

2

Fundamentos da Mecânica da Fratura Linear Elástica

2.1. Concentração de tensões

As fórmulas clássicas da análise tradicional de tensões (ou da resistência dos materiais) só servem para se calcularem as chamadas tensões nominais σ_n , as quais desprezam os efeitos localizados nas transições geométricas bruscas. Estas equações só são válidas nas regiões da peça que fiquem longe das transições bruscas de geometria e dos pontos de aplicação das cargas concentradas. Como a maioria das peças reais tem entalhes (como furos, rasgos, ombros ou outros detalhes geométricos similares, onde a seção varia bruscamente), os quais são em geral indispensáveis para a fixação e/ou a operação da peça, estes entalhes concentram localmente as tensões nominais que atuam na peça.

Na modelagem dos problemas de fadiga e de fratura de peças frágeis, o efeito dos entalhes é de primordial importância (Castro & Meggiolaro, 2002).

2.1.1. Perturbação das linhas de força

As linhas de força indicam qualitativamente o fluxo dos esforços através de uma dada estrutura. Todos os esforços que entram têm que sair da estrutura, já que a soma dos esforços (forças e momentos) que entram em qualquer estrutura em equilíbrio tem que ser zero. Logo, as linhas de força não podem ser cortadas pelos entalhes, elas têm que contorná-los, como na Figura 2.1 (Castro & Meggiolaro, 2002). Assim, elas se concentram na ponta do entalhe passando uma mais perto da outra; indicando que mais carga está atravessando por uma área menor como se pode ver na Figura 2.1 (Broek, 1988).

As linhas de força são curvadas ao contornar os entalhes, trocando de direção. As direções das linhas de força indicam a direção da tensão local. Podemos notar que a direção da carga ao redor da ponta do entalhe não é a mesma que na carga uniformemente distribuída. Na tensão local aparece uma componente horizontal e uma vertical e, portanto, podemos concluir que perto da ponta do

entalhe o campo de tensões é biaxial (σ_x e σ_y) mesmo quando o carregamento aplicado é uniaxial (ver Figura 2.2). Por isto um entalhe ou corte não só produz um concentrador de tensões, mas também introduz uma componente transversal da tensão (Broek, 1988).

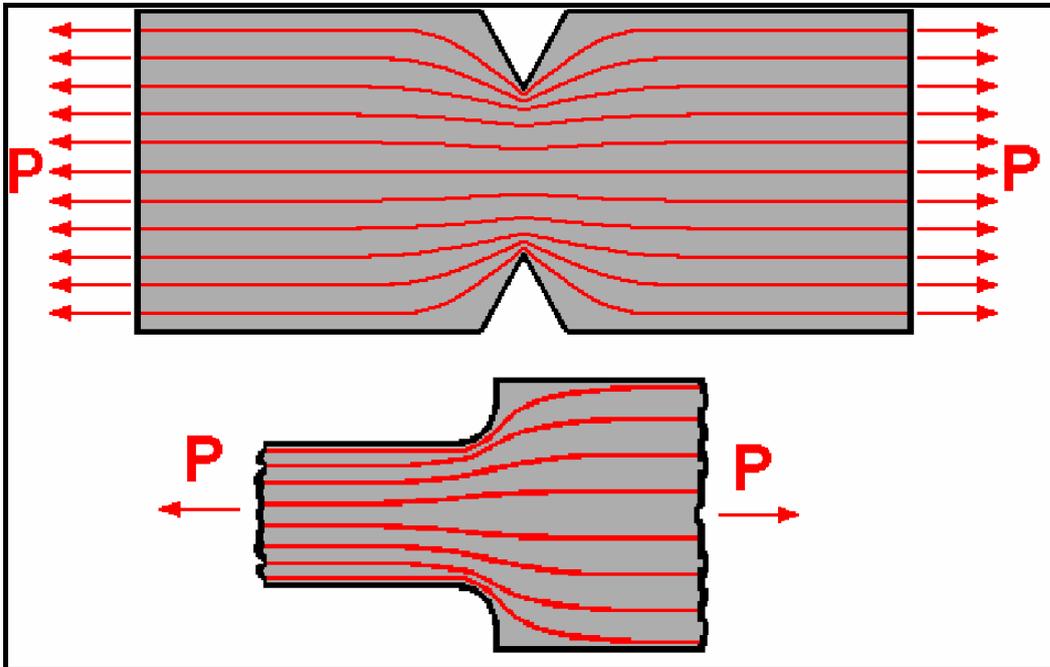


Figura 2.1 - Fluxo das linhas de força.

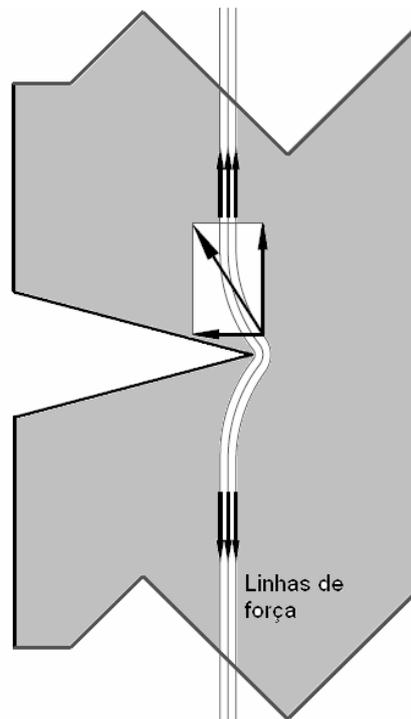


Figura 2.2 - Perturbação nas linhas de força.

2.1.2. Fator de concentração de tensões

O fator de concentração de tensões K_t é definido pela razão entre a máxima tensão que atua numa dada seção (entalhada) σ_{\max} e a tensão nominal σ_n que atuaria naquela seção se o entalhe nela não causasse qualquer efeito. O K_t é definido como (Castro & Meggiolaro, 2002):

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}. \quad (2.1)$$

Toda descontinuidade no material de uma peça produz uma interrupção no caminho da carga, desviando as linhas de força e causando uma concentração das tensões. Se a ponta de um entalhe tem um raio grande, isto é, se o entalhe é cego, o seu comprimento na direção da carga é maior; causando um menor desvio das linhas de força na peça que outro entalhe similar de ponta mais afiada. Assim, a redistribuição das tensões pode ocorrer numa distância maior, portanto a área onde acontece a concentração de tensões é mais comprida que no caso de um corte muito afiado e a tensão maior é menor que no entalhe muito afiado. Como uma regra geral, entalhes cegos ou não afiados produzem tensões localizadas baixas, entalhes muito afiados produzem tensões localizadas muito altas (David Broek, 1988).

2.1.3. Solução do campo de tensões numa placa infinita com um furo circular tracionada

A primeira solução analítica de um fator de concentração de tensões K_t foi a de o furo circular numa placa infinita tracionada (Kirsh em 1898), ver Figura 2.3. O furo de Kirsh tem:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = 3. \quad (2.2)$$

A solução da distribuição de tensões em toda a placa infinita com um furo de raio R sob a tensão nominal σ_n é apresentada em coordenadas polares:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_n}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \left(1 - 4 \cdot \frac{R^2}{r^2} + 3 \cdot \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2 \cdot \theta) \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_n}{2} \cdot \left[\left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left(1 + 3 \cdot \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2 \cdot \theta) \right]$$

$$\sigma_r = -\frac{\sigma_n}{2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} - 3 \cdot \frac{R^4}{r^4} \right) \text{sen}(2 \cdot \theta). \quad (2.3)$$

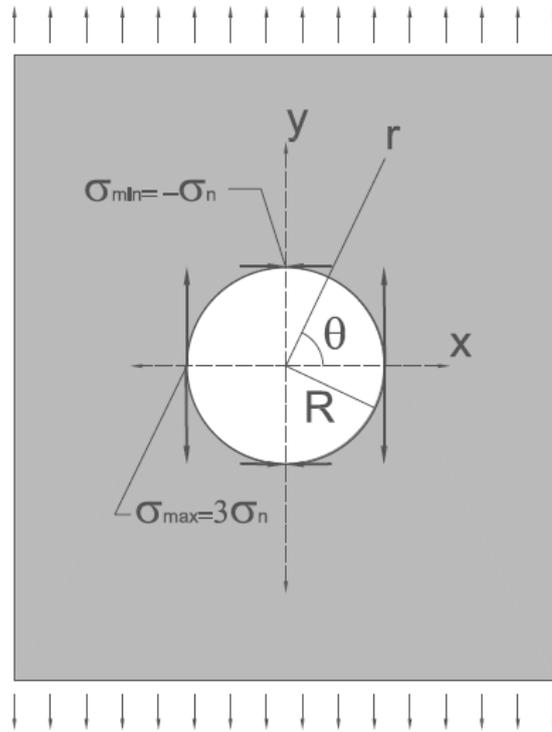


Figura 2.3 - K_t de um furo circular numa placa infinita tracionada.

