

4 Zona plástica equilibrada

As fronteiras elasto-plásticas calculada até agora a partir das soluções de Inglis e Westergaard não consideram a redistribuição das tensões devido ao escoamento do material dentro da zona plástica em volta da ponta da trinca. Assim as tensões continuam crescendo dentro da zona plástica como se ainda fossem lineares depois de excedido o limite de escoamento do material. Para resolver este problema, Irwin propôs limitar as tensões dentro da zona plástica, mas garantindo ao mesmo tempo o equilíbrio da peça, aumentando o tamanho da zona plástica para compensar a perda de força causada pela limitação das tensões dentro dela. A correção proposta por Irwin é discutida com suficiente profundidade na seção 2.2.7.

4.1. Zona plástica de Irwin

Na literatura a zona plástica corrigida de Irwin é calculada só na direção $\theta = 0^\circ$, e a sua fronteira elasto-plástica é representada traçando arbitrariamente um círculo com este diâmetro.

Mas é fácil completar a fronteira elasto-plástica de Irwin fazendo $\sigma_{Mises}(0 \leq r \leq Zp_{Irwin}, \theta) = S_E$ (ver Figura 2.13).

A partir dos resultados obtidos do cálculo da zona plástica de Williams (ver seção 3.2) pode-se achar a tensão σ_y que é atingida quando a tensão de Mises calculada a partir da solução de Williams iguala a resistência ao escoamento do material, isto é $\sigma_{Mises} = S_E$, substituindo $r = Zp_{Williams}$ na Equação (2.21):

$$\sigma_y(Zp_{Williams}, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot Zp_{Williams}}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right]. \quad (4.1)$$

Equilibrando as áreas azuis e vermelhas em baixo das duas curvas da Figura 2.13 temos:

$$\sigma_y(Zp_{Williams}, \theta) \cdot Zp_{Irwin} = \int_0^{Zp_{Williams}} \sigma_y(r, \theta) dr, \quad (4.2)$$

substituindo Equação (2.13) na Equação (4.2):

$$\sigma_y(Zp_{Williams}, \theta) \cdot Zp_{Irwin} = \int_0^{Zp_{Williams}} \left[\frac{K_I}{\sqrt{2\pi} \cdot r} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \right] dr; \quad (4.3)$$

resolvendo esta integral, após um pouco de álgebra pode-se obter:

$$Zp_{Irwin} = \frac{1}{\sigma_y(Zp_{Williams}, \theta)} \cdot \left[\frac{2 \cdot K_I \cdot r^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \right]_0^{Zp_{Williams}}, \quad (4.4)$$

então

$$Zp_{Irwin} = \frac{1}{\sigma_y(Zp_{Williams}, \theta)} \cdot \left[\frac{2 \cdot K_I \cdot (Zp_{Williams})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \right]. \quad (4.5)$$

Substituindo $K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a}$ da Equação (2.54) em (4.5) obtemos:

$$Zp_{Irwin} = \frac{1}{\sigma_y(Zp_{Williams}, \theta)} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \sigma_n \cdot (a \cdot Zp_{Williams})^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \right], \quad (4.6)$$

dividindo o valor de Zp_{Irwin} achado na Equação (4.6) por Zp_0 achado na Equação (2.69), pode-se mapear a zona plástica de Irwin adimensionalizada.

