na parte 1 da premissa direita. Pela H.I. temos:

$$\Gamma_0, A(n) \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \text{ e } \Gamma'_0 \Rightarrow \Delta'_0, ((\bigwedge \Gamma'_1 \wedge B) \rightarrow \bigvee \Delta'_1).$$

Consideremos a seguinte derivação π :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\bigwedge \Gamma'_1 \Rightarrow \bigwedge \Gamma'_1 \quad B \Rightarrow B}{\bigwedge \Gamma'_1, B \Rightarrow \bigwedge \Gamma'_1 \wedge B} (\wedge_R)}{\bigwedge \Gamma'_1, B \Rightarrow \bigwedge \Gamma'_1 \wedge B \quad \bigvee \Delta'_1 \Rightarrow \bigvee \Delta'_1} (\rightarrow_L)}{(\bigwedge \Gamma'_1 \wedge B) \rightarrow \bigvee \Delta'_1, \bigwedge \Gamma'_1, B \Rightarrow \bigvee \Delta'_1} (\rightarrow_R)}{\frac{\Gamma'_0 \Rightarrow \Delta'_0, ((\bigwedge \Gamma'_1 \wedge B) \rightarrow \bigvee \Delta'_1)}{\bigvee \Delta'_0 \Rightarrow \Delta'_0} (\vee_R) \quad \frac{\bigvee \Delta'_0 \Rightarrow \Delta'_0 \quad (\bigwedge \Gamma'_1 \wedge B) \rightarrow \bigvee \Delta'_1, B \Rightarrow \bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1} (\vee_L)}{\Gamma'_0 \Rightarrow \bigvee \Delta'_0 \vee ((\bigwedge \Gamma'_1 \wedge B) \rightarrow \bigvee \Delta'_1)} (\vee_L)}{\Gamma'_0, B \Rightarrow \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1)} (\text{cut})$$

Utilizando o seqüente já obtido $(\Gamma_0, A(n) \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1))$ e a derivação

⁴A única razão para dividir em subderivações é a falta de espaço

podemos aplicar (\vee_L) :

$$\frac{\Gamma_0, A(n) \Rightarrow \Delta_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1) \quad \pi}{\Gamma_0, \Gamma'_0, (A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_0, \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1), (\bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta'_1)} (\vee_L)$$

Com esta nova conclusão podemos proceder como no caso 6.1.1. e obter o seqüente: $\Gamma_0, \Gamma'_0, (A \vee B)(k) \Rightarrow \Delta_0, \Delta'_0, (\bigwedge \Gamma_1 \wedge \bigwedge \Gamma'_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1 \vee \bigvee \Delta'_1)$.

Para o caso da (\vee_L) se analisa de modo similar a partição $\wp = \Gamma_0; (A \vee B)(k), \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_0; \Delta_1$. Como Δ_0 não depende da disjunção, pode-se usar e obter: $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0; ((A \vee B) \wedge \bigwedge \Gamma_1) \rightarrow \Delta_1$.

Vejamos como se desenvolve o caso da regra do condicional. Lembremos que as aplicações tem somente uma fórmula no sucedente. O fato de ter somente uma fórmula no sucedente não significa que todas as fórmulas do antecedente estejam vinculadas a ela, tal o caso de W-fórmulas se na aplicação de (W_L) não colocaram o índice no conjunto de dependência do sucedente. Por isso continuamos fazendo a partição do antecedente nestes casos.

7. R = (\rightarrow_R) .

7.1. $\wp = \Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow (A \rightarrow B)$ onde $(A \rightarrow B) = \Delta_0$.

Nóte-se que, como Δ_1 é vacío $(A \rightarrow B)$ não depende de Γ_1 podemos fazer uso do lema 9 e obter o seqüente $\Gamma_0 \Rightarrow (A \rightarrow B)$. Por (W_R) temos $\Gamma_0 \Rightarrow (A \rightarrow B); (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1)$ ⁵.