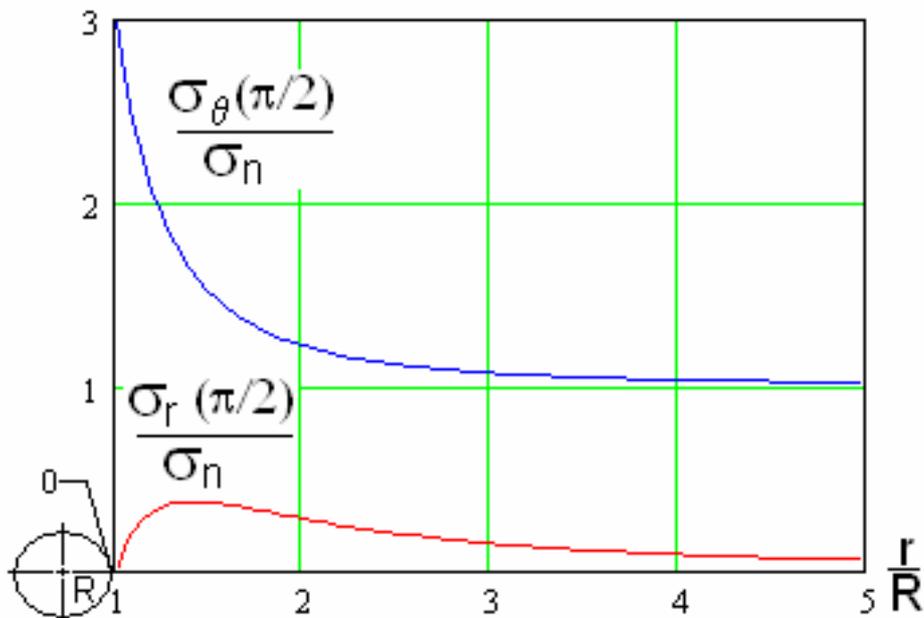


Figura 2.4 - Variação das tensões normais σ_θ e σ_r ao longo do eixo x numa placa infinita com um furo circular tracionada (Castro & Meggiolaro 2002).

A variação das tensões normais σ_θ e σ_r ao longo do eixo x é apresentada na Figura 2.4. Pode-se ver que o efeito do furo circular no campo de tensões da placa infinita só consegue influenciá-lo significativamente muito perto da sua borda (Castro & Meggiolaro, 2002).

2.1.4. Solução do campo de tensões numa placa infinita com um furo elíptico

A solução do campo de tensões numa placa infinita tracionada contendo um furo elíptico foi apresentada por Inglis em 1913.

O K_t do furo elíptico numa placa infinita tracionada por σ_n (Inglis, 1973) tem grande importância prática. Uma elipse de semi-eixos a e b , sendo a perpendicular à tensão nominal σ_n (ver Figura 2.5), tem um raio (mínimo) em

$x = \pm a$ dado por $\rho = \frac{b^2}{a}$ e um K_t igual a:

$$K_t = 1 + \frac{2a}{b} = 1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}. \quad (2.4)$$

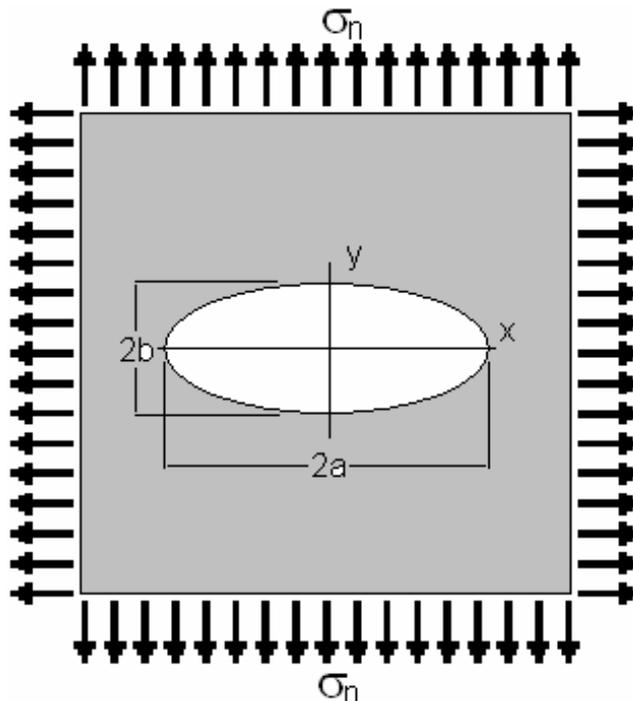


Figura 2.5 - Placa infinita contendo um furo elíptico tracionada.

A solução de Inglis usa coordenadas ortonormais elíptico-hiperbólicas (α, β) , que mapeiam o plano através de elipses geradas pela coordenada α e de

hipérboles geradas por β , todas elas focadas em $x = \pm c$. As elipses são descritas por:

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \alpha} + \frac{y^2}{\sinh^2 \alpha} = c^2, \quad (2.5)$$

as hipérboles por:

$$\frac{x^2}{\cos^2 \beta} - \frac{y^2}{\sin^2 \beta} = c^2 \quad (2.6)$$

e o furo elíptico por:

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \alpha_0} + \frac{y^2}{\sinh^2 \alpha_0}, \quad (2.7)$$

onde os seus semi-eixos são:

$$a = c \cdot \cosh \alpha_0 \quad (2.8)$$

$$b = c \cdot \sinh \alpha_0. \quad (2.9)$$

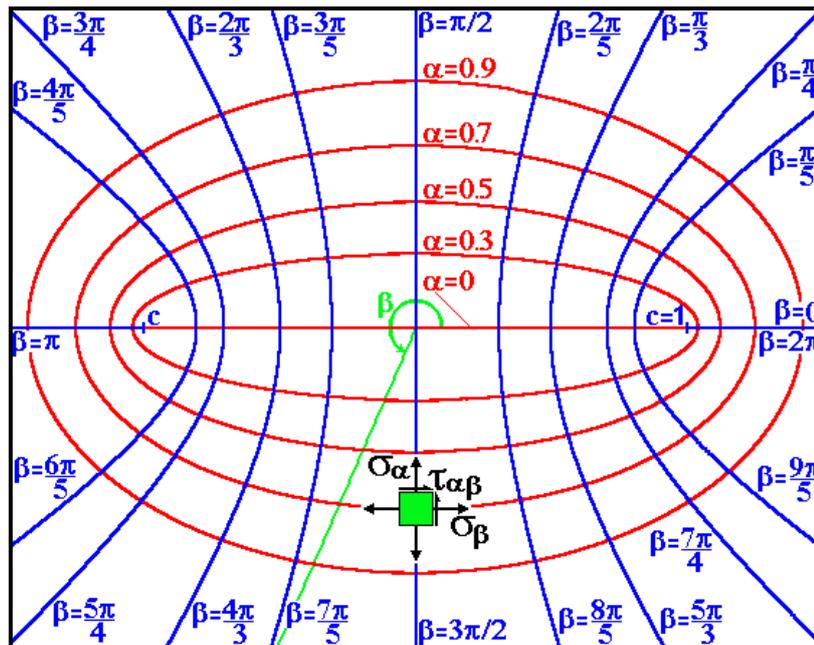


Figura 2.6 - Coordenadas ortonormais elíptico-hiperbólicas. (Castro & Meggiolaro 2002).

A componente α da tensão σ_α é perpendicular e a componente β da tensão σ_β é tangente à elipse, na direção em que β varia (perpendicular às iso-curvas de β), sendo assim análogas às componentes de tensão em coordenadas polares σ_r e σ_θ .

As tensões σ_α , σ_β e $\tau_{\alpha\beta}$ geradas por uma carga biaxial na placa de Inglis são dadas por séries cujas constantes A_n e B_n têm que ser determinadas pelas condições de contorno da placa, onde n em geral pode ser qualquer inteiro positivo ou negativo (Castro & Meggiolaro, 2002).

