

## 4 Simulações

No intuito de avaliar o controle de estabilidade proposto e visualizar o comportamento do sistema, foi utilizado um simulador. Para tal, foi implementado no programa Matlab 7.01 um algoritmo e seu detalhamento será mostrado a seguir. Entretanto se faz necessário explicar a modelagem do terreno como foi feito com o veículo no capítulo 2.

### 4.1. Modelagem do terreno

O perfil do terreno é obtido através de pontos discretizados  $(x,y)$ , onde  $y = f(x)$ . Estes pontos possuem um espaçamento constante em  $x$ , representado na Fig. 16:

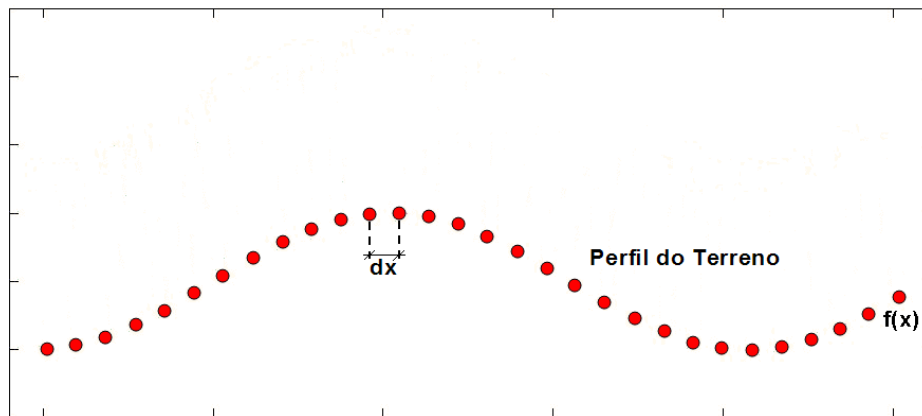


Figura 16 – Discretização do perfil do terreno.

Em seguida, é calculada a direção a  $f(x)$  normal em cada ponto da curva do perfil do terreno. Tomando essas normais, com magnitude igual à distância do raio da roda do veículo, é possível gerar uma nova curva, chamada de curva de centro. Esta curva representa a trajetória seguida pelo centro das rodas, assumindo o não-descolamento das mesmas, ilustrada nas Figuras 17 e 18.

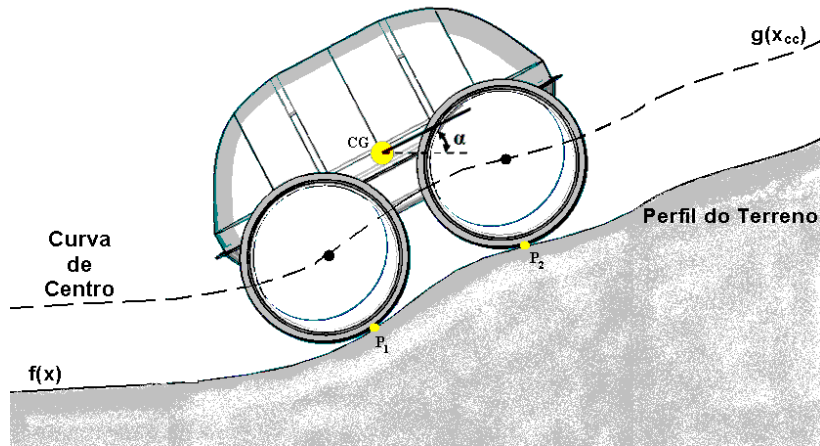


Figura 17 – Trajetória seguida pelos eixos das rodas.

Através da aplicação de um tratamento matemático apropriado aos pontos  $(x_{cc}, y_{cc})$  da curva de centro, é possível transformar esta curva em uma função onde os seus pontos serão da forma  $(x_{cc}, g(x_{cc}))$ , onde  $x_{cc}$  é um conjunto de pontos em  $x$  que não necessariamente distam  $dx$  entre si.