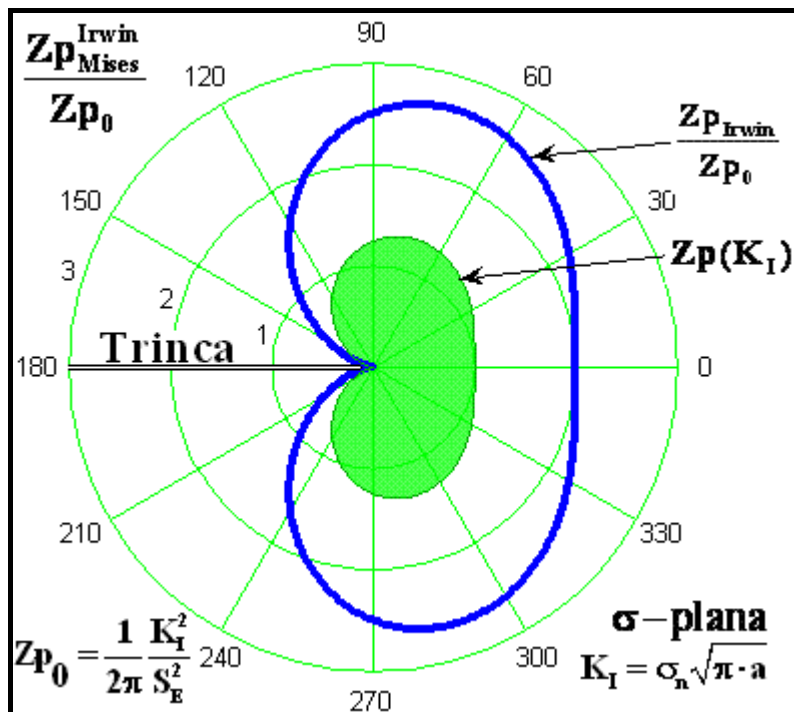


Figura 4.1 - Zona plástica de Irwin, em σ -plana .

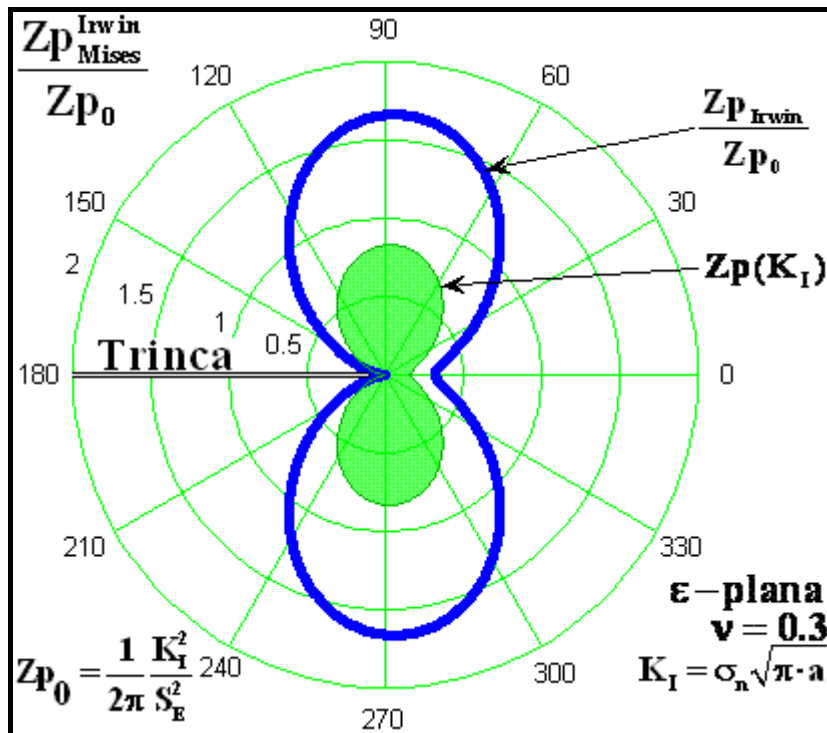


Figura 4.2 - Zona plástica de Irwin, em ϵ -plana .

4.2. Zona plástica equilibrada considerando o efeito da tensão nominal

Pode-se usar a mesma idéia de Irwin para corrigir a estimativa da zona plástica de Westergaard levando em conta o efeito da tensão nominal e obedecendo à condição de contorno $\sigma_y(x \rightarrow \infty, 0) = \sigma_n$.

Para mapear a zona plástica de Westergaard corrigida (ZpE), usa-se a solução de Westergaard completa e limita-se a tensão de Mises junto à ponta da trinca à tensão de escoamento do material $\sigma_{mises}(0 \leq r \leq ZpE_{Westergaard}, \theta) = S_E$, como apresentado na Figura 4.3.

