3
Influência da tensão nominal no tamanho e na forma da zona plástica

3.1. Estimativas tradicionais da zona plástica

A descrição tradicional do campo linear elástico em volta da ponta de uma trinca em qualquer peça linear elástica isotrópica e homogênea pode ser obtida através da solução de Williams (ver Equação 2.21) ou da solução de Westergaard (como será visto adiante). A zona plástica de Williams pode ser mapeada utilizando a Equação (2.67) para tensão plana e (2.68) para deformação plana. A seguir são apresentadas as zonas plásticas de Williams para tensão plana e para deformação plana, adimensionalizadas dividindo o tamanho da zona plástica ($Zp_{Williams}$) pelo tamanho da zona plástica em tensão plana quando $\theta = 0$ (Zp_0). Dividindo a Equação (2.67) pela (2.69) temos, para tensão plana:

$$\frac{Zp_{Mises}^{Williams}}{Zp_0} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 + 3\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{3.1}$$

e para deformação plana:

$$\frac{Zp_{Mises}^{Williams}}{Zp_0} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left[1 + 3\sin^2\frac{\theta}{2} - 4\nu(1-\nu)\right]. \tag{3.2}$$

Apesar de estas serem as zonas plásticas apresentadas em praticamente todos os livros-texto de Mecânica da Fratura, elas têm um problema sério que torna o seu uso no mínimo questionável: a tensão σ_y quando $x \to \infty$ tende a zero e não para σ_n como é na realidade. Por exemplo, uma placa de largura $2w$ com uma pequena trinca central $2a$ sujeita à tensão σ_n perpendicular à trinca (ver Figura 3.2) trabalha sob uma força aplicada dada por:

$$F = 2 \cdot w \cdot t \cdot \sigma_n, \tag{3.3}$$

como:

$$w = Lr + a; \tag{3.4}$$

substituindo (3.4) em (3.3) temos:

$$F = 2 \cdot (a + Lr) \cdot t \cdot \sigma_n. \tag{3.5}$$

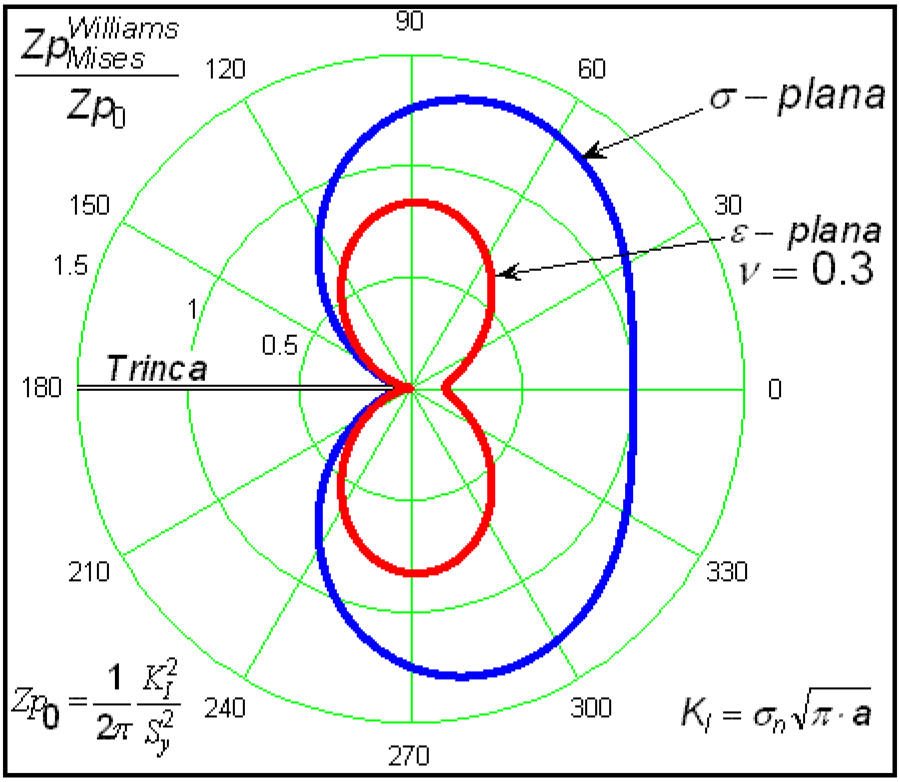

Figura 3.1 - Fronteiras elastoplástica por Mises em modo I previstas usando Williams.

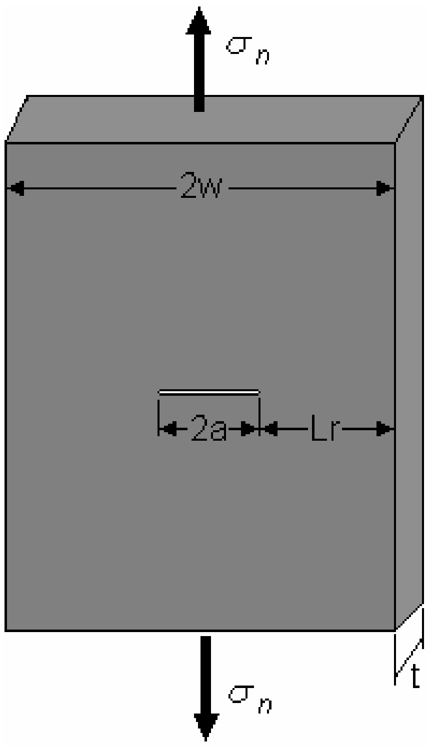

Figura 3.2 - Placa com trinca central e carregamento perpendicular à trinca.

Por outro lado, a força gerada pela componente de tensão F', da solução de Williams, na direção da carga aplicada, pode ser obtida integrando as tensões σ_y que solicitam o ligamento residual da placa, onde em cada ponto atua uma componente:

$$dF' = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}} t dx \,, \tag{3.6}$$

como:

$$K_I = \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \;; \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6) e integrando a través dos dois ligamentosresiduais temos:

$$F' = 2 \cdot \int_0^{Lr} \frac{\sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}} t dx \,, \tag{3.8}$$

finalmente a força F' é igual a:

$$F' = 2 \cdot \sigma_n \cdot t \cdot \sqrt{2 \cdot a \cdot Lr} \,. \tag{3.9}$$

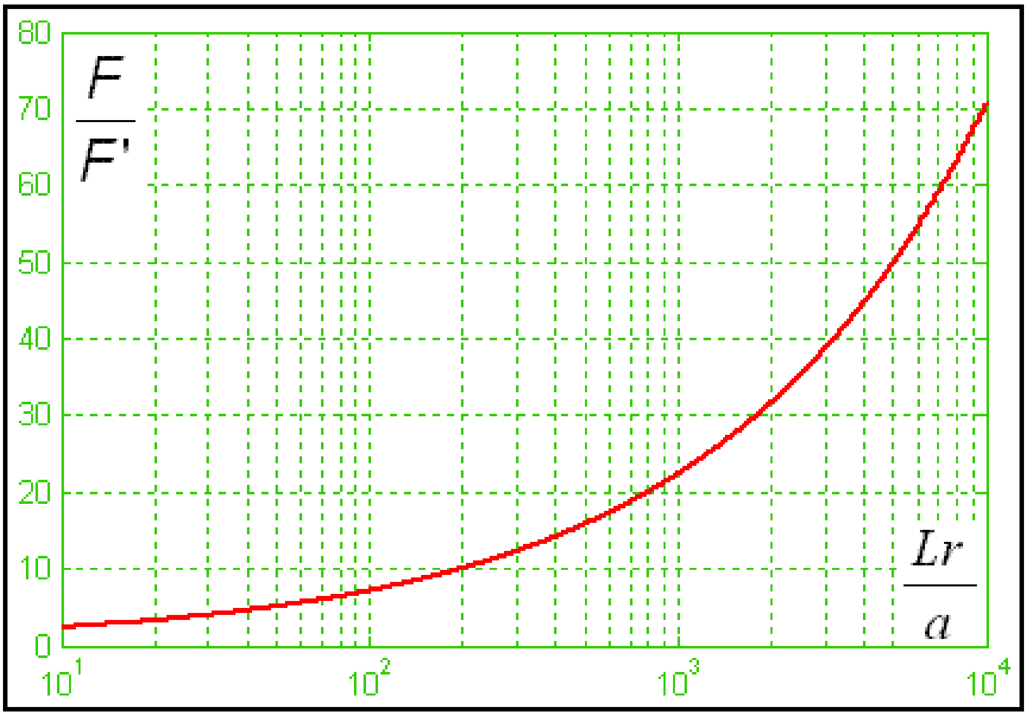

Figura 3.3 - Razão $\frac{F}{F'}$ onde F é a força produzida pela tensão σ_n e F' é a força produzida pela tensão σ_y gerada pelo K_I atuante na peça.

Apesar de ser a Figura 3.3 um gráfico apenas didático, há que a solução para o campo de tensões a partir do K_I é valido somente muito perto da ponta da trinca, pode-se ver em ela, que a força F' produzida pela tensão σ_y gerada pelo K_I não pode estimar a força F produzida pela tensão aplicada na peça (σ_n). O erro aumenta significativamente conforme vai aumentando a razão $\frac{Lr}{a}$, ou seja, ao contrário do esperado, à medida que a expressão K_I é mais aplicável (para $a << w$), ou seja, o erro na estimativa de F' aumenta. Isto demonstra que nem sempre é bom confiar na intuição.

Irwin tentou solucionar o problema do equilíbrio transladando a tensão σ_y (gerada por K_I), tratando de equilibrar as forças que atuam na peça, compensando a perda de força que é provocada pelo escoamento na zona plástica (para mais detalhes, vide seção 2.2.7). Entretanto, esta correção introduzida por Irwin não é suficiente para equilibrar a força aplicada na peça, já que ela também não obedece à condição de contorno $\sigma_y(x \to \infty, 0) = \sigma_n$. Uma forma de obter uma solução aproximada que satisfaça esta condição de contorno é superpor a tensão nominal à tensão σ_y induzida por K_I, forçando $\sigma_y \to \sigma_n$ quando $x \to \infty$. Com isto obtemos:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 + sen\frac{\theta}{2} sen\frac{3\theta}{2}\right] + \sigma_n . \tag{3.10}$$

Apesar de simplista, esta correção pode gerar resultados que mostram o efeito não desprezível da tensão nominal no tamanho e na forma da zona plástica. A força F'' que é gerada por esta última expressão na peça pode ser calculada da seguinte maneira:

$$dF'' = \left(\frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}} + \sigma_n\right) t dx . \tag{3.11}$$

Substituindo (3.7) em (3.11) e integrando através dos dois ligamentos residuais temos:

$$F'' = 2 \cdot \int_0^{Lr} \frac{\sigma_n \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}} t dx + 2 \cdot \int_0^{Lr} \sigma_n t dx \quad , \tag{3.12}$$

desenvolvendo estas integrais, obtemos:

$$F'' = 2\sigma_n t \cdot \sqrt{2 \cdot a \cdot Lr} + 2 \cdot \sigma_n t \cdot Lr \tag{3.13}$$

e usando um pouco de álgebra, finalmente chegamos a:

$$F'' = 2\sigma_n t\left(\sqrt{2a \cdot Lr} + Lr\right). \tag{3.14}$$

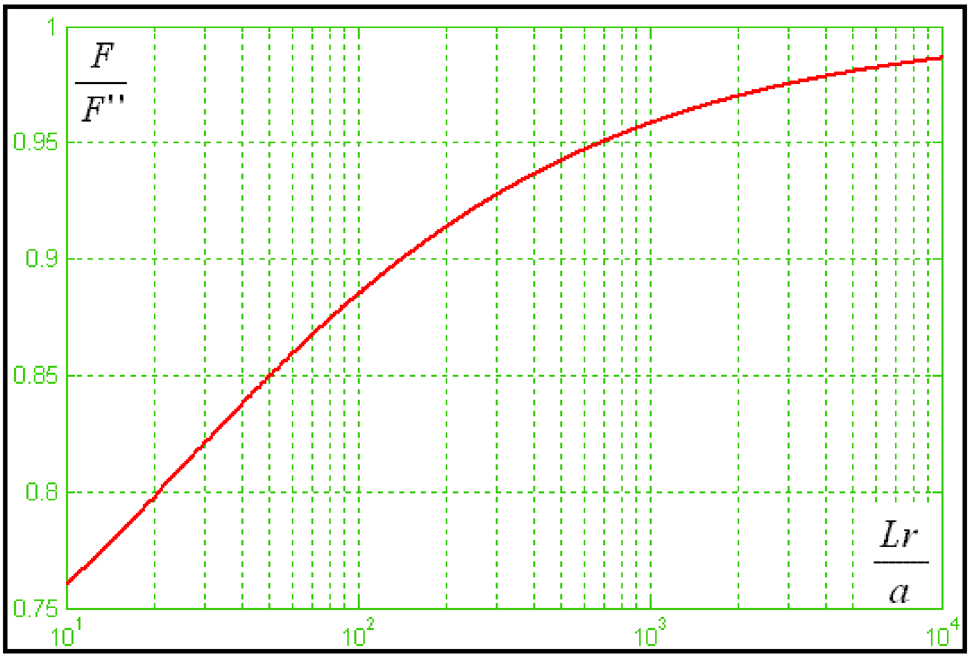

Figura 3.4 - Razão $\frac{F}{F''}$, onde F é a força produzida pela tensão σ_n e F'' é a força calculada somando na tensão σ_y gerada por K_I a tensão nominal σ_n que atua na placa trincada.

Outra forma de obter uma solução, mas experta, que satisfaça a condição de contorno $\sigma_y(x \to \infty, 0) = \sigma_n$ é usar a solução completa de westergaard sem usar a simplicicação de Irwin que gera $K_I = \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$. Da Equação (2.64) temos que a componente σ_y do campo de tensões da solução de Westergaard é dada por $\sigma_y = \operatorname{Re} Z + \operatorname{Im} Z'$, derivando $Z(z)$ na Equação (2.50) obtém-se:

$$Z'(z) = \frac{-a^2\sigma_n}{\left(z^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.15}$$

fazendo $z = x + iy$, escrevendo as equações (2.50) e (3.15) em coordenadas polares centradas na ponta da trinca e substituindo estas na equação (2.64) temos:

$$\sigma_y = \operatorname{Re}\left(\frac{\left[a + (r\cdot\cos\theta) + i(r\cdot\sin\theta)\right]\cdot\sigma_n}{\sqrt{\left[a + (r\cdot\cos\theta) + i(r\cdot\sin\theta)\right]^2 - a^2}}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a + (r\cdot\cos\theta) + i(r\cdot\sin\theta)\right]^2 - a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{3.16}$$

A força diferencial $dF_{Westergaard}$ gerada na direção $\theta = 0$ é:

$$dF_{Westergaard} = \left\{\operatorname{Re}\left(\frac{(a+r)\cdot\sigma_n}{\sqrt{(a+r)^2 - a^2}}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{(a+r)^2 - a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right)\right\} t dr, \tag{3.17}$$

então integrando a Equação (3.17) através dos dois ligamentos residuais temos:

$$F_{Westergaard} = 2 \cdot \int_0^{Lr} \left\{ \mathrm{Re}\left(\frac{(a+r)\cdot\sigma_n}{\sqrt{(a+r)^2 - a^2}} \right) + \mathrm{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{(a+r)^2 - a^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \right) \right\} tdr \cdot \tag{3.18}$$

Resolvendo numericamente esta integral podese obter a força atuante nos dois ligamentos residuais.