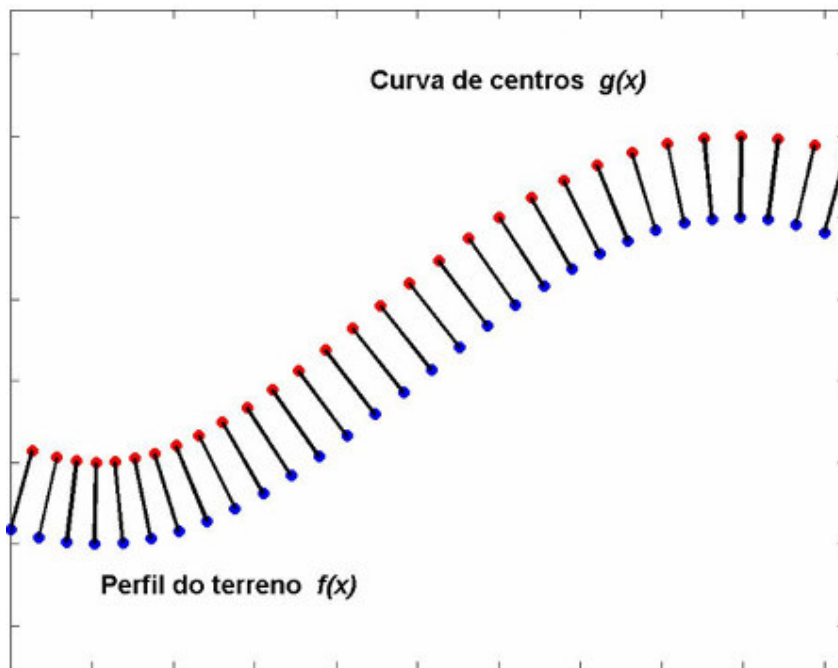


Figura 18 – Curva de centro.

O Cálculo dos pontos da curva de centro é feito da seguinte forma:

A normal unitária à curva do perfil do terreno em um ponto  $(x, f(x))$ , pertencente a mesma, é calculada como mostrado abaixo, conforme [4]:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla C_p}{|\nabla C_p|}$$

onde:

$$C_p = y - f(x) = 0$$

$$\nabla C_p = -f'(x)\vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$$

$$|\nabla C_p| = \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}$$

Assim resulta:

$$\mathbf{n} = \frac{-f'(x)\vec{i} + 1 \cdot \vec{j}}{\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}}$$

onde  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são os vetores unitários nas direções x e y, respectivamente.

Tomando o vetor  $\mathbf{u} = r \cdot \mathbf{n}$  como sendo o vetor que liga o ponto  $(x, f(x))$  ao seu correspondente  $(x_{cc}, y_{cc})$  pertencente à curva de centro, tem-se que:

$$\mathbf{u} = r \cdot \left( \frac{-f'(x)\vec{i}}{\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}} \right) \quad (48)$$

$$\mathbf{u} = (x_{cc}, y_{cc}) - (x, f(x)) \quad (49)$$

De (48) e (49), obtêm-se os seguintes valores para  $(x_{cc}, y_{cc})$ :

$$x_{cc} = x - r \cdot \left( \frac{f'(x)}{\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}} \right) \quad (50)$$

$$y_{cc} = y + r \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}} \right) \quad (51)$$

Na maioria das vezes o contato entre a roda e o terreno ocorre em um único ponto, podendo ter situações onde este contato se faz em mais de um ponto. Nas simulações aqui descritas, para os perfis utilizados, assume-se que não existem mais de dois pontos de contato.

Observando as equações acima nota-se que para o cálculo da normal é necessário que  $f(x)$  seja derivável no ponto onde se deseja calcular a normal, no entanto nos perfis dos terrenos utilizados podem existir pontos que não possuem derivadas, não possibilitando o cálculo dos pontos correspondentes da curva de centro através das equações (50) e (51) acima.