Segundo Inglis (1913),

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{1}{(\cosh(2\alpha) - \cos(2\beta))^2} \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &(n+1)e^{-(n-1)\alpha} \cos(n+3)\beta + (n-1)e^{-(n+1)\alpha} \cos(n-3)\beta \\ &- [4e^{-(n+1)\alpha} + (n+3)e^{-(n-3)\alpha}] \cos(n+1)\beta \\ &+ [4e^{-(n-1)\alpha} - (n-3)e^{-(n+3)\alpha}] \cos(n-1)\beta \end{aligned} \right] A_n \\ &+ \left[\begin{aligned} &ne^{-(n+1)\alpha} \cos(n+3)\beta + (n+2)e^{-(n+1)\alpha} \cos(n-1)\beta \\ &- [(n+2)e^{-(n-1)\alpha} + ne^{-(n+3)\alpha}] \cos(n+1)\beta \end{aligned} \right] B_n \end{aligned} \right\} \\ \sigma_\beta &= \frac{1}{(\cosh(2\alpha) - \cos(2\beta))^2} \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &-(n-3)e^{-(n-1)\alpha} \cos(n+3)\beta - (n+3)e^{-(n+1)\alpha} \cos(n-3)\beta \\ &+ [(n-1)e^{-(n-3)\alpha} - 4e^{-(n+1)\alpha}] \cos(n+1)\beta \\ &+ [(n+1)e^{-(n+3)\alpha} + 4e^{-(n-1)\alpha}] \cos(n-1)\beta \end{aligned} \right] A_n \\ &- \left[\begin{aligned} &ne^{-(n+1)\alpha} \cos(n+3)\beta + (n+2)e^{-(n+1)\alpha} \cos(n-1)\beta \\ &- [(n+2)e^{-(n-1)\alpha} + ne^{-(n+3)\alpha}] \cos(n+1)\beta \end{aligned} \right] B_n \end{aligned} \right\} \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{(\cosh(2\alpha) - \cos(2\beta))^2} \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &(n-1)e^{-(n-1)\alpha} \sin(n+3)\beta + (n+1)e^{-(n+1)\alpha} \sin(n-3)\beta \\ &-(n+1)e^{-(n-3)\alpha} \sin(n+1)\beta - (n-1)e^{-(n+3)\alpha} \sin(n-1)\beta \end{aligned} \right] A_n \\ &+ \left[\begin{aligned} &ne^{-(n+1)\alpha} \sin(n+3)\beta + (n+2)e^{-(n+1)\alpha} \sin(n-1)\beta \\ &- [(n+2)e^{-(n-1)\alpha} + ne^{-(n+3)\alpha}] \sin(n+1)\beta \end{aligned} \right] B_n \end{aligned} \right\}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

No caso da placa de Inglis sob tração uniaxial, com σ_n perpendicular ao eixo maior a do furo, as cinco condições de contorno geram:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= -\frac{\sigma_n}{16}, \quad B_{-1} = \frac{\sigma_n}{4} [1 + \cosh(2\alpha_0)], \quad A_{+1} = -\frac{\sigma_n}{16} - \frac{\sigma_n \cdot e^{2\alpha_0}}{8}, \quad B_{+1} = \frac{\sigma_n \cdot e^{4\alpha_0}}{8} \quad e \\ B_{-3} &= -\frac{\sigma_n}{8}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como a borda do furo é uma superfície livre, $\sigma_\alpha(\alpha = 0) = \tau_{\alpha\beta}(\alpha = \alpha_0) = 0$, e como na borda:

$$\alpha_0 = \operatorname{atanh}(b/a), \quad (2.12)$$

a tensão $\sigma_\beta(\alpha = \alpha_0)$ tangente à borda do furo é dada por:

$$\sigma_\beta(\alpha = \alpha_0) = \sigma_n e^{2\alpha_0} \left[\frac{(1 + e^{-2\alpha_0}) \sinh 2\alpha_0}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} - 1 \right]. \quad (2.13)$$

Portanto, tensão $\sigma_\beta(\alpha = \alpha_0)$ é maximizada nos pontos extremos do eixo $2a$ perpendicular à carga σ_n aplicada na placa, nos quais $\cos 2\beta = 1$ e $\beta = 0$ ou π , onde:

$$\frac{\sigma_{\beta \max}}{\sigma_n} = e^{2\alpha_0} \left[\frac{(1 + e^{-2\alpha_0}) \cdot \sinh 2\alpha_0}{\cosh 2\alpha_0 - 1} - 1 \right] = \frac{3 \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - 2}{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - 2} = 1 + 2 \frac{a}{b}, \quad (2.14)$$

pois:

$$\frac{b}{a} = \tan \alpha_0 = \frac{e^{\alpha_0} - e^{-\alpha_0}}{e^{\alpha_0} + e^{-\alpha_0}} \Rightarrow e^{2\alpha_0} = \frac{a+b}{a-b}, \quad (2.15)$$

Desta forma, sendo $\rho = b^2/a$ o raio do furo elíptico nos dois extremos do seu eixo maior $2a$, perpendicular à tensão nominal:

$$\frac{\sigma_{\beta \max}}{\sigma_n} = K_t = 1 + \frac{2a}{b} = 1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{\rho}}. \quad (2.16)$$

A componente vertical da tensão σ_y que atua no ligamento residual de uma placa infinita tracionada com um furo elíptico de semi-eixos a e b , para $x \geq a$, $y = 0$ e centrado em $(0,0)$, é dada por (Castro & Meggiolaro, 2002):

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_{yn}} - 1 = \frac{(a^2 - 2ab) \left(x - \sqrt{x^2 - a^2 + b^2} \right) (x^2 - a^2 + b^2) + ab^2(a-b)x}{(a-b)^2 (x^2 - a^2 + b^2) \sqrt{x^2 - a^2 + b^2}} \quad (2.17)$$

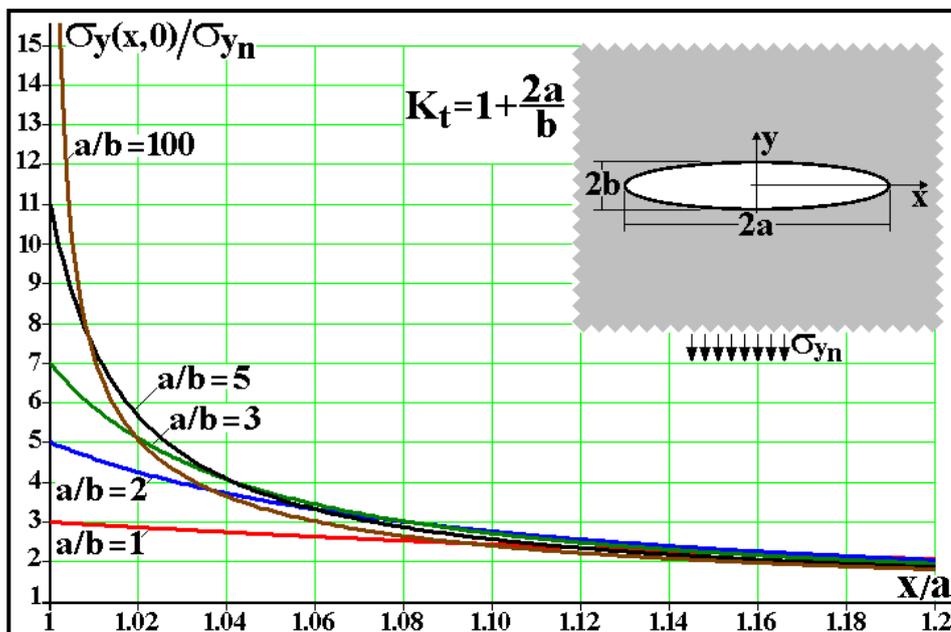


Figura 2.7 - Variação da tensão σ_y ao longo do eixo x numa placa infinita com um furo elíptico tracionada. (Castro & Meggiolaro 2002).

2.2. Mecânica da Fratura linear Elástica

A metodologia da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) é baseada num procedimento analítico que relaciona a magnitude e a distribuição do campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca com a tensão nominal aplicada na peça, o tamanho, forma e orientação da trinca ou entalhe muito afiado. O princípio fundamental da MFLE é que o campo de tensões à frente de uma trinca afiada num membro estrutural pode ser caracterizado em termos de um simples parâmetro K , o fator de intensidade de tensão, que é expresso em $Mpa\sqrt{m}$ ou $ksi\sqrt{in}$. Este parâmetro K é relacionado tanto à tensão nominal quanto ao tamanho da trinca (a). Conseqüentemente, todos os membros estruturais ou corpos de prova que contêm imperfeições como entalhes afiados ou trincas podem ser carregados para vários níveis de K , o que é análogo à situação onde membros estruturais ou mecânicos que não contêm defeitos podem ser carregados para vários níveis de tensão.