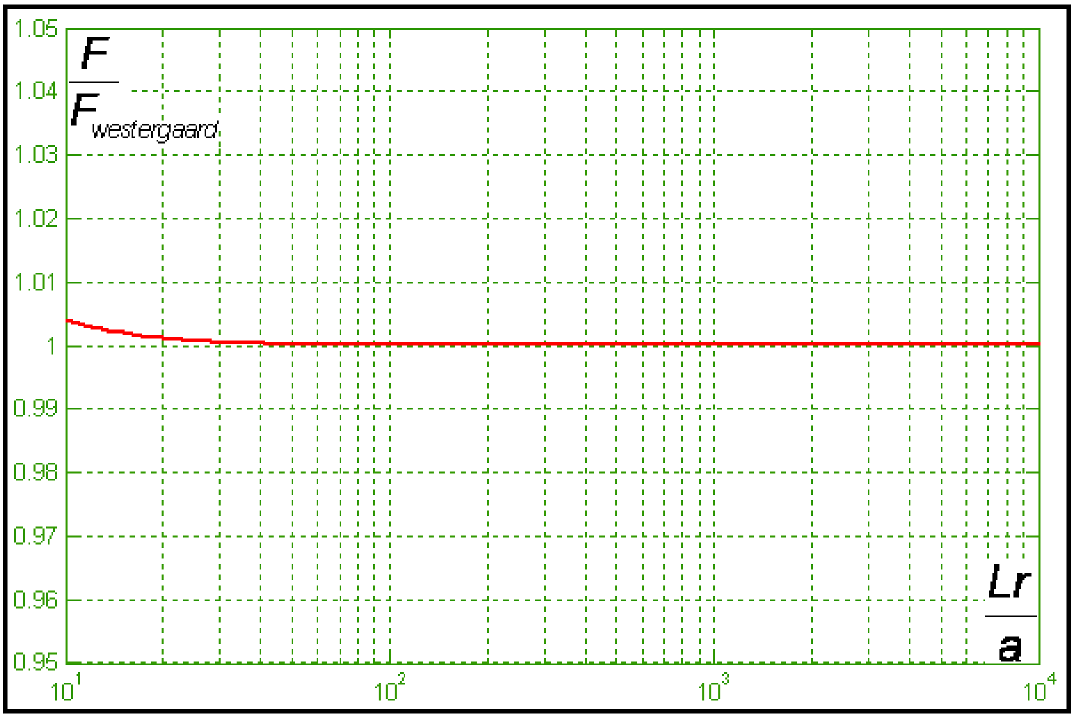

Figura 3.5 - Razão $\frac{F}{F_{Westergaard}}$, onde F é a força produzida pela tensão σ_n e $F_{Westergaard}$ é a força calculada a partir da componente σ_y da solução completa de Westergaard.

Pode-se observar na Figura 3.5, a condição de contorno $\sigma_y(x \to \infty, 0) = \sigma_n$ é satisfeita em todo o ligamento residual e a força $F_{Westergaard}$ gerada pela componente σ_y da solução completa de Westergaard consegue estimar a força F produzida pela tensão aplicada na peça (σ_n) com um erro totalmente desprezível de aproximadamente 0.5%.

3.2. Influência da tensão nominal no tamanho e forma da zona plástica

Para estimar o efeito da tensão nominal σ_n no tamanho e forma da zona plástica, adicionamos o termo σ_n à componente σ_y da Equação (2.21):

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\cdot r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 - sen\frac{\theta}{2}sen\frac{3\theta}{2}\right] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\cdot r}}f_x(\theta)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\cdot r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 + sen\frac{\theta}{2}sen\frac{3\theta}{2}\right] + \sigma_n \equiv \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\cdot r}}f_y(\theta) + \sigma_n$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\cdot r}}\cos\frac{\theta}{2}sen\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \equiv \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\cdot r}}f_{xy}(\theta) \qquad (3.19)$$

$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, para tensão plana.

Fazendo $\alpha = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi\cdot r}}$ e calculando a tensão de Mises para tensão plana:

$$\sigma_{mises} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2},$$

(3.20)quando a condição de contorno $\sigma_y(x\to\infty,0) = \sigma_n$ é satisfeita, obtemos:

$$\sigma_{mises} = \sqrt{(\alpha\cdot f_x)^2 + (\alpha\cdot f_y + \sigma_n)^2 - [(\alpha\cdot f_x)\cdot(\alpha\cdot f_y + \sigma_n)] + 3\alpha^2\cdot f_{xy}^2}\,. \qquad (3.21)$$

Substituindo:

$$\sigma_{mises} = S_E,\ \alpha = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\cdot r}}\ \text{e}\ r = Zp\ (\text{quando}\ \sigma_{mises} = S_E), \qquad (3.22)$$

na Equação (3.21) e fazendo um pouco de álgebra, obtemos:

$$\frac{S_E^2}{\sigma_n^2} = \frac{a}{2\cdot Zp}\left(f_x^2 + f_y^2 - f_x\cdot f_y + 3\cdot f_{xy}^2\right) + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\cdot Zp}}\left(2\cdot f_y - f_x\right) + 1; \qquad (3.23)$$

igualando (3.23) a zero e fazendo $\dfrac{\sigma_n}{S_E} = d$, pode-se escrever que:

$$0 = \frac{a}{2\cdot Zp}\left(f_x^2 + f_y^2 - f_x\cdot f_y + 3\cdot f_{xy}^2\right) + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\cdot Zp}}\left(2\cdot f_y - f_x\right) + \left(1 - \frac{1}{d^2}\right), \qquad (3.24)$$

fazendo:

$$X = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\cdot Zp}} \qquad (3.25)$$

e substituindo (3.25) em (3.24):

$$0 = \left(f_x^2 + f_y^2 - f_x\cdot f_y + 3\cdot f_{xy}^2\right)\cdot X^2 + \left(2\cdot f_y - f_x\right)\cdot X + \left(1 - \frac{1}{d^2}\right). \qquad (3.26)$$

Por fim, fazendo:

$$A = \left[f_x^2 + f_y^2 - f_x f_y + 3 f_{xy}^2 \right],\ B = \left(2 f_y - f_x \right) \text{ e } C = 1 - \frac{1}{d^2}; \tag{3.27}$$

obtemos a equação quadrática:

$$AX^2 + BX + C = 0; \tag{3.28}$$

elevando a equação (3.25) ao quadrado temos:

$$Zp = \frac{a}{2 \cdot X^2}. \tag{3.29}$$

De (2.69) sabemos que $Zp_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{S_E}\right)^2$ e de (3.7) temos que $K_I = \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$, assim dividindo a zona plástica pela Zp_0 obtemos:

$$\frac{Zp}{Zp_0} = \frac{1}{X^2 \cdot d^2}. \tag{3.30}$$

Resolvendo a Equação quadrática (3.28) para X e substituindo este valor na Equação (3.30) obtemos a fronteira elastoplástica para quando σ_y é forçada a cumprir com a condição de contorno $\sigma_y(x \to \infty, 0) = \sigma_n$.

