1
Introdução

No início dos anos trinta, Gerhard Gentzen apresentou um sistema formal, denominado *Cálculo de Seqüentes*, para a obtenção de derivações normais. O sistema tinha uma simetria impossível de ser obtida na apresentação do sistema de Dedução Natural que tinha sido feita previamente também pelo próprio Gentzen. Essa simetria dos seqüentes clássicos tem resultado uma característica distintiva do Cálculo[1]. Quem não conhece em Teoria da Prova a inesquecível frase do próprio Gentzen sobre este sistema quando utilizado nas provas de consistência!:

> *"There exists complete symmetry between $\wedge$ and $\vee$, $\forall$ and $\exists$. All of the connectives $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, and $\neg$ have, to a large extent, equal status in the system; no connective ranks notably above any other connective. The special position of the negation, in particular, which constituted a troublesome exception in the natural calculus (...), has been completely removed in a seemingly magical way. The manner in which this observation is expressed is undoubtedly justified since I myself was completely surprised by this property of the 'LK-calculus' when first formulating that calculus. The 'law of the excluded middle´ and the 'elimination of the double negation´ are implicit in the new inference schemata´´.*[2]

Embora o Cálculo de Seqüentes tenha dominado as pesquisas em teoria da prova até a nova formulação do sistema de Dedução Natural em 1965, a versão intuicionista sofreu, por assim dizer, da falta dessa simetria que o diferenciava do sistema clássico:

> *"In the classical calculus NK the law of the excluded middle occupied a special place among the forms of inference (...), because it could not be integrated into our system of introductions and eliminations. In the classical calculus LK about to be presented, this*

[1]Devemos ter em conta que o interesse maior de Gentzen era um sistema clássico para provar a consistência da Aritmética de Peano.

[2]Gentzen,G. *The Collected Papers..., p.259. O que Gentzen manifesta aqui é o fato de que em seu sistema, o sucedente múltiplo permite a derivação do princípio de terceiro excluido.*

> *characteristic is removed. This is made possible by the admission of sequents with several formulae in the succedent, whereas the transition from the calculus NJ just described led only to sequents with one formula in the succedent.(...) The symmetry thus obtained is more suited to classical logic. On the other hand, the restriction to at most one formula in the succedent will be retained for the intuitionistic calculus LJ´´.*[3]

No trabalho de Gentzen, a diferença entre a versão clássica e intuicionista radica na cardinalidade do sucedente: seqüentes intuicionistas têm, no máximo, uma fórmula no sucedente. A maneira pela qual tem sido atenuada a associação entre os seqüentes de sucedente único e o carater intuicionista do sistema é um tema subjacente neste trabalho. As mudanças às quais iremos nos referir têm facilitado extraordinariamente a obtenção de resultados em teoría da prova.

A restrição feita globalmente aos seqüentes intuicionistas começou a ser substituída por restrições locais com a formulação do sistema LJ' apresentada por Maehara no ano de 1954. LJ' foi imediatamente aproveitado para o estudo das lógicas intermediárias entre a clássica e a intuicionista. A modo de exemplo, véja-se na bibliografia os trabalhos sobre lógicas intermediárias realizado por Umezawa e publicados já em 1959. Embora o artigo de Maehara não tenha sido traduzido do alemão, foi bem difundido nas obras de Dummett e Takeuti.

Ainda assim, LJ' mantinha uma restrição da cardinalidade de um modo localizado. Nas regras que introduzem a implicação, negação e universal as premissas deviam ter no máximo uma fórmula no sucedente. A simetria na cardinalidade dos seqüentes intuicionistas foi obtida totalmente com a formulação de sistemas que incorporaram informação sobre as relações de dependência entre as fórmulas do antecedente e do sucedente. A noção de dependência entre fórmulas restringe a manipulação das mesmas nas derivações de um sistema de um modo diferente a restrição da cardinalidade.