Como a maior parte das falhas de componentes mecânicos ou estruturais é causada pela propagação de trincas, uma maior compreensão da magnitude e distribuição do campo de tensões na vizinhança da frente da trinca é essencial para determinar a segurança e confiabilidade de estruturas (Barsom, 1987).

2.2.1. Estado de tensões num concentrador de tensões

Um concentrador de tensões também causa uma mudança no estado de tensão. Mesmo se a tensão é uniaxial no ligamento residual, o estado de tensões é ao menos biaxial na área do entalhe (ver Figura 2.2). Na superfície livre onde não atuam cargas externas haverá um estado de tensão plana (não há tensões na superfície livre). Como a superfície livre não carrega cortantes, esta seria um plano principal com uma tensão principal igual a zero e, conseqüentemente, um estado de tensão plana.

Como a face do entalhe, a raiz do entalhe (com raio de ponta ρ finito) é também uma superfície livre. Por isso, na raiz do entalhe a tensão na direção da trinca x (σ_x) deve ser zero, pois não há tensão atuando perpendicular à superfície livre.

Como a superfície (face da placa) é um plano principal, e como os três planos principais são perpendiculares entre si, as tensões σ_x e σ_y na raiz do entalhe são as tensões principais σ_1 e σ_2 no plano do entalhe. Devido à presença do alto concentrador de tensão causado pelo entalhe na placa, os valores locais de σ_1 e σ_2 são muito grandes, do mesmo modo que as deformações ε_1 e ε_2 . De acordo com a lei de Hooke, uma deformação na direção z estará presente, dada por:

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}, \quad (2.18)$$

assumindo que a tensão $\sigma_z = 0$. O sinal negativo da deformação ε_z indica uma redução da peça na direção z .

As tensões são altas só na vizinhança da raiz do entalhe, longe desta σ_x desaparece e σ_y tende para a tensão nominal σ_n . Por isto, longe da ponta do entalhe, ε_z torna-se desprezível. As faces do entalhe são livres de tensão, então $\varepsilon_z = 0$ ao longo das faces. Portanto, só para uma pequena quantidade do material em volta da raiz do entalhe, ε_z é muito grande; enquanto que, fora desta pequena zona, ε_z é zero ou desprezível. Pode-se idealizar esta pequena região do material, que está sob efeito de ε_z , como um pequeno cilindro (ver Figura 2.8).

Se este cilindro (pequena região do material em volta da ponta da trinca, sob efeito de ε_z) é muito comprido (isto é, se a peça é muito grossa) e relativamente esbelto, uma grande ε_z (deformação na direção z) não pode acontecer. O material em volta do cilindro não permite que a contração aconteça livremente, com exceção de uma região muito pequena do material junto às faces da placa (que são superfícies livres).

A restrição à livre contração do material causa uma tensão σ_z (tensão na direção z). Se a contração do material é totalmente restrita, a deformação na direção z não acontece e $\varepsilon_z = 0$ (um estado de tensões onde uma das deformações principais é zero é chamado de deformação plana), então:

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = 0, \quad (2.19)$$

e por isto:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y); \quad (2.20)$$

A tensão σ_z é exercida pelo material em volta do cilindro, que não permite a sua livre contração. Na superfície livre do material, esta tensão na direção z não pode existir, mas ela aumenta rapidamente com a profundidade do material. Devido à ausência de σ_z na superfície do material, a deformação ε_z forma então uma pequena covinha nas superfícies livres.

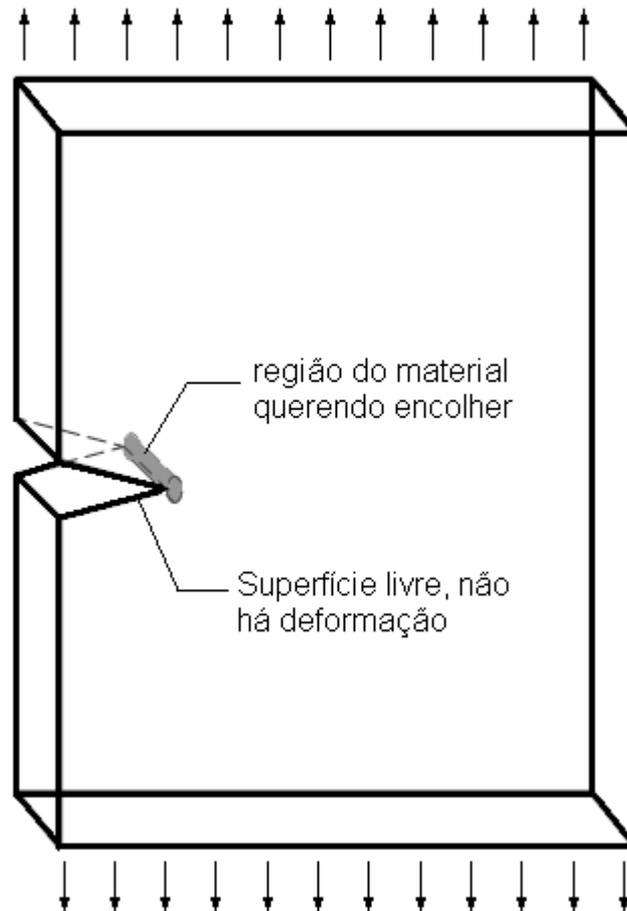


Figura 2.8 - Deformação na ponta do entalhe.

Agora, para uma placa fina com um entalhe, o cilindro do material em volta da raiz do entalhe querendo encolher é pouco comprido e relativamente grosso, por conseguinte a contração do material acontece livremente conforme a Equação (2.18), então a tensão na direção z é zero ($\sigma_z = 0$). Este estado de tensões é chamado de tensão plana (Broek, 1988).

2.2.2. Modos de carregamento das trincas

Há três diferentes modos de carregar uma placa trincada, e cada modo tem sua própria designação. Os casos associados com estas diferentes configurações de carregamento são geralmente referenciados como modos I, II e III (ver Figura 2.9).

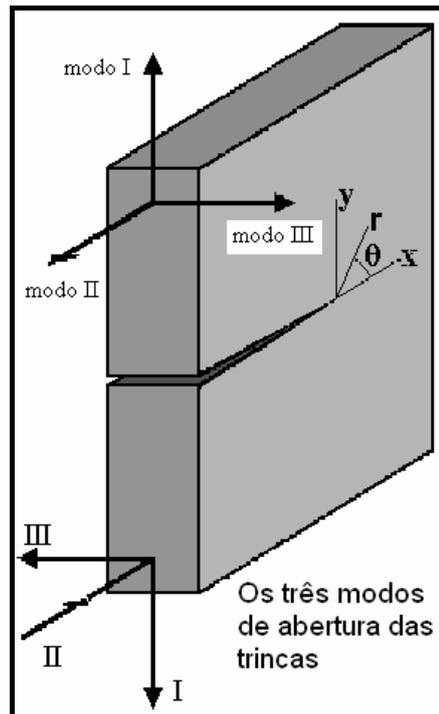


Figura 2.9 - Modos de carregamento de uma trinca em uma placa.

O Modo I é o principal modo de fratura que acontece quando duas superfícies de uma trinca estão sendo separadas por forças trativas aplicadas perpendicularmente ao plano da trinca. O modo II ou modo cortante acontece quando forças cortantes são aplicadas no plano da trinca. E por último o modo III ou modo de torção acontece quando forças cortantes fora do plano são aplicadas sob a placa, do mesmo jeito que é rasgada uma folha de papel (Unger, 2001).

Quase sempre as trincas se propagam em modo I (perpendicularmente à máxima tensão normal trativa) para evitar o atrito nas suas faces durante a fratura e, por conseguinte, o modo I é o mais importante na prática. Por isto a discussão será centrada neste modo de faturamento (Castro & Meggiolaro, 2002).

2.2.3. Fator de intensidade de tensões

Este conceito foi introduzido em 1957 por Williams e Irwin para quantificar o campo das tensões em torno de uma trinca numa peça predominantemente linear elástica. Os trabalhos foram independentes (Irwin usou uma função de tensão de Westergaard complexa e Williams propôs sua função de tensão na forma de uma série infinita), mas chegaram ao mesmo resultado. O fator de intensidade de tensões foi logo aceito na indústria aeronáutica, ávida por uma análise eficiente para quantificar o efeito das trincas após as quedas de três jatos comerciais (Comets) em 1954, devidas à propagação brusca e instável de trincas de fadiga.