7.2. $\wp = \Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow (A \rightarrow B)$ onde $(A \rightarrow B) = \Delta_1$. Pode ser resolvido com a seguinte derivação:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma_0; A, \Gamma_1 \Rightarrow B}{\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow (A \rightarrow B)} (\rightarrow_R)}{\Gamma_0; \bigwedge \Gamma_1 \Rightarrow (A \rightarrow B)} (\rightarrow_R)}{\Gamma_0 \Rightarrow \bigwedge \Gamma_1 \rightarrow (A \rightarrow B)} (\rightarrow_R)$$

8. R = (\forall_R) .

8.1 $\wp = \Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow \forall x A(x)$ onde $\forall x A(x) = \Delta_1$ Como a regra não faz mudanças nas relações de dependência, se $\forall x A(x)$ está no setor 1 da conclusão, $A(a)$ está no setor 1 da premissa. Portanto, podemos proceder do seguinte modo:

⁵Kashima e Shimura têm um lema com o espírito similar ao nosso lema 7 e que permite isolar as hipóteses que não são usadas e pode-se ver na pág. 163 do artigo de 1994.

$$\pi'$$

$$\frac{\Gamma_0; \Gamma_1 \Rightarrow A(a)}{\Gamma_0; \bigwedge \Gamma_1 \Rightarrow A(a)} (\wedge_L)$$

$$\frac{\Gamma_0; \bigwedge \Gamma_1 \Rightarrow \forall x A(x)}{\Gamma_0; \bigwedge \Gamma_1 \Rightarrow \forall x A(x)} (\forall_R)$$

$$\frac{\Gamma_0 \Rightarrow (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \forall x A(x))}{\Gamma_0 \Rightarrow (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \forall x A(x))} (\rightarrow_R)$$

8.2. Se consideramos que a fórmula universal está no setor Δ_0 , podemos novamente usar o lema 9 e derivar $\Gamma_0 \Rightarrow \forall x A(x), (\bigwedge \Gamma_1 \rightarrow \bigvee \Delta_1)$ aplicando (W_R) a partir do seqüente $\Gamma_0 \Rightarrow \forall x A(x)$.

Análise similar é feito para todas as permutações possíveis das conclusões das demais regras de inferência.

□

3.3

Eliminação do corte

Nesta seção provaremos a eliminação de corte para o sistema FIL1. Como dissemos antes, as provas de eliminação de corte no estilo de Gentzen são feitas via a eliminação do mix que permite eliminar todas as ocorrências da fórmula de corte na mesma aplicação resolvendo assim o problema da contração. Usaremos neste caso a regra do corte indexado, ou seja, a versão do corte à qual já referimos.

Definição 19 (Rank esquerdo) *O rank esquerdo é o maior número de seqüentes consecutivos tal que, o último seqüente é a premissa esquerda de uma aplicação do corte indexado e cada seqüente da seqüência tem no mínimo uma ocorrência da fórmula principal a ser eliminada nesse corte indexado.*

Definição 20 (Rank direito) *O rank direito é o maior número de seqüentes consecutivos tal que o último seqüente é a premissa direita de uma aplicação dos corte indexado e os demais seqüentes contém no antecedente alguma das ocorrências a ser eliminadas.*

Definição 21 (Rank de uma derivação) *O rank de uma derivação é a soma de seu rank direito e de seu rank esquerdo.*

Lema 11 *Seja π uma derivação do seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em FIL tal que:*

- (i) *a última regra aplicada em π é o corte indexado;*
- (ii) *não tem nenhuma outra aplicação do corte indexado em π .*

Então, π pode ser transformada numa derivação π' livre de corte indexado do mesmo seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Prova.

Seja α o grau da fórmula de corte e seja β o rank da mesma. A prova é realizada no estilo de Gentzen fazendo uma indução sobre o par (α, β) .

Desenvolvemos aqui os casos principais.

1. Casos base.

1.1. Rank direito = 1. A premissa direita do corte indexado é um seqüente inicial.

$$\frac{\pi_1 \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, A/S_1, \dots, A/S_k \quad A(n) \Rightarrow A/\{n\}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/\{n\}[n|(S_1 \cup \dots \cup S_k)]} < A; 1, \dots, k; 1 >$$

\mapsto

$$\frac{\pi'_1 \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, A/S_1, \dots, A/S_k}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/(S_1 \cup \dots \cup S_k)} (C_R)$$

1.2. Rank esquerdo = 1. A premissa superior esquerda é um seqüente inicial. Pode ser estudado com um argumento similar ao caso 1.1.