Os casos acima mencionados são tratados da seguinte forma:

- a) No ponto  $(x, f(x))$  em que  $f(x)$  não é diferenciável e  $f'(x - \delta\epsilon) > f'(x + \delta\epsilon)$ , para  $\delta\epsilon \in \mathfrak{R}_+^*$ , a roda irá girar em torno deste ponto. Sendo que a trajetória descrita pelo seu centro geométrico será um arco de circunferência de raio  $r$  e centro em  $(x, f(x))$ , conforme ilustrado na Fig. 19. Este arco é incluído então na discretização de  $(x_{CC}, g(x_{CC}))$ .

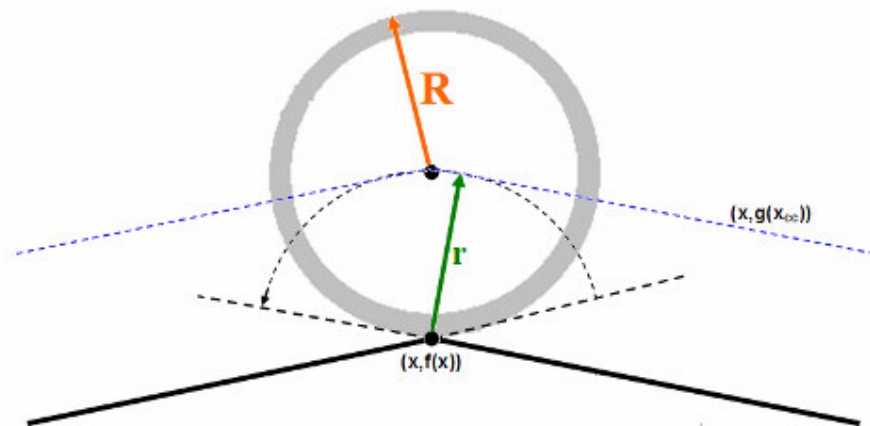


Figura 19 – Ponto do perfil do terreno não diferenciável.

- b) Nos pontos onde  $f'(x - \delta\epsilon) < f'(x + \delta\epsilon)$ , para  $\delta\epsilon \in \mathfrak{R}_+^*$ , haverá uma situação limite onde a roda terá dois pontos de contato com o terreno, conforme a Fig. 20.

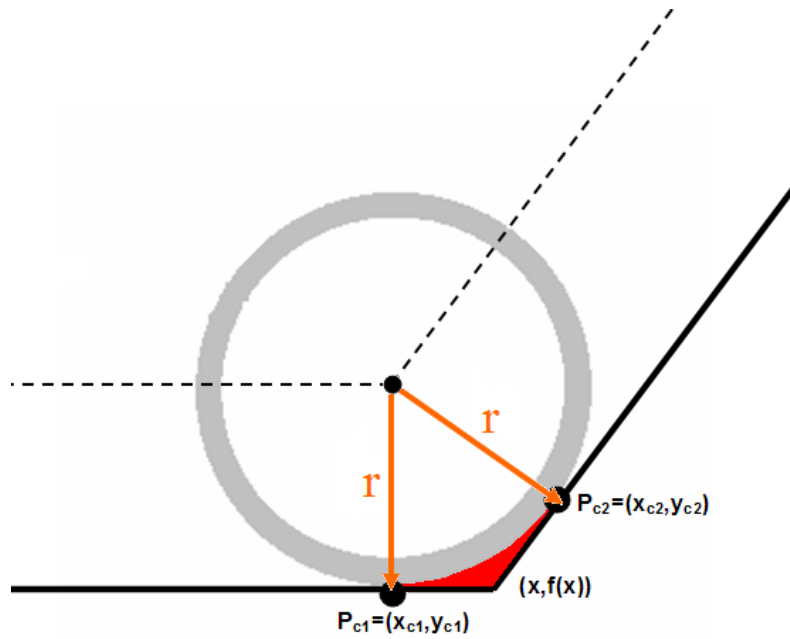


Figura 20 - Situação onde existe dois pontos de contato da roda com o terreno.