A expressão completa do campo de tensões em torno de qualquer trinca em modo I, nas peças feitas de material linear, elástico, isotrópico e homogêneo é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} f_x(\theta) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} f_y(\theta) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} f_{xy}(\theta)\end{aligned}\quad (2.21)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

com:

$$\sigma_z = 0, \text{ para tensão plana e}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \text{ para deformação plana.}$$

Em geral, pode-se escrever

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot f\left(\frac{a}{w}\right), \quad (2.22)$$

onde K_I é o parâmetro linear elástico que quantifica a intensidade do campo de tensões, σ é a tensão (nominal) aplicada na peça, a é o comprimento da trinca e $f\left(\frac{a}{w}\right)$ é a função que descreve todas as influências das geometrias da peça e da trinca e da forma do carregamento no campo de tensões. K_I é um parâmetro linear elástico catalogável e, pela unicidade das tensões lineares, só precisa ser calculado uma vez para cada geometria.

As tensões em torno de uma trinca em modo II são:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
\sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \\
\tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

com:

$\sigma_z = 0$, para tensão plana e

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$, para deformação plana.

Para modo III:

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
\tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Assim,

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K_I \cdot \left[\frac{f_{ij}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \right] \tag{2.25}$$

em torno da ponta de qualquer trinca em qualquer peça predominantemente elástica carregada em modo I (idem nos modos II e III). Estes campos lineares elásticos de tensão são singulares, portanto nas peças trincadas não se pode comparar as máximas tensões lineares elásticas com as resistências do material (já que neste caso a tensão perto da ponta do entalhe tende a infinito). Logo, a única diferença entre os campos de tensões que atuam nas várias peças trincadas (lineares elásticas) é o valor da sua intensidade, expresso por K_I , K_{II} ou K_{III} . A intensidade do campo linear elástico de tensões em torno da ponta de qualquer trinca em modo I é totalmente controlada por K_I (e por K_{II} e K_{III} nos modos II e III), pois as tensões σ_{ij} dependem sempre de $\frac{1}{\sqrt{r}}$ e das mesmas funções $f_{ij}(\theta)$.

K_I , K_{II} e K_{III} são chamados de fatores de intensidade de tensões (em modo I, II e III), têm dimensão $MPa\sqrt{m}$ e incluem todas as informações sobre os efeitos da carga e da geometria da peça e da trinca (como e quanto elas influem nas tensões LE em torno da trinca). Esta análise linear elástica de tensões é singular,

já que prevê tensões infinitas quando $r \rightarrow 0$ (muito perto da ponta da trinca). Isto, aliás, é uma impossibilidade física; e assim não pode descrever as tensões na ponta da trinca (o ponto mais solicitado da peça). Mas os materiais reais não são lineares nem elásticos em cargas altas, portanto todas as trincas reais estáveis, mesmo aquelas solicitadas por tensões baixas, sempre têm uma região não-linear em torno de suas pontas (Castro & Meggiolaro, 2002).

2.2.4. Solução de Williams para o campo linear elástico de tensões em torno de uma trinca

Para resolver problemas (lineares, elásticos, isotrópicos, homogêneos e planos) de tensões, as funções de tensão de Airy $\varphi(r, \theta)$ devem reproduzir todas as condições de contorno e obedecer a:

$$\begin{aligned} \nabla^4(\varphi) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \\ \sigma_r &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right), \quad \sigma_\theta = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \text{ e } \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para analisar as tensões, lineares elásticas, numa placa trincada, Williams usou coordenadas polares $r\theta$ com origem na ponta de uma trinca com faces em $\theta = \pm\pi$, e propôs uma função de tensão:

$$\varphi(r, \theta) = r^2 f(r, \theta) + g(r, \theta), \quad (2.27)$$

onde f e g são funções harmônicas, portanto $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$; para as funções f e g Williams propôs séries infinitas de índice n , assumindo:

$$\begin{aligned} f &= \sum_n [A_n r^n \cos(n\theta) + C_n r^n \sin(n\theta)] \\ g &= \sum_n [(B_n r^{(n+2)} \cos(n+2)\theta + D_n r^{(n+2)} \sin(n+2)\theta)], \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde as constantes A_n , B_n , C_n e D_n devem ser ajustadas para obedecerem às condições de contorno do problema. Como as tensões em modo I são simétricas em relação ao plano da trinca temos que:

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \sigma_\theta(-\theta), \quad (2.29)$$

então f e g só podem manter os termos em $\cos(n\theta)$, portanto as constantes C_n e D_n dos termos em $\sin(n\theta)$ têm que ser nulas. Para estes casos:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_n r^{(n+2)} [A_n \cos(n\theta) + B_n \cos(n+2)\theta], \quad (2.30)$$

Desta forma, as componentes de tensão geradas por esta função são obtidas por:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \sum_n \{(n+2)(n+1)r^n [A_n \cos n\theta + B_n \cos(n+2)\theta]\} \\ \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \sum_n \{(n+2)r^n [A_n \cos n\theta + B_n \cos(n+2)\theta] - r^n [n^2 A_n \cos n\theta + \\ &\quad + (n+2)^2 B_n \cos(n+2)\theta]\} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \sum_n \{(n+1)r^n [nA_n \sin n\theta + (n+2)B_n \sin(n+2)\theta]\}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

Para obedecer às condições de contorno das superfícies livres (ver Figura 2.10), as tensões normais e cisalhantes devem ser nulas nas faces da trinca, ou seja, $\sigma_\theta(\theta = \pm\pi) = \tau_{r\theta}(\theta = \pm\pi) = 0$, logo, deve-se ter:

$$\begin{aligned} (A_n + B_n) \cos(n\pi) &= 0 \quad \text{e} \\ [nA_n + (n+2)B_n] \sin(n\pi) &= 0. \quad (2.32) \end{aligned}$$

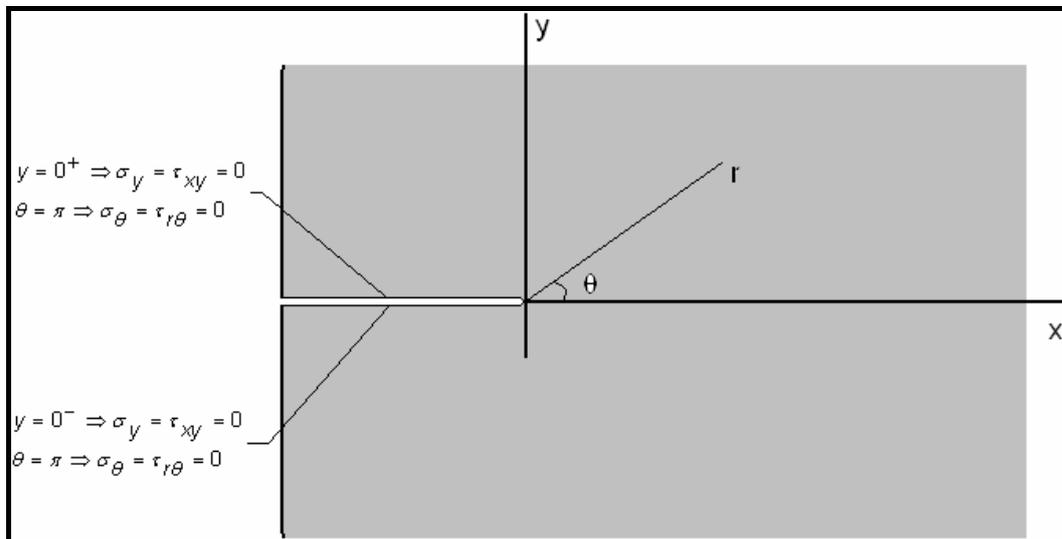


Figura 2.10 - Modos de carregamento de uma trinca em uma placa.

Para facilitar a imposição das condições de contorno das superfícies livres às faces da trinca, pode-se localizar a origem dos eixos cartesianos ou polares (xy ou $r\theta$) na sua ponta, fazendo as suas faces (nas quais tanto as tensões normais quanto as cisalhantes têm que ser zero quando a trinca estiver aberta) coincidirem

com o eixo x negativo ($\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ se $x < 0$ e $y = 0^+$ ou 0^-) ou com $\theta = \pm\pi$ (onde $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$). A primeira condição implica em:

$$n = \dots, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

$$A_n = -B_n; \quad (2.33)$$

Analisando os valores de n , pode-se concluir que:

- Os n positivos não reproduzem a física do problema (as tensões dependem de r^n e seriam infinitas longe da trinca).
- $n = 0$ gera tensões independentes de r , desprezadas nesta primeira análise por terem pouca influência próximo da ponta da trinca (mas que serão consideradas adiante).
- Só os n negativos reproduzem a concentração de tensões gerada pela trinca e a singularidade na sua ponta.