Pode-se olhar que a tensão de Mises atinge a tensão de escoamento em qualquer θ quando $r = Zp_{Westergaard}$, então a componente σ_y , quando a tensão de Mises atinge o escoamento, é dada por:

$$\sigma_y(Zp_{West}, \theta) = \text{Re}(Z(Zp_{West}, \theta)) + \text{Im}(Z'(Zp_{West}, \theta)). \quad (4.7)$$

Equilibrando a área azul e vermelha na Figura 4.3 temos:

$$\sigma_y(Zp_{West}, \theta) \cdot ZpE_{Westergaard} = \int_0^{Zp_{West}} \sigma_y(r, \theta) dr, \quad (4.8)$$

substituindo σ_y da Equação (3.43) na Equação anterior temos:

$$\sigma_y(Zp_{West}, \theta) \cdot ZpE_{Westergaard} = \int_0^{Zp_{West}} [\operatorname{Re}(Z(r, \theta)) + y \operatorname{Im}(Z'(r, \theta))] dr \quad (4.9)$$

e por último colocando em evidencia ZpE temos:

$$ZpE_{Westergaard} = \frac{1}{\sigma_y(Zp_{West}, \theta)} \int_0^{Zp_{West}} [\operatorname{Re}(Z(r, \theta)) + y \operatorname{Im}(Z'(r, \theta))] dr. \quad (4.10)$$

Integrando numericamente a Equação (4.10) pode-se achar o valor de $ZpE_{Westergaard}$ para qualquer θ e mapear a zona plástica de Westergaard corrigida.

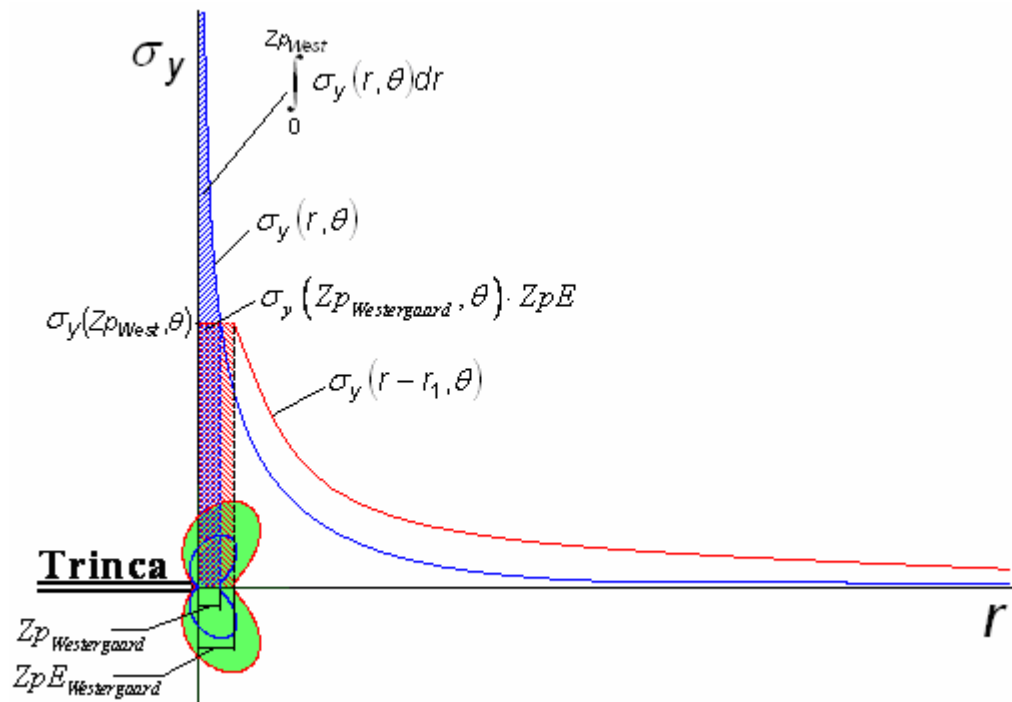


Figura 4.3 - Limitação da tensão dentro da zona plástica de Westergaard.