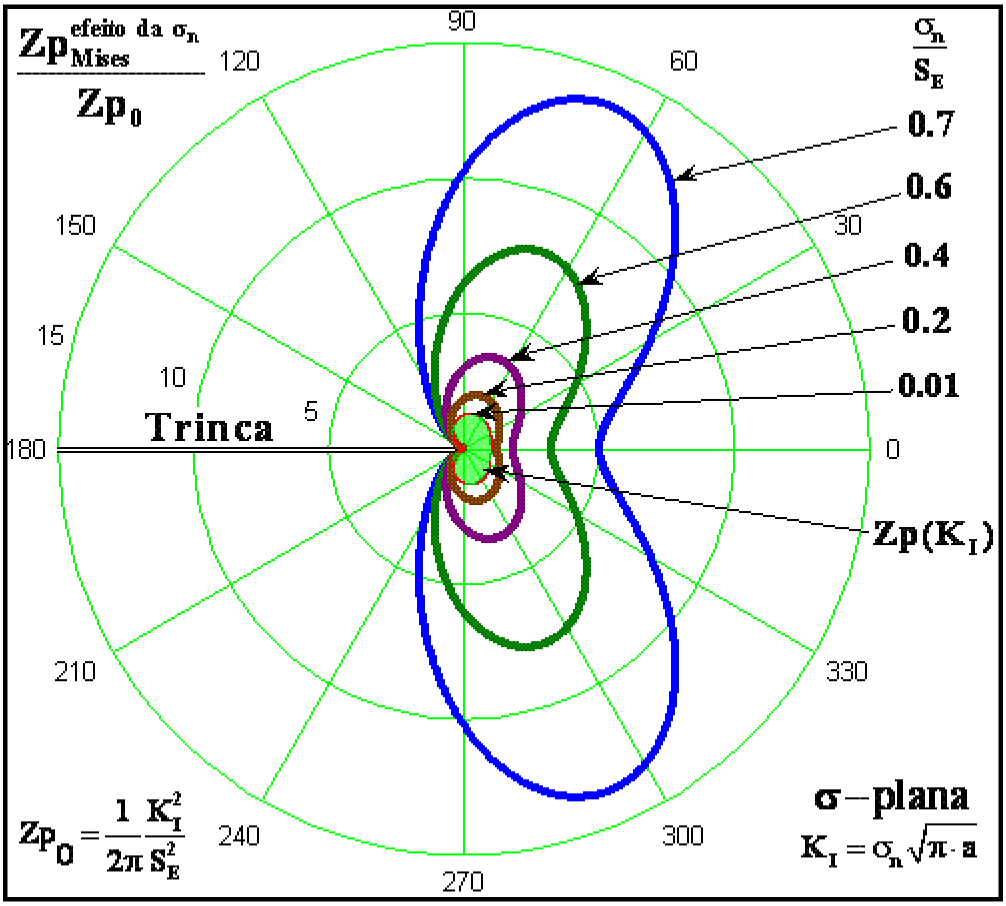

Figura 3.6 - Fronteira elastoplástica estimada adicionando σ_n à componente σ_y da solução de Williams para o campo de tensões na ponta da trinca, em **σ−plana**.

Para deformação plana só trocamos os parâmetros A, B e C da Equação (3.28) por:

$$A = \left(\left(\nu^2 - \nu + 1\right) \cdot f_x^2 + \left(2 \cdot \nu^2 - 2 \cdot \nu - 1\right) \cdot f_x \cdot f_y + \left(\nu^2 - \nu + 1\right) \cdot f_y^2 + 3 \cdot f_{xy}^2\right)$$

$$B = \left(2 \cdot \left(\nu^2 - \nu + 1\right) \cdot f_y + \left(2 \cdot \nu^2 - 2 \cdot \nu - 1\right) \cdot f_x\right)$$

$$C = \left(\left(\nu^2 - \nu + 1\right) - \frac{1}{d^2}\right). \qquad (3.31)$$

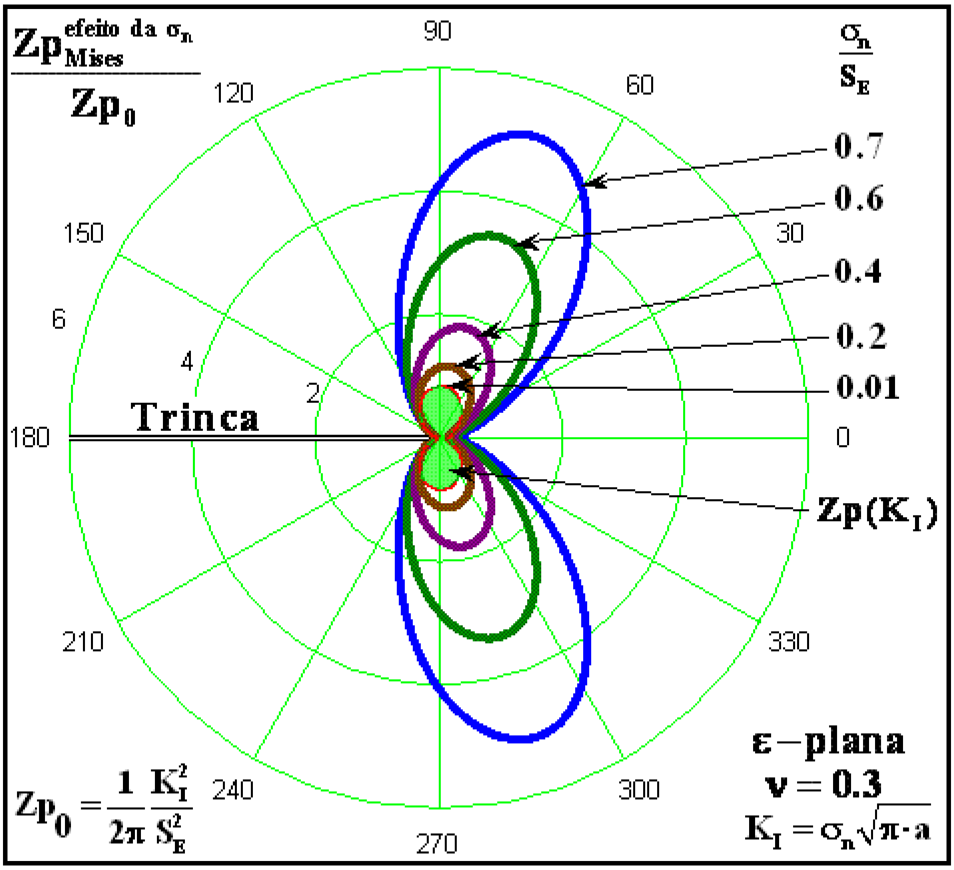

Figura 3.7 - Fronteira elastoplástica adicionando σ_n à componente σ_y da solução de Williams para o campo de tensões na ponta da trinca, em $\varepsilon - \textbf{plana}$.

3.3. Estimativa da fronteira elastoplástica a partir da solução de Inglis para o campo de tensões em uma placa com um furo elíptico

A fronteira elastoplástica numa placa infinita tracionada uniformemente por σ_y, e que contenha uma trinca central $2a$ perpendicular a σ_y, pode ser estimada de uma forma mais precisa usando a solução de Inglis (ver seção 2.1.4) ou de Westergaard completa (ver seção 2.2.6), pois ambas consideram todas as condições de contorno do problema.