Prevêem-se tensões singulares ($r \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma \rightarrow \infty$) porque se supôs nulo o raio da ponta da trinca (logo $K_t \rightarrow \infty$), mas mesmo assim este modelo tem que prever que a energia de deformação E_D por elas gerada é finita e positiva; as tensões variam com r^n e a E_D cresce com σ^2 , logo em qualquer círculo de raio ρ centrado na ponta da trinca se tem:

$$E_D \approx \iint \frac{\sigma^2}{E} dA \Rightarrow 0 < \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\theta) d\theta \int_0^{\rho} r^{2n} r dr < \infty, \quad (2.34)$$

e como

$$0 < \int f^2(\theta) d\theta < \infty,$$

$$0 < \int_0^{\rho} r^{(2n+1)} dr = \frac{\rho^{(2n+2)}}{2n+2} < \infty \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow n > -1; \quad (2.36)$$

Assim, o único n possível é $n = -\frac{1}{2}$ (a singularidade da trinca é proporcional a $\frac{1}{\sqrt{r}}$ e, para obedecer à segunda condição acima, $A_n = 3B_n$, que podem ser escritos como:

$$A_{-\frac{1}{2}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \text{ e}$$

$$B_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} A_{-\frac{1}{2}} = \frac{K_I}{3\sqrt{2\pi}}, \quad (2.37)$$

para obter:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{K_I}{3\sqrt{2\pi}} r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3\theta}{2}. \quad (2.38)$$

Da função de tensão (2.38), é fácil obter o campo de tensões em modo I:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_I f_r(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_I f_\theta(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_I f_{r\theta}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$\sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0$, para um estado de tensão plana;

$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$, $\tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0$, para um estado de deformação plana. As deformações associadas são obtidas pela lei de Hooke. Em tensão plana $\sigma_z = 0$, logo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E} = \frac{K_I}{4E\sqrt{2\pi r}} \left[(5 - 3\nu) \cos \frac{\theta}{2} - (1 + \nu) \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E} = \frac{K_I}{4E\sqrt{2\pi r}} \left[(3 - 5\nu) \cos \frac{\theta}{2} + (1 + \nu) \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{-\nu(\sigma_r + \sigma_\theta)}{E} = \frac{-2\nu K_I}{E\sqrt{2\pi r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \right] \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi r}} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Em deformação plana $\varepsilon_z = 0$, mas como $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]}{E} = \frac{[(1 - \nu^2)\sigma_r - \nu(1 + \nu)\sigma_\theta]}{E} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{[(1 - \nu^2)\sigma_\theta - \nu(1 + \nu)\sigma_r]}{E} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi r}} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Os deslocamentos radiais u_r e tangenciais u_θ podem ser obtidos integrando:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\left[u_r + \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right) \right]}{r}; \quad (2.42)$$

obtendo:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \cdot \left[(4\lambda - 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_{\theta} &= \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \cdot \left[(1 - 4\lambda) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $\lambda = 2 \left[\frac{1}{1+\nu} \right]$ no caso de tensão plana ou $\lambda = 2(1-\nu)$ em deformação plana, e o

módulo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ nos materiais isotrópicos e homogêneos.

Para o modo II, pode-se obter as seguintes equações de tensão:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{1}{4} \left(5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g_r(\theta) \\ \sigma_{\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{1}{4} \left(\sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g_{\theta}(\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{1}{4} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \equiv \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g_{r\theta}(\theta) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$\sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0$, para um estado de tensão plana;

$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_{\theta})$, $\tau_{z\theta} = \tau_{zr} = 0$, para um estado de deformação plana.

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{K_{II}}{4G\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \cdot \left[(3 - 4\lambda) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_{\theta} &= \frac{K_{II}}{4G\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} \cdot \left[(1 - 4\lambda) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde $\lambda = 2 \left[\frac{1}{1+\nu} \right]$, para deformação plana e $\lambda = 2(1-\nu)$ para deformação plana

(Castro & Meggiolaro, 2002).

2.2.5. Solução de Westergaard para o campo linear elástico de tensões em uma placa infinita com uma trinca central

Westergaard mostrou que uma limitada classe de problemas poderia ser resolvida introduzindo uma função complexa de tensão $Z(z)$, onde $z = x + iy$ e $i = \sqrt{-1}$. A função de tensão de Westergaard se relaciona com a função de tensão de Airy ϕ da seguinte maneira:

$$\phi = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z}, \quad (2.46)$$

onde Re e Im são as partes real e imaginária da função, respectivamente, e as linhas sobre Z representam as integrações com respeito a z:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{d\bar{Z}}{z} \\ Z &= \frac{d\bar{Z}}{z}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Da função de tensão de Airy, para um meio bidimensional, linear elástico, isotrópico, homogêneo e contínuo, temos que:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (2.48)$$

aplicando as Equações (2.47) e (2.48):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z - \operatorname{Im} Z \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z + \operatorname{Im} Z \\ \tau_{xy} &= y \operatorname{Re} Z'. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Pode-se notar que a parte imaginária das tensões é zero quando $y = 0$. Ademais, como o cortante também é zero quando $y = 0$, então o plano da trinca é um plano principal. Portanto, as tensões são simétricas para $\theta = 0$ e a Equação (2.49) implica carregamento em modo I.

A função de tensão de Westergaard, em sua forma original, é apropriada para solucionar um limitado número de problemas com trincas em modo I. Subseqüentes modificações generalizam a função de Westergaard para ser aplicável num mais amplo número de problemas com trincas.

Considere uma trinca central numa placa infinita sob tensão biaxial remota (ver Figura 2.11). Se a origem das coordenadas é definida no centro da trinca, a função de tensão de Westergaard é dada por:

$$Z(z) = \frac{\sigma_n z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (2.50)$$

onde σ_n é a tensão remota e a é a metade do comprimento da trinca.

Considerando o plano da trinca onde $y = 0$, para $-a < x < a$, Z é toda imaginária; enquanto Z é real para $|x| > |a|$. As tensões normais no plano da trinca são dadas por:

$$\sigma_x = \sigma_y = \operatorname{Re} Z = \frac{\sigma_n x}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (2.51)$$

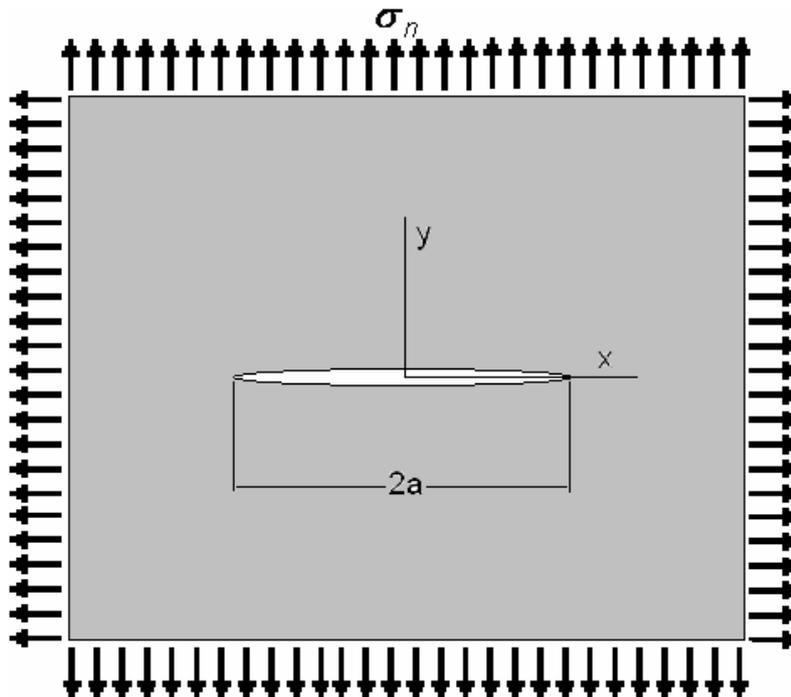


Figura 2.11 - Placa infinita com uma trinca central sob carregamento biaxial.