1.3. Rank direito = 1. A fórmula do corte indexado na premissa direita foi introduzida por (W_L) .

$$\frac{\pi_1 \quad \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'^{\circ}} (W_L)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta^{\circ}, \Delta'^{\circ}[n|S_{n_1} \cup \dots \cup S_{n_k}]} < A; n_1, \dots, n_k; 1 >$$

\mapsto

$$\frac{\pi_2 \quad \frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} (W_R)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta^{\circ}, \Delta'} (W_L)$$

1.4. Rank esquerdo = 1. A fórmula do corte na premissa esquerda foi introduzida por (W_R) .

Similar ao caso 1.3.

2. Casos especiais: Mostramos como com as relações de dependência, no caso

de FIL1 não temos os problemas ocasionados com as restrições na cardinalidade do sucedente da regra de (\rightarrow_R) como acontece em LJ' e $IL^>$. Portanto, na parte proposicional, uma prova no estilo Gentzen pode ser realizada sem problemas. (Consideramos a modo de exemplo o caso em que a fórmula de corte é uma disjunção).

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S^1, B/S^2} \quad (\forall_R) \quad \frac{\pi_2}{(A \vee B)(n), \Gamma', C(m) \Rightarrow \Delta', D/(S^3 \cup \{n, m\})} \quad (\rightarrow_R)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)/(S^1 \cup S^2) \quad (A \vee B)(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta, (C \rightarrow D)/(S^3 \cup \{n\})} < (A \vee B); 1; 1 > \\ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|(S^1 \cup S^2)], (C \rightarrow D)/S^3[n|(S^1 \cup S^2)]$$

\mapsto

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A/S^1, B/S^2} \quad (\forall_R) \quad \frac{\pi_2}{(A \vee B)(n), \Gamma', C(m) \Rightarrow \Delta', D/(S^3 \cup \{m, n\})} < (A \vee B); 1; 1 >}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|(S^1 \cup S^2)], D/(S^3 \cup \{m\})[n|(S^1 \cup S^2)]} \quad (\rightarrow_R) \\ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'[n|(S^1 \cup S^2)], (C \rightarrow D)/S^3[n|(S^1 \cup S^2)]$$

Se a fórmula $C(m)$ é utilizada numa aplicação de (\rightarrow_R) em π_2 então o índice m não ocorre em nenhum conjunto de dependência de Δ' . O índice m também é diferente dos índices da premissa esquerda por requerimento da regra de corte indexado. Logo, na derivação resultado da redução, m não ocorre em Δ nem em Δ' e pode ser usado depois do corte para formar o mesmo condicional. Consideremos agora a possibilidade de aplicar a mesma ideia ao caso do universal. Como veremos neste caso, as relações de dependência não nos ajudam imediatamente a fazer uma redução correta mas mostramos como isso é possível via o lema 8:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta/S, A/S^1, B/S^2} \quad (\forall_R) \quad \frac{\pi_2}{(A \vee B)(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'/S', C(a)/(S^3 \cup \{n\})} \quad (\forall_R)}{\Gamma \Rightarrow \Delta/S, (A \vee B)/(S^1 \cup S^2) \quad (A \vee B)(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta/S, \forall x C(x)/(S^3 \cup \{n\})} < (A \vee B); 1; 1 > \\ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta/S, \Delta'/S'[n|(S^1 \cup S^2)], \forall x C(x)/S^3[n|(S^1 \cup S^2)]$$

\mapsto

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta/S, A/S^1, B/S^2} \quad (\forall_R) \quad \frac{\pi_2}{(A \vee B)(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'/S', C(a)/(S^3 \cup \{n\})} < (A \vee B); 1; 1 >}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta/S, \Delta'/S', C(a)/S^3[n|(S^1 \cup S^2)]} \quad (\forall_R) \\ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta/S, \Delta'/S', \forall x C(x)/S^3[n|(S^1 \cup S^2)]$$