A solução de Inglis já foi discutida na seção 2.1.4 com suficiente profundidade. Para adaptar esta solução a uma placa com uma trinca central $2a$, as faces da trinca devem coincidir com o eixo maior do furo elíptico, cujo raio da ponta deve ser a metade do CTOD, isto é:

$$\rho = \frac{CTOD}{2}. \tag{3.32}$$

Da Equação (2.85) e da Equação (2.86) obtemos os valores da $CTOD$ para tensão e deformação plana. Substituindo (2.85), (2.86) e (3.7) em (3.32) temos:

$$\rho = \frac{2 \cdot \sigma_n^2 \cdot a}{E' \cdot S_E}, \tag{3.33}$$

onde $E' = E$ em tensão plana e $E' = E/(1-\nu^2)$ em deformação plana. Substituindo (3.33) na Equação (2.4):

$$1 + \frac{2a}{b} = 1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{E' \cdot S_E}{2 \cdot \sigma_n^2}}, \tag{3.34}$$

deixando em evidência $\frac{a}{b}$ se obtém:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{E' \cdot S_E}{2 \cdot \sigma_n} \cdot \frac{S_E}{\sigma_n}}; \tag{3.35}$$

introduzindo o fator de segurança ao escoamento $\phi_E = S_E / \sigma_n$ na Equação (3.35), obtemos para tensão plana:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{\phi_E^2} \frac{S_E}{E}} \tag{3.36}$$

e para deformação plana:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{\phi_E^2} \frac{S_E\left(1-\nu^2\right)}{E}}. \tag{3.37}$$

Calculando as constantes dadas pela Equação (2.11) e substituindo-as na Equação (2.10), obtemos as tensões de Inglis na placa infinita tracionada com uma trinca central com raio de ponta $\rho = \frac{CTOD}{2}$. Usando Mises em tensão plana temos:

$$\sigma_{Mises} = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 - \sigma_\alpha \sigma_\beta + 3\tau_{\alpha\beta}^2}, \tag{3.38}$$

Pode-se mapear a fronteira elastoplástica em torno da ponta da trinca com semi-eixos dados por (3.37) em tensão plana fazendo $\sigma_{Mises} = S_E$ e resolvendo:

$$0 = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 - \sigma_\alpha \sigma_\beta + 3\tau_{\alpha\beta}^2} - S_E \tag{3.39}$$

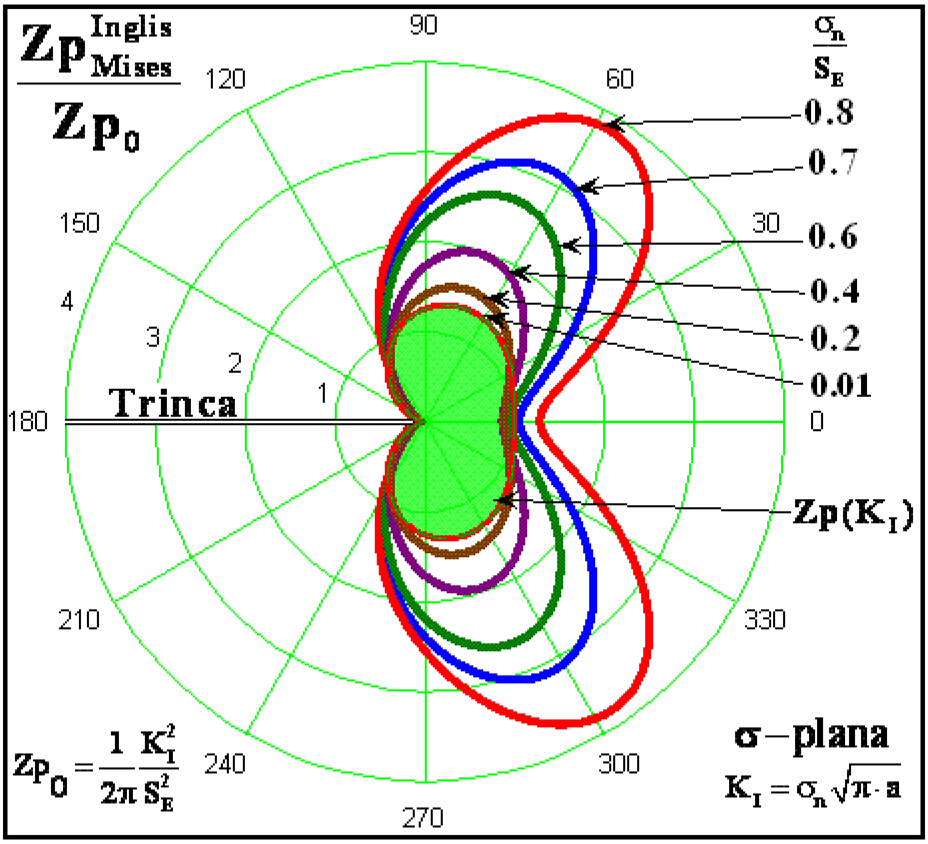

Figura 3.8 - Fronteira elastoplástica em torno de uma trinca modelada a partir da placa de Inglis com $\rho = \frac{CTOD}{2}$, em $\sigma-$**plana**.

Para deformação plana temos:

$$0 = \sqrt{0.5\left[\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta\right)^2 + \left(\sigma_\alpha - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_\beta\right)^2\right] + 3\tau_{\alpha\beta}^2} - S_E, \quad (3.40)$$

onde $\sigma_z = \nu\left(\sigma_\alpha + \sigma_\beta\right)$.

As Equações (3.39) e (3.40) podem ser solucionadas numericamente para α e β fixando primeiro um das duas variáveis e achando o valor da outra que faz a equação igual à zero.

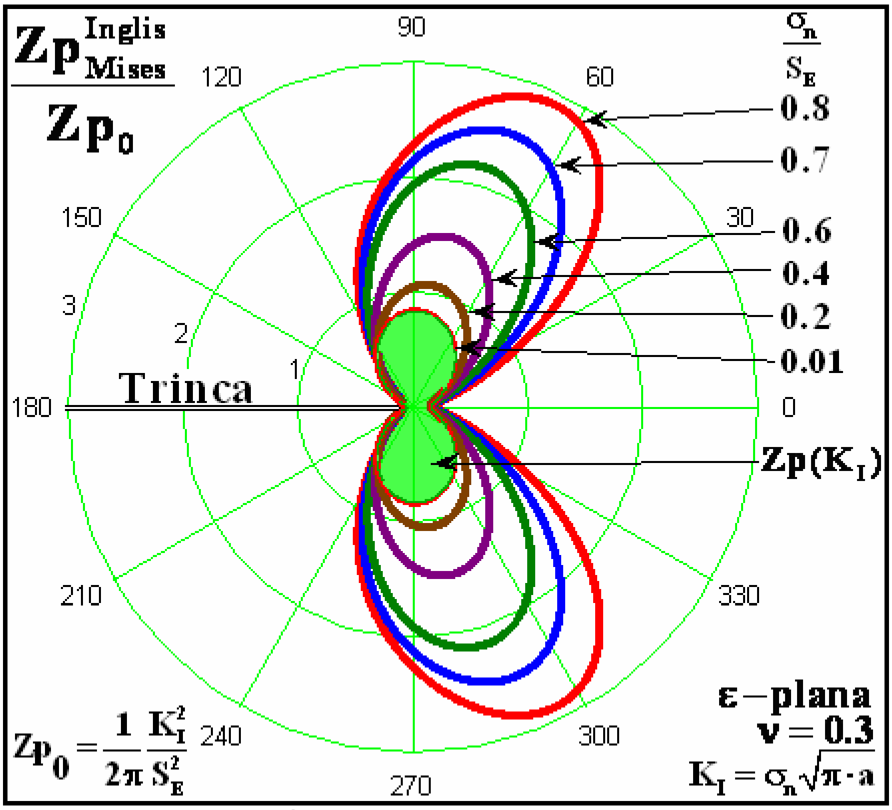

Figura 3.9 - Fronteira elastoplástica em torno de uma trinca modelada a partir da placa de Inglis com $\rho = \frac{CTOD}{2}$, em $\varepsilon-$**plana**.