Agora consideremos a distância horizontal desde cada ponta da trinca, $x^* = x - a$, a Equação (2.51) torna-se:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2x^*}}. \quad (2.52)$$

Para $x^* \ll a$, Westergaard reproduz à mesma singularidade de Williams da inversa da raiz quadrada. Uma vantagem desta análise é que relaciona a tensão local com a tensão global e o tamanho da trinca. Da Equação (2.39), a tensão no plano da trinca ($\theta = 0$) é dada por:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x^*}}. \quad (2.53)$$

Comparando a Equação (2.52) e (2.53) temos:

$$K_I = \sigma_n \sqrt{\pi a}, \quad (2.54)$$

para a configuração da Figura 2.11. Substituindo a Equação (2.54) na Equação (2.50) resulta numa expressão da função de tensão de Westergaard em termos de K_I :

$$z(z^*) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z^*}}, \quad (2.55)$$

onde $z^* = z - a$. Fazendo a seguinte substituição na Equação(2.55):

$$z^* = re^{i\theta}, \quad (2.56)$$

onde:

$$r^2 = (x - a)^2 + y^2 \text{ e } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x - a}\right), \quad (2.57)$$

isto nos leva à mesma solução achada a partir da solução de Williams, Equação (2.21):

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} f_x(\theta)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} f_y(\theta)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} f_{xy}(\theta).$$

Para deformação plana, os deslocamentos no plano são relacionados à função de tensões de Westergaard da seguinte maneira:

$$u_x = \frac{1}{2 \cdot G} \left[(1 - 2\nu) \operatorname{Re} \bar{Z} - y \operatorname{Im} Z \right]$$

$$u_y = \frac{1}{2 \cdot G} \left[2(1 - \nu) \operatorname{Im} \bar{Z} - y \operatorname{Re} Z \right]. \quad (2.58)$$

Para a placa da Figura 2.11, a abertura das faces da trinca (COD) é dada por:

$$2u_y = \frac{1 - \nu}{G} \operatorname{Im} \bar{Z} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \operatorname{Im} \bar{Z} = \frac{4(1 - \nu^2) \sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (2.59)$$

assumindo deformação plana, e para tensão plana:

$$2u_y = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.60)$$

Os deslocamentos perto da ponta da trinca podem ser obtidos substituindo a Equação (2.55) em (2.58):

$$u_x = \frac{K_I}{2 \cdot G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

$$u_y = \frac{K_I}{2 \cdot G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (2.61)$$

para $r \ll a$, onde:

$$\kappa = 3 - 4\nu, \quad (2.62)$$

para deformação plana e

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad (2.63)$$

para tensão plana (T.L. Anderson, 2005).

2.2.6. Modificação da solução de Westergaard para o campo linear elástico de tensões em torno de uma trinca

Apesar de a função de tensão de Westergaard descrever corretamente as tensões no modo I em certo número de configurações, ela não é suficientemente geral para aplicar em todos os problemas de modo I; devido a esta falha, várias modificações para a função de Westergaard foram apresentadas. Irwin observou que franjas padrão fotoelásticas observadas por Wells e Post em mostras com trincas centrais não contornaram a deformação das tensões cortantes como predito pela solução de Westergaard (Anderson, 2005).

Irwin concluiu que restando σ_n (tensão nominal) à tensão σ_x , na solução de Westergaard, a função obedeceria às condições de contorno da placa sob tração uniaxial (Castro & Meggiolaro, 2002):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z - \operatorname{Im} Z' - \sigma_n \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z + \operatorname{Im} Z' \\ \tau_{xy} &= y \operatorname{Re} Z' \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.2.7. Estimativa da zona plástica na ponta da trinca

O material na ponta da trinca, quando é carregado, deforma plasticamente dentro da zona onde as tensões locais excedem o valor crítico S_E ; então a zona plástica é formada. No resto do volume da peça, a tensão é menor que S_E e o comportamento é elástico. A presença da zona plástica também trocaria a distribuição das tensões fora dela (com respeito ao caso elástico). Se a zona plástica é pequena em comparação com as dimensões da peça e o comprimento da

trinca, é possível assumir que a distribuição das tensões longe da ponta da trinca é idêntica à solução elástica. Esta situação é chamada de escoamento em pequena escala e corresponde à maioria dos casos reais de propagação de trincas por fadiga.

Um material ideal elastoplástico tem comportamento elástico quando as tensões são menores que S_E , e quando atingem S_E o material escoar sem encruar. O estado de tensões na ponta da trinca pode ser bidimensional (tensão plana) ou tridimensional (deformação plana). De acordo com o critério de Von Mises, o material escoar quando a tensão equivalente, dada pela expressão:

$$\sigma_{mises} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.65)$$

atinge a tensão de escoamento (S_E). σ_1 , σ_2 e σ_3 são as componentes das tensões principais, as quais podem ser facilmente obtidas da Equação (2.21):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_2 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_3 &= 0 \quad (\text{tensão plana}) \\ \sigma_3 &= \frac{2 \cdot \nu \cdot K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (\text{deformação plana}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Combinando as Equações (2.65) e (2.66) pode-se obter o tamanho da zona plástica (Z_p) na direção do ângulo polar θ , para tensão plana:

$$Z_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

(2.67) e para deformação plana:

$$Z_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4\nu(1-\nu) \right]. \quad (2.68)$$

Na superfície livre as componentes das tensões perpendiculares à superfície são zero, logo as condições de tensão plana são cumpridas. Por outro lado, o estado das tensões na ponta da trinca, na metade da espessura da peça, é próximo a deformação plana, se a peça é suficientemente grossa para permitir esta transição. O tamanho da zona plástica na superfície é dado pela Equação (2.67) e no meio da peça pela Equação (2.68). Entre os dois extremos, uma contínua transição é esperada (ver Figura 2.12). O valor do tamanho da zona plástica na

direção em que a trinca propaga $\theta = 0$ (direção x) é obtido das Equações (2.67) e (2.68), para tensão plana:

$$Zp_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2, \quad (2.69)$$

e para deformação plana temos:

$$Zp_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2 (1 - 2\nu)^2. \quad (2.70)$$

A suposição de um comportamento elastoplástico ideal no material é um tanto irreal e por isto os resultados devem ser tomados só como uma primeira aproximação. Além disso, a solução apresentada não considera a redistribuição das tensões devido ao escoamento do material dentro da zona plástica na ponta da trinca. Esta redistribuição das tensões pode ser tida em conta considerando as condições de equilíbrio que devem ser cumpridas pelas forças internas junto com as externas para a solução elástica e elastoplástica.

Para o caso de tensão plana temos que o material na ponta da trinca escoava quando a tensão σ_y excede o S_E do material. Da Equação (2.66) temos que a tensão σ_y para $\theta = 0$ é dada por:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot x}}. \quad (2.71)$$

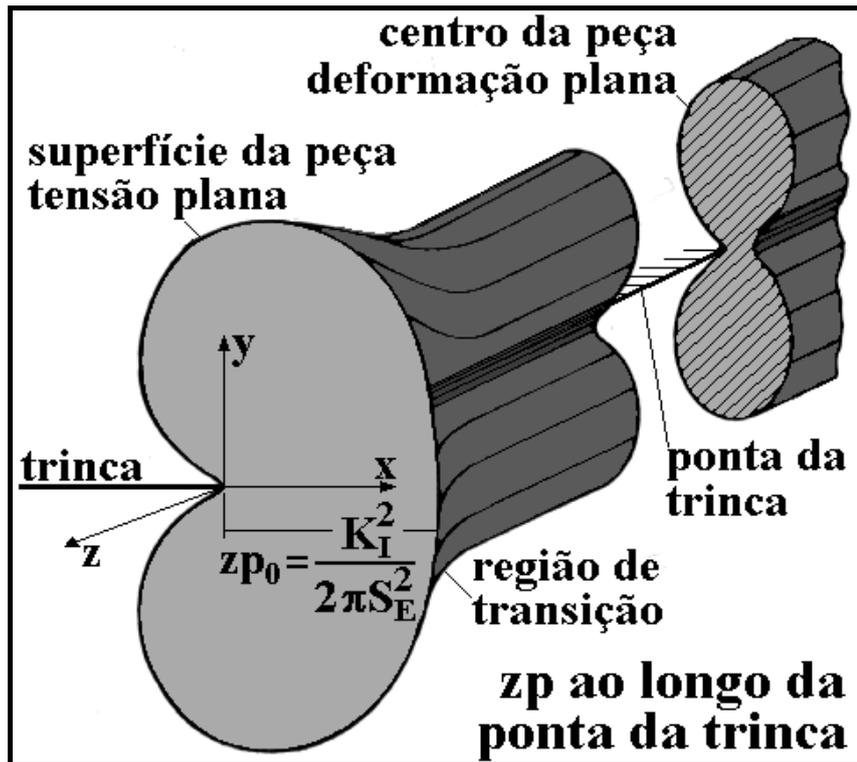


Figura 2.12 - Variação da zona plástica com a espessura em peças suficientemente grossas (Castro & Meggiolaro, 2002).