Percebe-se que esta redução não é correta já que, no caso do índice estar no conjunto de dependência de $C(a)$, isto é $(S^3 \cup \{n\})$, receberá os índices de $(S^1 \cup S^2)$ que não é necessariamente disjunto de Δ/S . Portanto, no sucedente da conclusão do corte, $(\Delta/S, \Delta'/S', C(a)/S^3[n|(S^1 \cup S^2)])$ o conjunto de dependência de $C(a)$ não resultaria disjunto de S fazendo incorreta a aplicação de (\forall_R) . Mas, via o lema 9 podemos fracionar a premissa e usar o seqüente que não depende da fórmula de corte. As restantes fórmulas da conclusão são introduzidas via enfraquecimento. Veremos mais adiante que esse processo pode ser aplicado para todas as regras.

Então, a partir da premissa $(A \vee B)(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta', C(a)$ vemos, via o lema 8, qual dos componentes do sucedente depende de $(A \vee B)(n)$, já que pela regra do universal, os conjuntos de ambos componentes são disjuntos. Neste caso, considerando que a fórmula $C(a)$ depende de $(A \vee B)(n)$ e pelo lema temos o seqüente $\Gamma^i \Rightarrow \Delta'_i/S_i$ onde S_i é disjunto do conjunto de dependência de $C(a)$. Portanto o índice n não ocorre em S_i nem nos conjuntos de dependência da premissa esquerda. Por $(W_{R,L})$ obtemos a conclusão do corte $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$. O mesmo podemos fazer se o é Δ_i que depende de $(A \vee B)(n)$. Nesse caso pelo lema 9, escolhemos diretamente um seqüente da forma $\Gamma_j \Rightarrow \forall x C(x)/S^3$ no qual Γ_j tem exactamente os índices que estão em S^3 e o índice n não pertence a S^3 .

2. Casos em que o Rank = 2.

2.1. A fórmula do corte é $(B \wedge C)$

$$\frac{\frac{\pi_1 \quad \pi_2}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A/S_1 \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, B/S_2} (\wedge_R) \quad \frac{\pi_3}{A(n), B(m), \Gamma' \Rightarrow \Delta'} (\wedge_L)}{\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, (A \wedge B)(S_1 \cup S_2) \quad (A \wedge B)(k), \Gamma' \Rightarrow \Delta'[\max(n, m)|k]}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta'[\max(n, m)|k][k|S_1 \cup S_2]} < (A \wedge B); 1; 1 >}$$

\mapsto

$$\frac{\frac{\pi_1 \quad \frac{\pi_2 \quad \pi_3}{\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, B/S_2 \quad B(m), A(n), \Gamma' \Rightarrow \Delta'} < B; 1; 1 >}{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A/S_1 \quad A(n), \Gamma_2, \Gamma' \Rightarrow \Delta'[\max(n, m)|k], \Delta_2} < A; 1; 1 >}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta'[\max(n, m)|k][k|S_1 \cup S_2]}$$

Rank > 2. Vejamos alguns casos com a regra de contração.

Caso (a).

$$\frac{\frac{\Gamma \Rightarrow A/S_1, A/S_2, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A/(S_1 \cup S_2), \Delta} (C_R) \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta^\circ, \Delta'} < A; 1, \dots, n_k; m_1, \dots, m_j >$$

⊢

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A/S_1, A/S_2, \Delta \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} < A; 1, 2, \dots, n_k; m_1, \dots, m_j >$$

Caso (b).

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \frac{A(n), A(m), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A(k), \Gamma' \Rightarrow \Delta'/S' \cup \{k\}} (C_L)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta^\circ, \Delta'} < A; n_1, \dots, n_k; 1, \dots, m_j >$$

⊢

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad A(n), A(m), \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta^\circ} < A; n_1, \dots, n_k; 1, 2, \dots, m_j >$$

□

Teorema 9 *Seja π uma derivação de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em FIL1. Então, ela pode ser transformada numa derivação π' livre de corte.*

Prova. Direto do lema 11.

3.3.1

Observações sobre a eliminação de cortes via lema 8.

Segundo apresentamos, o objetivo do lema 8 foi o de isolar submulti-conjuntos de fórmulas de um seqüente. Mas o mesmo lema tem revelado sua aplicabilidade para a eliminação dos cortes em sistemas nos quais as relações de dependência são marcadas.