3.4. Estimativa da zona plástica a partir da solução de Westergaard completa para o campo de tensões em uma placa infinita com uma trinca central

A solução de Westergaard para o campo de tensões LE de uma placa infinita com uma trinca central também pode ser usada para modelar a fronteira elastoplástica na ponta de uma trinca cumprindo com a condição de contorno $\sigma_y(x \to \infty, y = 0) = \sigma_n$ e considerando o efeito da carga nominal na placa trincada.

Para isto tome-se a solução completa de Westergaard, já discutida na seção 2.2.6, sem usar a simplificação de Irwin que gera $K_I = \sigma_n \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$. Sendo $z = x + iy$, da Equação (2.50) pode-se deduzir que $Z'(z)$ é dado pela Equação (3.15).

Escrevendo as Equações (2.50) e (3.15) em coordenadas polares centradas na ponta da trinca obtém-se:

$$Z=\frac{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]\cdot\sigma_n}{\sqrt{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2}} \tag{3.41}$$

e

$$Z'=\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.42}$$

Podem-se obter as componentes σ_x, σ_y e τ_{xy}, que atuam na placa sob tração uniaxial, substituindo as Equações (3.41) e (3.42) na Equação (2.64):

$$\sigma_x=\mathrm{Re}\left(\frac{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]\cdot\sigma_n}{\sqrt{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2}}\right)-\mathrm{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right)-\sigma_n$$

$$\sigma_y=\mathrm{Re}\left(\frac{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]\cdot\sigma_n}{\sqrt{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2}}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\tau_{xy}=\left(r\cdot sen\theta\right)\mathrm{Re}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{3.43}$$

Por último, substituindo a Equação (3.43) na Equação (3.20) (equação de Mises para tensão plana), fazendo a tensão de Mises igual à resistência ao escoamento ($\sigma_{Mises}=S_E$), e igualando a equação resultante a zero, obtemos:

$$\begin{aligned}0=\Bigg\{&\left[\mathrm{Re}\left(\frac{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]\cdot\sigma_n}{\sqrt{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2}}\right)-\mathrm{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right)-\sigma_n\right]^2+\\
&\left[\mathrm{Re}\left(\frac{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]\cdot\sigma_n}{\sqrt{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2}}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right)\right]^2-\\
&\left[\mathrm{Re}\left(\frac{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]\cdot\sigma_n}{\sqrt{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2}}\right)-\mathrm{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right)-\sigma_n\right]\cdot\\
&\left[\mathrm{Re}\left(\frac{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]\cdot\sigma_n}{\sqrt{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2}}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right)\right]+\\
&3\cdot\left[\left(r\cdot sen\theta\right)\mathrm{Re}\left(\frac{-a^2\cdot\sigma_n}{\left\{\left[a+\left(r\cdot\cos\theta\right)+i\left(r\cdot\sin\theta\right)\right]^2-a^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right)\right]^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}}-S_E\end{aligned} \tag{3.44}$$

A solução da Equação (3.44) pode ser numericamente obtida para cada valor de θ achando-se o valor aproximado de r que iguala a equação igual a zero, localizando assim a fronteira elastoplástica de Westergaard. No caso para deformação plana só se tem que substituir as componentes σ_x, σ_y, σ_z e τ_{xy} achadas na Equação (3.43) na Equação (2.65) (equação de Mises para deformação plana), lembrando que a componente σ_z pode ser expressa em função das componentes σ_x e σ_y como $\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$. Fazendo a tensão de Mises igual à resistência ao escoamento ($\sigma_{Mises} = S_E$), passando todos os termos da equação para a direita, igualando à equação a zero como no caso de tensão plana, e aproximando numericamente a solução da equação fixando θ e resolvendo para r, pode-se encontrar a fronteira elastoplástica de Westergaard para deformação plana.

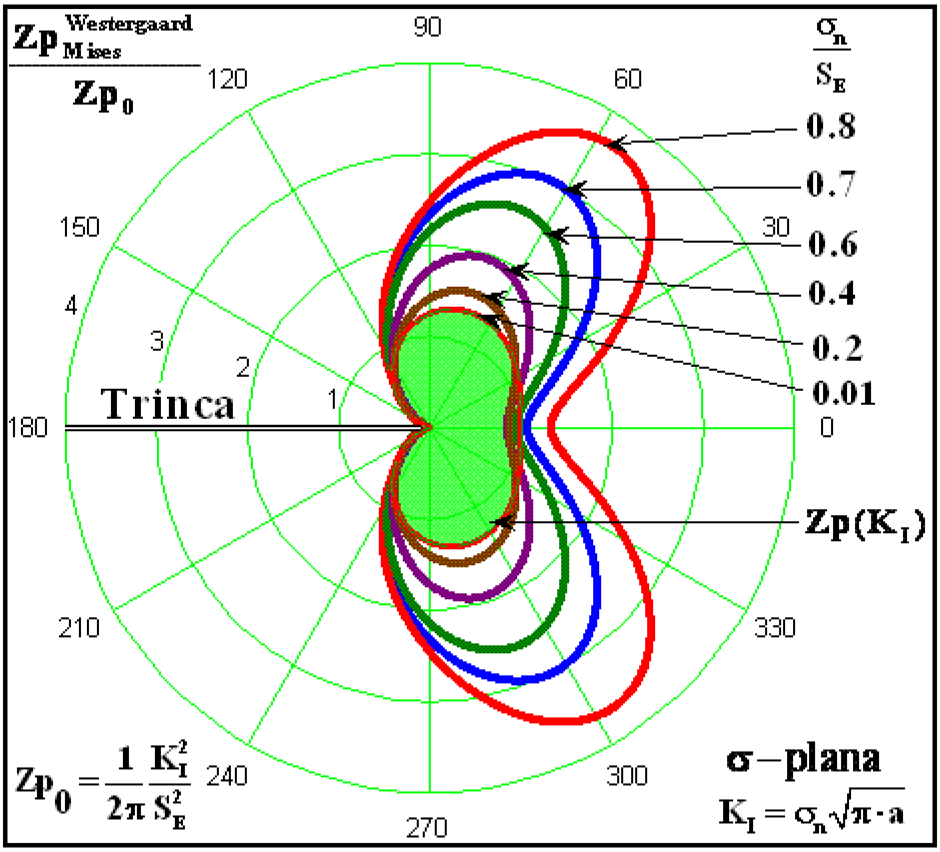

Figura 3.10 - Fronteira elastoplástica em torno da ponta de uma trinca modelada a partir da equação completa de Westergaard, em $\sigma - \textbf{plana}$.