Conforme se pode ver na Fig. 20, os pontos do terreno delimitados pelos valores de  $x \in ]x_{c1}, x_{c2}[$  não terão pontos correspondentes na curva de centro, pois os mesmos não são pontos de contato. E os pontos  $P_{c1}$  e  $P_{c2}$  irão gerar o mesmo ponto na curva de centro.

- c) Em regiões onde o raio de curvatura ( $r_c$ ) de  $f(x)$  é menor que o raio da roda haverá também dois pontos de contato, tendo as mesmas o mesmo tratamento que os casos do item (b) acima. A Fig. 21 ilustra esta situação.

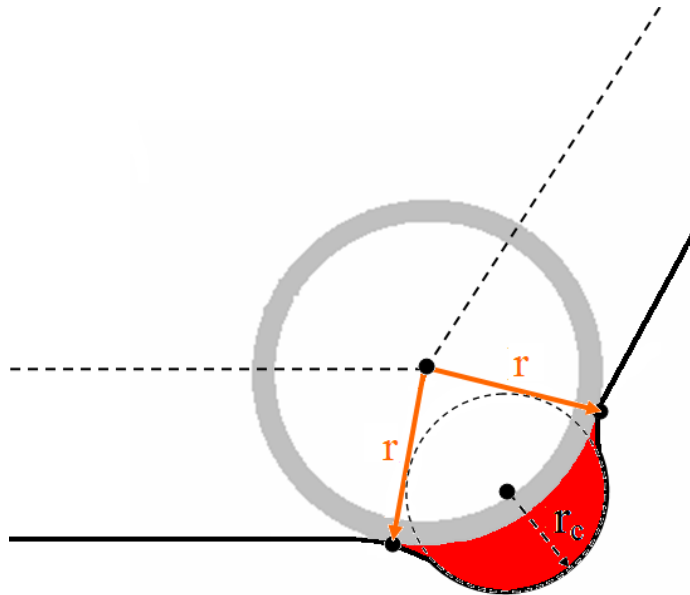


Figura 21 - Situação onde o raio de curvatura do perfil do terreno é menor que o raio da roda.

A interseção do contorno das rodas com o perfil do terreno  $f(x)$  determina os pontos de contato,  $P_1$  e  $P_2$ , das rodas com o terreno.

Os ângulos formados pelas tangentes do perfil do terreno, nos pontos de contato  $P_1$  e  $P_2$ , com a horizontal, determinam os ângulos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . No capítulo 2 estes ângulos foram ilustrados na Fig. 8.

Para cada perfil selecionado e mantendo os parâmetros iniciais, foram feitas duas simulações. A primeira sem utilizar o controle e a segunda utilizando-o.

## 4.2. Descrição do Algoritmo Utilizado na Simulação

O algoritmo da simulação é dividido em cinco módulos, sendo que cada um deles é responsável por:

### Módulo I:

É responsável pela entrada dos parâmetros físicos e geométricos do veículo, das coordenadas  $(x_c, y_c)$  e das velocidades  $(\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\alpha})$  iniciais do centro de gravidade. Este módulo também calcula os pontos  $(x_{cc}, g(x_{cc}))$  pertencentes à

curva de centro e o valor inicial do ângulo de inclinação do veículo ( $\alpha$ ) de modo que ambas as rodas estejam em contato com o terreno.

Os parâmetros físicos são os seguintes:

$m$  = massa do veículo em [kg].

$I$  = momento de inércia de massa do veículo em relação ao centro de gravidade em [kg.m<sup>2</sup>].

$F_{SAT}$  = força máxima gerada pelo motor em [N], sendo que a mesma é considerada igual em ambos os sentidos (este valor é igual ao torque máximo nas rodas dividido pelo seu raio).