Para a solução elástica, a condição de equilíbrio, entre a força externa P_e e as forças internas, é definida por unidade de espessura como:

$$P_e = \int_0^{\infty} \sigma_y(x) dx. \quad (2.72)$$

Para a solução elasto-plástica, assumiremos que a distribuição das tensões é também elástica, mas com a origem das coordenadas deslocada numa distância x_1 , a qual se pode obter da condição de equilíbrio para este caso:

$$P_e = S_E \cdot Z_p + \int_{Z_p}^{\infty} \sigma_y(x - x_1) dx, \quad (2.73)$$

onde Z_p é o tamanho da zona plástica.

Por simples substituição, obtemos a seguinte identidade:

$$\int_{Z_p}^{\infty} \sigma_y(x - x_1) dx \equiv \int_{Z_p - x_1}^{\infty} \sigma_y(x) dx \equiv \int_0^{\infty} \sigma_y(x) dx - \int_0^{Z_p - x_1} \sigma_y(x) dx. \quad (2.74)$$

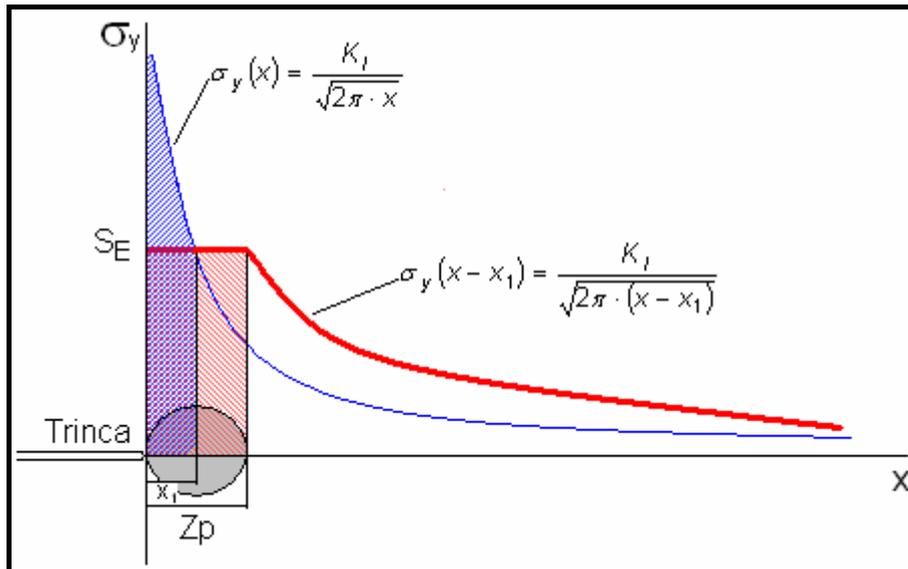


Figura 2.13 - Redistribuição das tensões σ_y para manter o equilíbrio das forças numa peça trincada em tensão plana. Klesnil & Lukás (1992), modificado.

Combinando Equações (2.72), (2.73) e (2.74), se obtém:

$$S_E \cdot Z_p = \int_0^{Z_p - x_1} \sigma_y(x) dx, \quad (2.75)$$

onde $\sigma_y(x)$ é dado pela Equação (2.71). Substituindo (2.71) em (2.75) e integrado temos:

$$S_E \cdot Z_p = \frac{2 \cdot K_I \cdot \sqrt{Z_p - x_1}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.76)$$

Para a curva com origem deslocada (ver Figura 2.13): $\sigma_y = S_E$ para $x = Z_p$;

então:

$$S_E = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(Z_p - x_1)}}, \quad (2.77)$$

substituindo Equação (2.77) em (2.76) obtemos:

$$Z_p = 2x_1. \quad (2.78)$$

O tamanho da zona plástica é obtido finalmente substituindo a Equação (2.78) na Equação (2.77), isto é:

$$Z_p = Z_{p-\sigma-plana} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2, \quad (2.79)$$

para tensão plana (Klesnil & Lukás, 1992).

No plano à frente das pontas das trincas em deformação plana temos: $\sigma_x = \sigma_y$ e $\sigma_z = 2\nu \cdot \sigma_y$, e como o coeficiente de Poisson para metais está entre $\frac{1}{4} < \nu < \frac{1}{3}$, neste caso o escoamento só ocorre quando:

$$\sigma_y = \frac{S_E}{(1-2\nu)} = \lambda \cdot S_E,$$

(2.80) onde λ pode tomar um valor de 2 a 3. Logo, é como se a resistência ao escoamento dos metais fosse 2 a 3 vezes maior em deformação plana que em tensão plana, mas Irwin usou $\lambda = \sqrt{3}$, e obteve:

$$Zp_{\varepsilon-plana} = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2, \quad (2.81)$$

para deformação plana (Castro & Meggiolaro, 2002).

O comprimento da zona plástica na ponta da trinca, conforme o modelo de Irwin, tem sido usado para caracterizar o estado de tensão na peça trincada (tensão plana ou deformação plana). De acordo com a *ASTM Standard E399*, a condição da tensão é caracterizada como tensão plana quando $Zp = B$ e como deformação plana quando $Zp < \frac{B}{25}$, onde B é a espessura da peça. Da Equação (2.79), pode-se obter que para a condição de deformação plana (E.E. Gdoutos, 2005):

$$B > \frac{25}{3\pi} \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2 \cong 2.5 \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2 \quad (2.82)$$

2.2.8. Abertura da ponta da trinca (CTOD)

Quando Wells tentou medir o valor do K_{Ic} (que é uma maneira de quantificar a tenacidade) num número de metais estruturais, achou que os materiais eram tenazes demais para ser quantificada pela LEFM. Alta tenacidade é desejada pelos projetistas mas não por Wells em seus testes, que indicavam que a teoria da mecânica da fratura não era mais aplicável numa importante classe de materiais. Wells observou que as faces da trinca, nos corpos de prova fraturados, estavam mais afastadas uma da outra. Deformação plástica havia cegado a ponta inicialmente afiada (ver Figura 2.14). A quantidade de cegamento da ponta da trinca aumenta em proporção à tenacidade do material. Wells propôs a abertura da ponta da trinca como medida da resistência à fratura, este parâmetro é conhecido como CTOD (Crack Tip Opening Displacement).

Em seu trabalho original, Wells realizou uma análise aproximada que relacionou CTOD com o fator de intensidade de tensão no limite do escoamento em pequena escala. Considerando uma trinca com uma pequena zona plástica, como na Figura 2.14, Irwin apresentou que a pequena zona plástica na ponta da trinca faz que a trinca tenha um comportamento como se fosse um pouco maior do que é. Assumindo um comprimento de trinca de $a + r_y$, da Equação (2.61) temos:

$$u_y = \frac{\kappa+1}{2 \cdot G} K_I \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} \quad (2.83)$$

e da estimativa de Irwin da zona plástica temos:

$$r_y = \frac{Zp}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{S_E} \right)^2, \quad (2.84)$$

substituindo a Equação (2.84) em (2.83) temos:

$$CTOD = \delta = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{S_E \cdot E} \quad (2.85)$$

e para deformação plana temos (Anderson, 2005):

$$CTOD = \delta = 2u_y = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2 \cdot (1-\nu^2)}{S_E \cdot E} \quad (2.86)$$

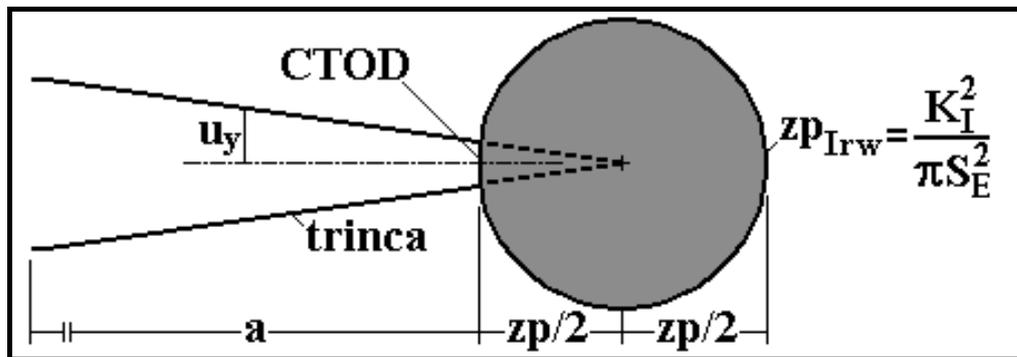


Figura 2.14 - Estimativa da abertura da ponta da trinca a partir de K_I , sob condições predominantemente LE, a partir da hipótese de Irwin de que a trinca se comporta como

se tivesse um comprimento $a + \frac{z_p \text{Irwin}}{2}$ (Castro & Meggiolaro, 2002).