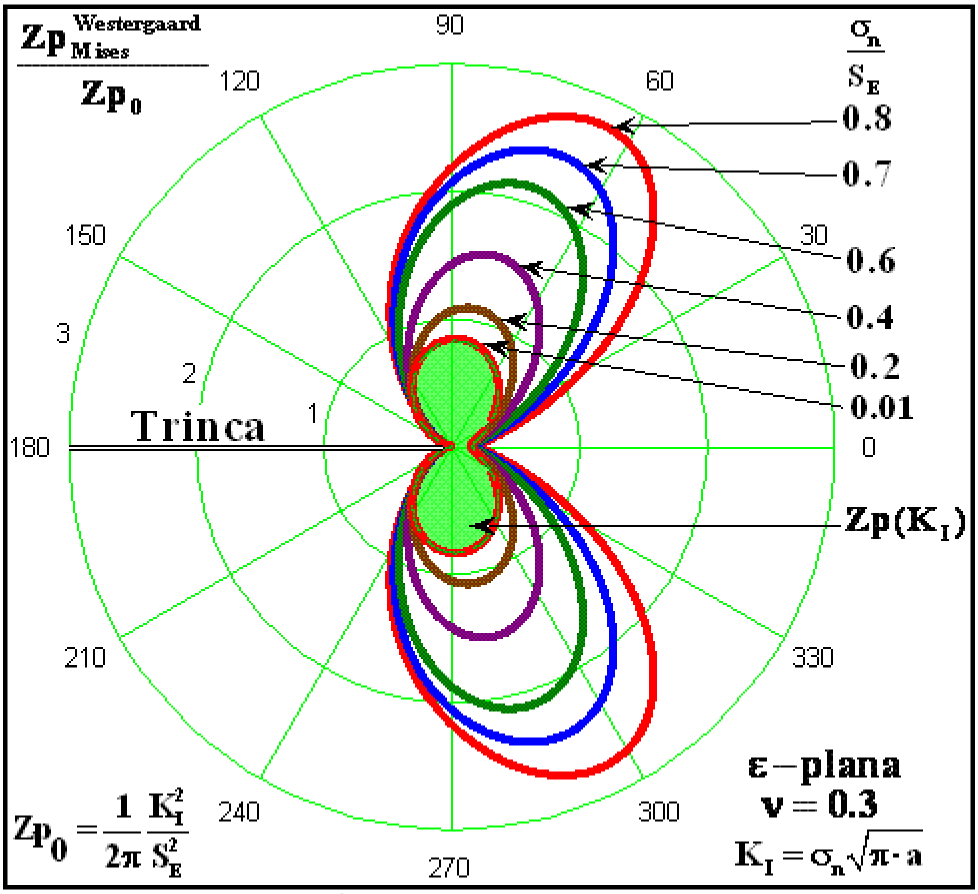

Figura 3.11 - Fronteira elastoplástica em torno da ponta de uma trinca modelada a partir da equação completa de Westergaard, em $\varepsilon-\mathbf{plana}$.

3.5. Comparação das soluções de Inglis e Westergaard

A seguir se apresenta a comparação da fronteira elastoplástica estimada por Inglis (para uma placa infinita contendo um furo elíptico solicitada por um carregamento perpendicular ao eixo maior da elipse, assumindo que a trinca tem raio de ponta igual à metade do **CTOD** associado com $\mathbf{K}_\mathbf{I}$) com a solução completa de Westergaard (para uma placa infinita com uma trinca central com carga perpendicular à trinca, sem fazer a simplificação que Irwin usou para obter $\mathbf{K}_\mathbf{I}$).

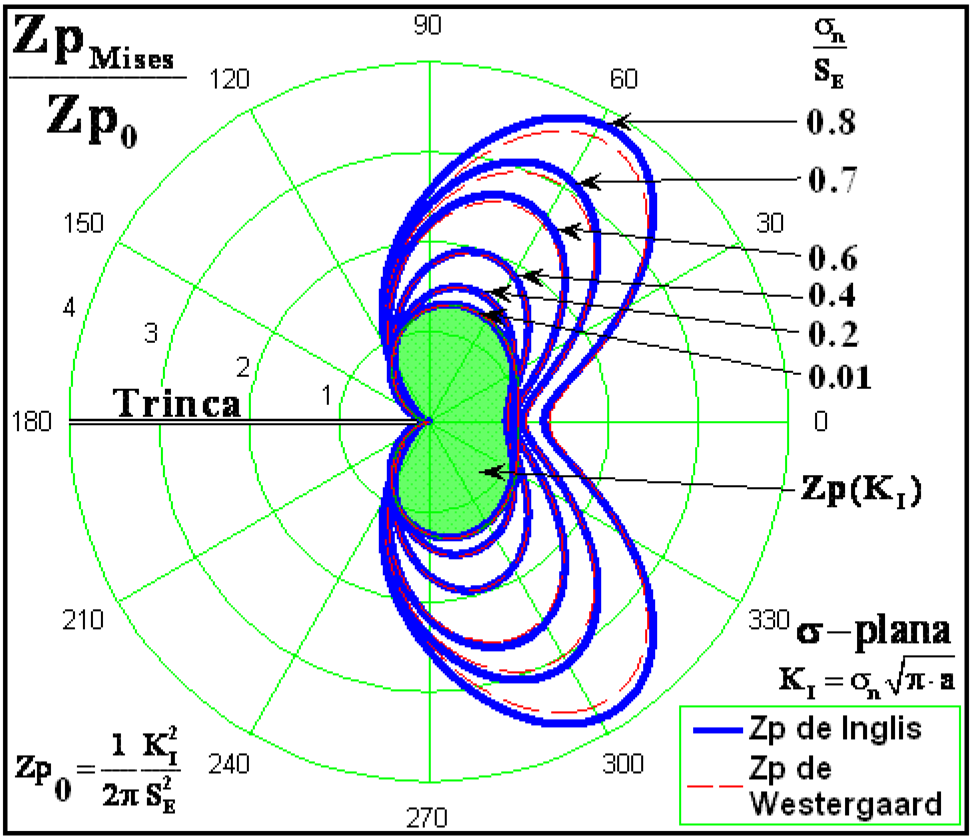

Figura 3.12 - Comparação da fronteira elastoplástica em torno da ponta de uma trinca modelada a partir da solução de Inglis e Westergaard completa, em $\sigma - \mathbf{plana}$.

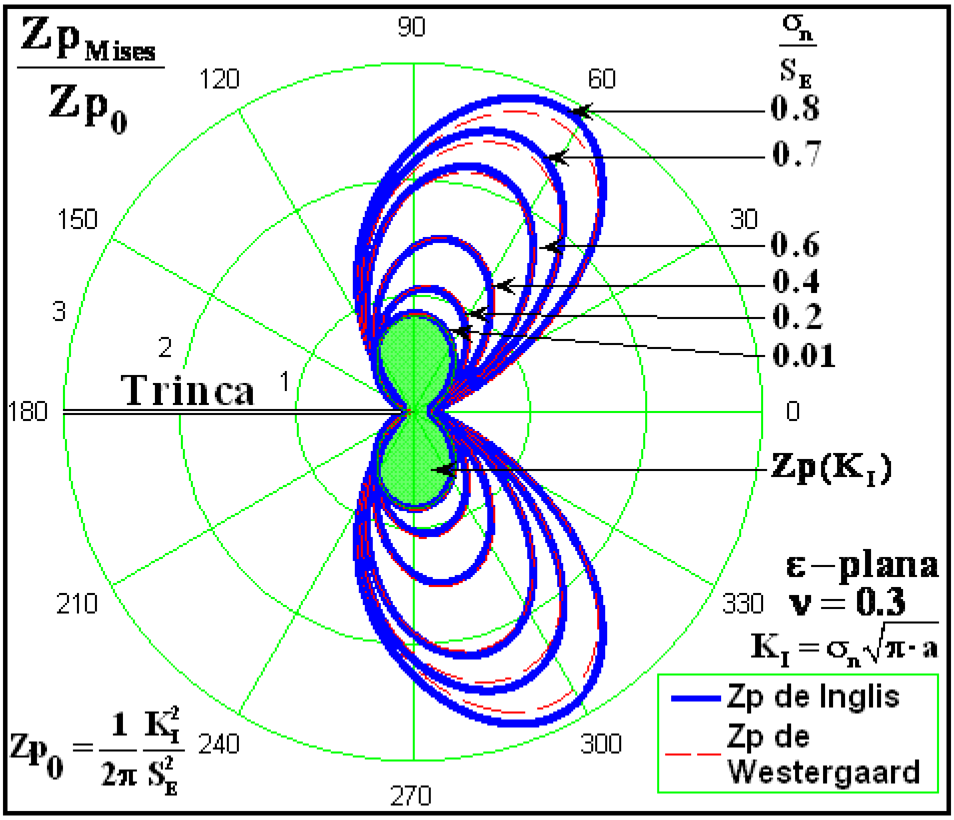

Figura 3.13 - Comparação da fronteira elastoplástica em torno da ponta de uma trinca modelada a partir da solução de Inglis e Westergaard completa, em $\varepsilon - \mathbf{plana}$.