$g$  = aceleração da gravidade local [m/s<sup>2</sup>].

$\mu$  = coeficiente de atrito entre a roda e o terreno.

Os parâmetros geométricos são:

$r$  = raio da roda em [m].

$L_1$  = distância longitudinal, em [m], do centro geométrico da roda 1 ao centro de massa, conforme a definição feita no capítulo 2.

$L_2$  = distância longitudinal, em [m], do centro geométrico da roda 2 ao centro de massa, conforme a definição feita no capítulo 2.

$h_1$  = distância vertical, em [m], do centro geométrico da roda 1 ao centro de massa, conforme a definição feita no capítulo 2.

$h_2$  = distância vertical, em [m], do centro geométrico da roda 2 ao centro de massa, conforme a definição feita no capítulo 2.

Variáveis de estado atual:

$x_c$  = abscissa do centro de gravidade do veículo.

$y_c$  = coordenada do centro de gravidade do veículo.

$\dot{x}_c$  = velocidade do centro de gravidade do veículo na coordenada x, em [m/s].

$\dot{y}_c$  = velocidade do centro de gravidade do veículo na coordenada  $y$ , em [m/s].

$\dot{\alpha}$  = velocidade angular do centro de gravidade do veículo, em [rad/s].

### **Módulo II:**

É responsável por calcular as coordenadas  $(x_{c_i}, y_{c_i})$  e as velocidades  $(\dot{x}_{c_i}, \dot{y}_{c_i})$  dos centros geométricos das rodas 1 e 2.

A partir da curva de centro, é feito o posicionamento o veículo no terreno utilizando o ângulo de inclinação do veículo ( $\alpha$ ) e as coordenadas do centro de gravidade  $(x_c, y_c)$ .

### **Módulo III:**

Este módulo é responsável por calcular os parâmetros relacionados às equações dinâmicas e às restrições.

São calculados primeiramente os pontos de contato da roda com o terreno,  $P_1 = [x_1, y_1]$  e  $P_2 = [x_2, y_2]$ . Consequentemente são obtidos os ângulos de contato  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  que são ilustrados na Fig. 8.

Também são determinados os parâmetros de restrição através do cálculo das equações (22 - 28) do Capítulo 3.

Este módulo apresenta um comportamento diferenciado em relação ao uso ou não do controle de estabilidade para as forças de atrito ( $Fat_1$  e  $Fat_2$ ) demonstrado a seguir:

#### 1. Simulação com Controle de Estabilidade:

Neste caso, as forças de atrito e os parâmetros de restrição são calculados obtendo assim a região D, das possíveis forças de atrito, demonstrados no Capítulo 3 na Fig. 14. Depois de obtida a região D, verifica se é possível ou não aplicar forças ( $Fat_1$ ,  $Fat_2$ ) que estejam nesta região. Em caso afirmativo, é feita uma otimização minimizando as razões  $\frac{Fat_i}{N_i}$ ,  $i=1,2$ , para obter um valor para as

forças  $Fat_1$  e  $Fat_2$ . Caso contrário a simulação é interrompida.



## 2. Simulação sem Controle de Estabilidade:

Quando não é considerado o controle de estabilidade, as forças de atrito são parâmetros de entrada do sistema. Arbitrários, definidos a priori.

### Módulo IV:

É responsável por fazer o cálculo da dinâmica do sistema calculando  $\mathbf{u} = G^{-1}U$ . Através da obtenção do vetor  $\mathbf{u} = [\ddot{x}_c \quad \ddot{y}_c \quad \ddot{\alpha} \quad N_1 \quad N_2]^T$ , determinam-se os valores das forças normais ( $N_1$  e  $N_2$ ) e das acelerações do centro de gravidade ( $\ddot{x}_c, \ddot{y}_c$  e  $\ddot{\alpha}$ ).