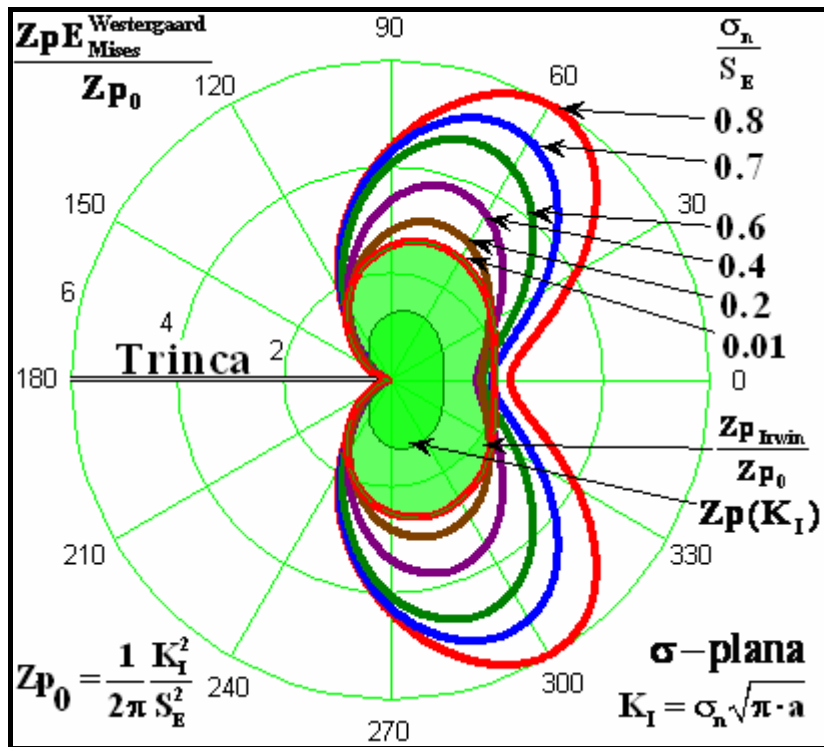


Figura 4.4 - Fronteira elastoplástica atendendo ao equilíbrio, em σ – plana .

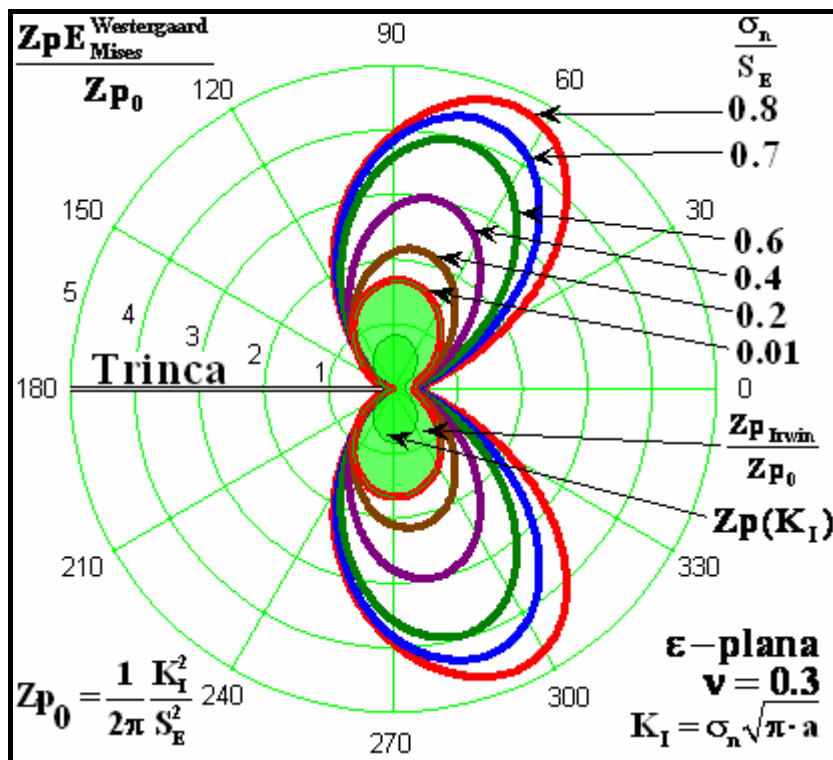


Figura 4.5 - Fronteira elastoplástica atendendo ao equilíbrio, em ϵ – plana .

σ_n/S_E	Tensão plana		Deformação plana	
	θ rad	θ graus	θ rad	θ graus
0,01	1,23	70,60	1,51	86,44
0,2	1,25	71,68	1,41	80,50
0,4	1,25	71,86	1,35	77,44
0,5	1,24	70,96	1,33	76,18
0,6	1,20	68,79	1,30	74,20
0,7	1,13	64,83	1,24	70,96
0,8	1,03	59,07	1,15	66,09
0,9	0,90	51,33	1,05	60,33

Tabela 1- Direção onde é mais comprida a zona plástica de Westergaard que atende o equilíbrio.