Como se pode ver nas Figuras 3.12 e 3.13, as estimativas da zona plástica de Inglis e Westergaard divergem muito pouco uma da outra, e só nas tensões mais altas se pode ver claramente a pequena diferença entre elas. Mas se podem forçar as duas soluções a reduzir a difernça entre elas, para qualquer tensão fazendo o eixo menor da elipse na placa de Inglis igual à metade do **CTOD**, isto é:

$$b = \frac{CTOD}{2} \cdot$$

(3.45)

Como estudado na seção 3.3, da Equação (2.85) e da Equação (2.86) obtemos os valores do *CTOD* para tensão e deformação plana. Substituindo (2.85), (2.86) e (3.7) em (3.45) obtemos:

$$b = \frac{2 \cdot \sigma_n^2 \cdot a}{E' \cdot S_E}, \tag{3.46}$$

então:

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot \sigma_n^2}{E' \cdot S_E}, \tag{3.47}$$

onde $E' = E$ em tensão plana e $E' = E/(1-\nu^2)$ em deformação plana. Introduzindo o fator de segurança ao escoamento $\phi_E = S_E/\sigma_n$ na equação (3.47), obtemos para tensão plana:

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot \sigma_n}{E} \phi_E \tag{3.48}$$

e para deformação plana:

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot \sigma_n \cdot \left(1-\nu^2\right)}{E} \phi_E \,. \tag{3.49}$$

Trocando a Equação (3.48) pela (3.36) e a (3.49) pela (3.37) na solução de Inglis pode-se obter as Figuras 3.14 e 3.15.

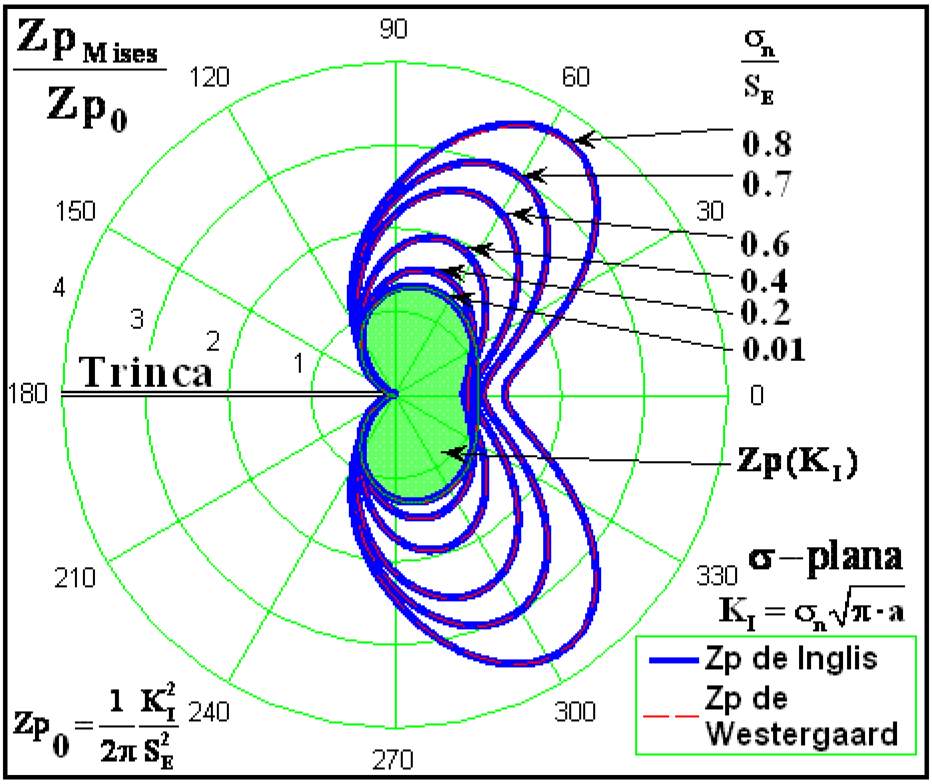

Figura 3.14 - Coincidência forçada da solução de Inglis e Westergaard completa fazendo $b = CTOD/2$ na solução de Inglis, em $\sigma - \mathbf{plana}$.

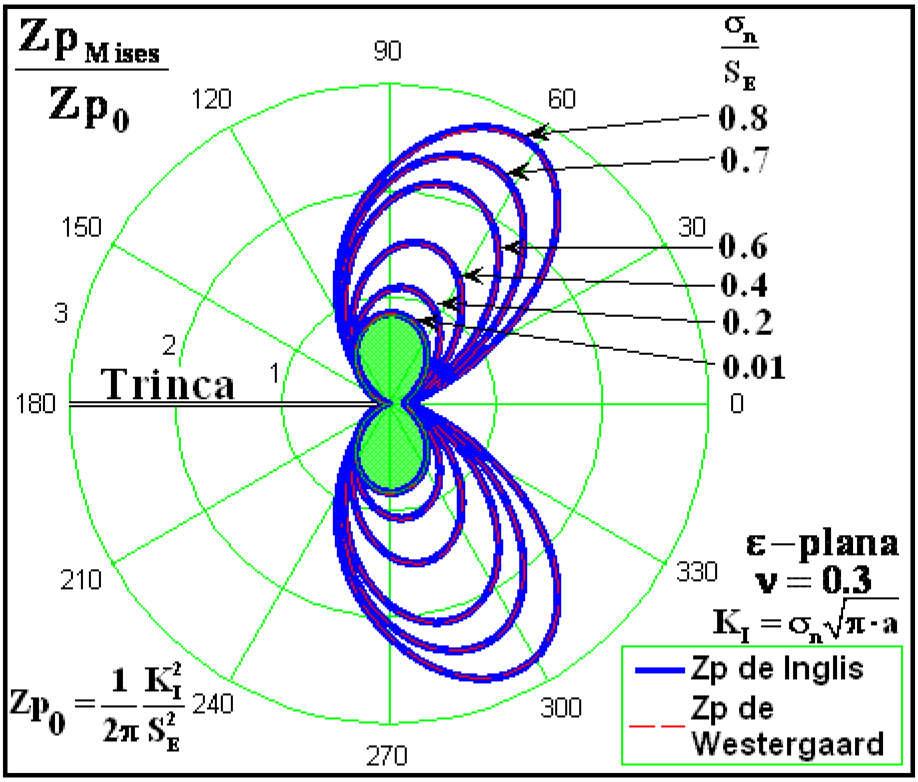

Figura 3.15 - Coincidência forçada da solução de Inglis e Westergaard completa fazendo $b = CTOD/2$ na solução de Inglis, em $\varepsilon - \mathbf{plana}$.