### Módulo V:

Este módulo é responsável por calcular o novo estado do veículo, que servirá como dado de entrada para os cálculos seguintes. O cálculo deste novo estado é feito como mostra a seguir:

$$x_c^{(N)} = x_c^{(N-1)} + \dot{x}_c^{(N-1)} \cdot dt + \frac{\ddot{x}_c^{(N-1)} \cdot (dt)^2}{2}$$

$$y_c^{(N)} = y_c^{(N-1)} + \dot{y}_c^{(N-1)} \cdot dt + \frac{\ddot{y}_c^{(N-1)} \cdot (dt)^2}{2}$$

$$\alpha_c^{(N)} = \alpha_c^{(N-1)} + \dot{\alpha}_c^{(N-1)} \cdot dt + \frac{\ddot{\alpha}_c^{(N-1)} \cdot (dt)^2}{2}$$

onde:

$x_c^{(N)}$ ,  $y_c^{(N)}$  e  $\alpha_c^{(N)}$  representam a posição e a inclinação do centro de gravidade do veículo no estado novo.

$x_c^{(N-1)}$ ,  $y_c^{(N-1)}$  e  $\alpha_c^{(N-1)}$  representam a posição e a inclinação do centro de gravidade do veículo no estado atual.

$\dot{x}_c^{(N-1)}$ ,  $\dot{y}_c^{(N-1)}$  e  $\dot{\alpha}_c^{(N-1)}$  representam as velocidades do centro de gravidade do veículo no estado atual.

$\ddot{x}_c^{(N-1)}$ ,  $\ddot{y}_c^{(N-1)}$  e  $\ddot{\alpha}_c^{(N-1)}$  representam as acelerações do centro de gravidade do veículo no estado atual.

Fazendo um truncamento de segunda ordem na expansão em série de Taylor de  $x_c$ ,  $y_c$  e  $\alpha$  em torno do ponto  $x_c^{(N-1)}$ ,  $y_c^{(N-1)}$  e  $\alpha_c^{(N-1)}$ , podem-se determinar as velocidades do veículo da seguinte forma:

$$\dot{x}_c^{(N)} = \dot{x}_c^{(N-1)} + \ddot{x}_c^{(N-1)} \cdot dt$$

$$\dot{y}_c^{(N)} = \dot{y}_c^{(N-1)} + \ddot{y}_c^{(N-1)} \cdot dt$$

$$\dot{\alpha}_c^{(N)} = \dot{\alpha}_c^{(N-1)} + \ddot{\alpha}_c^{(N-1)} \cdot dt$$

onde:

$\dot{x}_c^{(N)}$ ,  $\dot{y}_c^{(N)}$  e  $\dot{\alpha}_c^{(N)}$  representam as velocidades do centro de gravidade do veículo no estado novo.

O valor de  $dt$  considerado é constante, sendo que quanto menor este valor melhor será a aproximação do novo estado do sistema ( $x_c, y_c$  e  $\alpha$ ). No entanto, quanto menor o valor de  $dt$  mais passos serão utilizados, aumentando o tempo de simulação. Assim, deve-se buscar um valor de  $dt$  que busque um equilíbrio entre a precisão e o custo computacional.

A partir da obtenção da posição e da inclinação do veículo, é feito um ajuste do veículo ao terreno obtendo assim os valores reais de  $x_c$ ,  $y_c$  e  $\alpha$ . Este algoritmo de ajuste será detalhado a seguir.

### 4.3. Algoritmo de Ajuste

É fundamental fazer o ajuste do veículo ao terreno nas simulações, pois sempre haverá um erro residual de posicionamento quando se comparam as variáveis do novo estado calculado com o próximo ponto do terreno que é arbitrário. Este erro residual, de segunda ordem, é resultado da discretização do

terreno e das aproximações das séries de Taylor no Módulo IV. A Fig. 22 ilustra este procedimento para corrigir o erro residual.