A técnica Gentziana para eliminar os cortes, segundo explicamos e usamos, substitui uma aplicação da regra por outra(s) de rank menor até chegar ao caso atômico, ou seja, levando as aplicações do corte para cima. Via lema 8, uma aplicação pode ser diretamente eliminada acelerando o processo. Consideremos novamente o mesmo caso de aplicação da regra (\forall_R) a modo de exemplo:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta/S, A/S^1, B/S^2} (\forall_R) \quad \frac{\pi_2}{(A \vee B)(k), \Gamma' \Rightarrow \Delta'/S', C(a)/S^3} (\forall_R)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta/S, \Delta'/S', \forall x C(x)/S^3} (\text{corte})$$

Tenhamos em conta que se a regra (\forall_R) foi aplicada, então $S' \cap S^3 = \emptyset$. Então, tal como temos feito na prova, pelas restrições de (\forall_R) em FIL1, k ocorre ou em S' ou em S^3 . Suponhamos que k ocorre em S' . Então $C(a)$ não depende da fórmula de corte. Pelo lema 8 podemos ter uma π'_2 a partir da qual derivamos a conclusão sem corte:

$$\frac{\pi'_2}{\frac{\Gamma'_i \Rightarrow C(a)/S^3}{\Gamma'_i \Rightarrow \forall x C(x)/S^3} (\forall_R)}{\frac{\Gamma'_i \Rightarrow \Delta'/\{\}^*, \forall x C(x)/S^3}{(\Gamma' - \Gamma'_i), \Gamma'_i \Rightarrow \Delta'/S^*, \forall x C(x)/S^3} (W_R)} (W_L)$$

De modo similar, se o índice k ocorre em S^3 podemos construir uma outra derivação:

$$\frac{\pi''_2}{\frac{\Gamma'_j \Rightarrow \Delta'/S'}{\Gamma'_j \Rightarrow \Delta'/S', \forall x C(x)/\{\}^*} (W_R)}{(\Gamma' - \Gamma'_j), \Gamma'_j \Rightarrow \Delta'/S', \forall x C(x)/S^{3*}} (W_L)$$

Isto é, pelo lema 8, podemos, em alguns casos, obter diretamente a derivação sem corte em vez de subilo. O mesmo pode se fazer a partir da premissa esquerda. O que queremos ressaltar aqui é que isto pode ser generalizado às outras regras ou mesmo experimentado em outros sistemas que trabalhem com as relações de dependência. Revisemos alguns requerimentos para poder eliminar os cortes (ou mix ou corte indexado) deste modo:

- (a) Devemos poder obter a partir do lema submulticonjuntos estritos. Isto é, ou obter a partir da premissa esquerda um $\Delta_i \subset \Delta$ disjunto do resto e que todas as ocorrências que queremos eliminar da fórmula do corte estejam em $(\Delta - \Delta_i)$ ou obter a partir da premissa direita o resultado em que $\Gamma_j \subset \Gamma$ e, do mesmo modo, que todas as ocorrências que queremos eliminar estejam em $(\Gamma - \Gamma_j)$.
- (b) Se a obtenção de um seqüente sem a regra de corte não é possível usando o lema 8, então recorreremos a técnica gentziana.
- (c) Se é o caso em que alguma das premissas $(\Gamma \Rightarrow \Delta$ e $\Gamma' \Rightarrow \Delta')$ pode ser reduzida a um resultado com a forma $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i$ onde as ocorrências da fórmula de corte não ocorrem, então a conclusão do corte $(\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta')$ pode ser recuperada com as mesmas relações de dependência com enfraquecimento fazendo uso da colocação dos índices no sucedente:

$$\frac{\frac{\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i}{\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i, ((\Delta, \Delta') - \Delta_i)/\{\}}^* (W_R)}{((\Gamma, \Gamma') - \Gamma_i), \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i/S_i, ((\Delta, \Delta') - \Delta_i)/S^*} (W_L)$$

onde o conjunto S^* têm recebido os índices das fórmulas de $((\Gamma, \Gamma') - \Gamma_i)$ recuperando as relações de dependência da conclusão original.