Uma história do estudo das conexões entre fórmulas numa determinada derivação nos remete a Dag Prawitz que, em seu livro *Natural Deduction* (1965), utiliza a relação de dependência entre fórmulas para estudar os sistemas modais. Casualmente, no mesmo ano é publicado o libro de Benson Mates "Elementary Logic"[4] que é em geral não é referido nas revisôes dos sistemas que trabalham con relações de dependência entre fórmulas. De fato, a versão de Mates para sistemas de Dedução Natural é ampliamente conhecido: as derivações não têm forma de árvore e são seqüencias de fórmulas numeradas. Cada uma delas tem o número de linha na qual ocorre, o nome da regra da qual

[3]Gentzen, G. *The Collected papers of..., p. 82.*
[4]Veja-se na bibliografia a sua tradução ao português "Lógica elementar".

é resultado com os números de linha nas quais se encontram nas premissas, mas agrega, além disso, um conjunto à esquerda do número de linea que é básicamente o número das premissas das quais essa fórmula depende.

Ainda assim, com esses antecedentes, a idéia começou a ser explorada de forma abundante apenas a partir de 1990. Em função de diferentes problemas aos quais referiremos em detahle, foram desenvolvidos sistemas que incorporam informação sobre o modo em que as fórmulas estão relacionadas numa derivação. Uma lista desses sistemas, incluiria, por exemplo, os seguintes trabalhos:

1 Hyland e de Paiva (Full Intuitionistci Linear Logic)

2 Kashima e Shimura (Constant Domain Logic)

3 Braüner e de Paiva (FILL, segunda versão)

4 Braüner (Lógica Modal S5)

5 De Paiva e Pereira (Full intuitionistic Logic)

6 Ludmilla Franklin (Dedução natural de múltiplas conclusões)

Sistemas como estes resultaram em uma nova maneira de assegurar o caráter intuicionista de um sistema. Assim, o estudo das relações de dependência tem estimulado a obtenção de resultados proofteoréticos num sistema particular, mas também podem nos oferecer uma nova forma de caraterizar e comprender as particularidades das diferentes lógicas.

Tomemos por exemplo o sistema FIL desenhado por Valéria de Paiva e Luiz Carlos Pereira. FIL foi elaborado para o fragmento proposicional preservando o caráter intuicionista com uma condição na regra $(\rightarrow_R)$, de modo tal, que os condicionais podem ser introduzidos respeitando determinadas restrições nas relações de dependência. Isto permite agregar à premissa da regra $(\rightarrow_R)$ um contexto Δ.

Em "Uma Breve Nota sobre o Condicional e Múltiplas Conclusões", Pereira destaca duas idéias manifestas em FIL. Em primeiro lugar, lembra o papel privilegiado do condicional: o fragmento implicacional é suficente para distinguir a lógica clássica da intuicionista, fato que não acontece com o fragmento $\{\vee, \wedge\}$ nem com o fragmento $\{\wedge, \neg\}$ que é completo classicamente. Em segundo lugar, a diferença entre a lógica clássica e a intuicionista pode ser observada nas hipóteses que cada lógica permite usar para a introdução do condicional.

O sistema FIL de De Paiva e Pereira constitui a base de nossa tese. No capítulo a seguir, realizamos uma revisão do trabalho de Gentzen junto à apresentação dos sistemas mais relevantes que foram desenvolvidos desde então para lidar com as restrições intuicionistas. Agregamos também alguns dos principais conceitos e propriedades envolvidos neste tipo sistema para uma melhor compreensão dos mesmos. No final, apresentaremos algumas das aplicações que estes sistemas de sucedente múltiplo têm permitido.

No capítulo 3 concentra-se a contribuição original de nossa tese. Realizamos uma extensão do sistema FIL para a lógica intuicionista de primeira ordem, sistema que denominamos 'FIL1' e, provamos que o mesmo é completo, correto e satisfaz o teorema de eliminação de corte. No apêndice incluímos os principais sistemas referidos ao longo da tese.