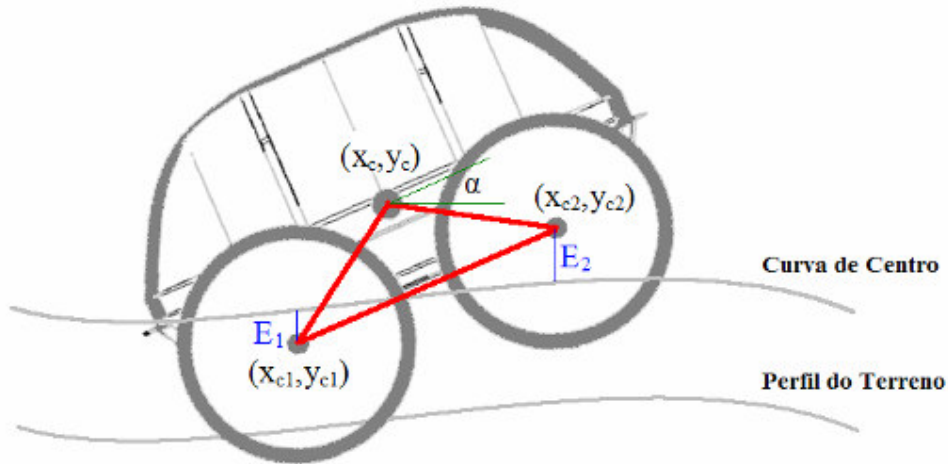


Figura 22 – Ajuste da curva de centro para simulação.

O ajuste inicial busca o ângulo  $\alpha$ , para um dado ponto do centro de gravidade  $(x_c, y_c)$ .

Para achar a inclinação do veículo, faz-se uma varredura de  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  para

encontrar  $\alpha$  que minimize  $S_E$ , dada abaixo:

$$S_E = |E_1| + |E_2|$$

$$E_1 = y_{c1} - g(x_{c1})$$

$$E_2 = y_{c2} - g(x_{c2})$$

Onde:  $g(x)$  representa a curva de centros.

Substituindo o valor de  $y_{c1}$  e  $y_{c2}$  acima, tem-se que:

$$E_1 = y_c - L_1 \cdot \text{sen}(\alpha) - h_1 \cdot \text{cos}(\alpha) - g(x_{c1})$$

$$E_2 = y_c + L_2 \cdot \text{sen}(\alpha) - h_2 \cdot \text{cos}(\alpha) - g(x_{c2})$$

Logo:

$$S_E(\alpha) = |y_c - L_1 \cdot \text{sen}(\alpha) - h_1 \cdot \text{cos}(\alpha) - g(x_{c1})| + |y_c + L_2 \cdot \text{sen}(\alpha) - h_2 \cdot \text{cos}(\alpha) - g(x_{c2})|$$

Assim, deseja-se encontrar  $\alpha$  tal que  $S_E(\alpha) \leq \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma dada tolerância.

Sendo  $E_1$  e  $E_2$  definido como acima, deseja-se encontrar um  $\alpha$  que resulte em:

Sendo:

$$\Delta E = |E_1 - E_2|$$

Deseja-se encontrar  $\alpha$  que minimize  $\Delta E$ .

Uma vez encontrado  $\alpha_E$  que minimize  $\Delta E$ , calculam-se as novas coordenadas do centro de gravidade (CG) da seguinte forma:

$$E = \frac{(E_1 + E_2)}{2}$$

$$y_c^n = y_c - E$$

$$\alpha^n = \alpha_E$$

Desta forma, mantendo  $x_c$  e colocando o veículo com inclinação  $\alpha^n = \alpha_E$ , resta apenas ajustar  $y_c$  para garantir o posicionamento no estado novo com o mínimo de erro.

O fluxograma abaixo ajuda a compreender melhor o algoritmo utilizado para simular o comportamento dinâmico do veículo.

As equações resultantes servirão para a implementação do algoritmo em linguagem de programação.

A Fig. 23 ilustra o fluxograma do algoritmo utilizado nas simulações.

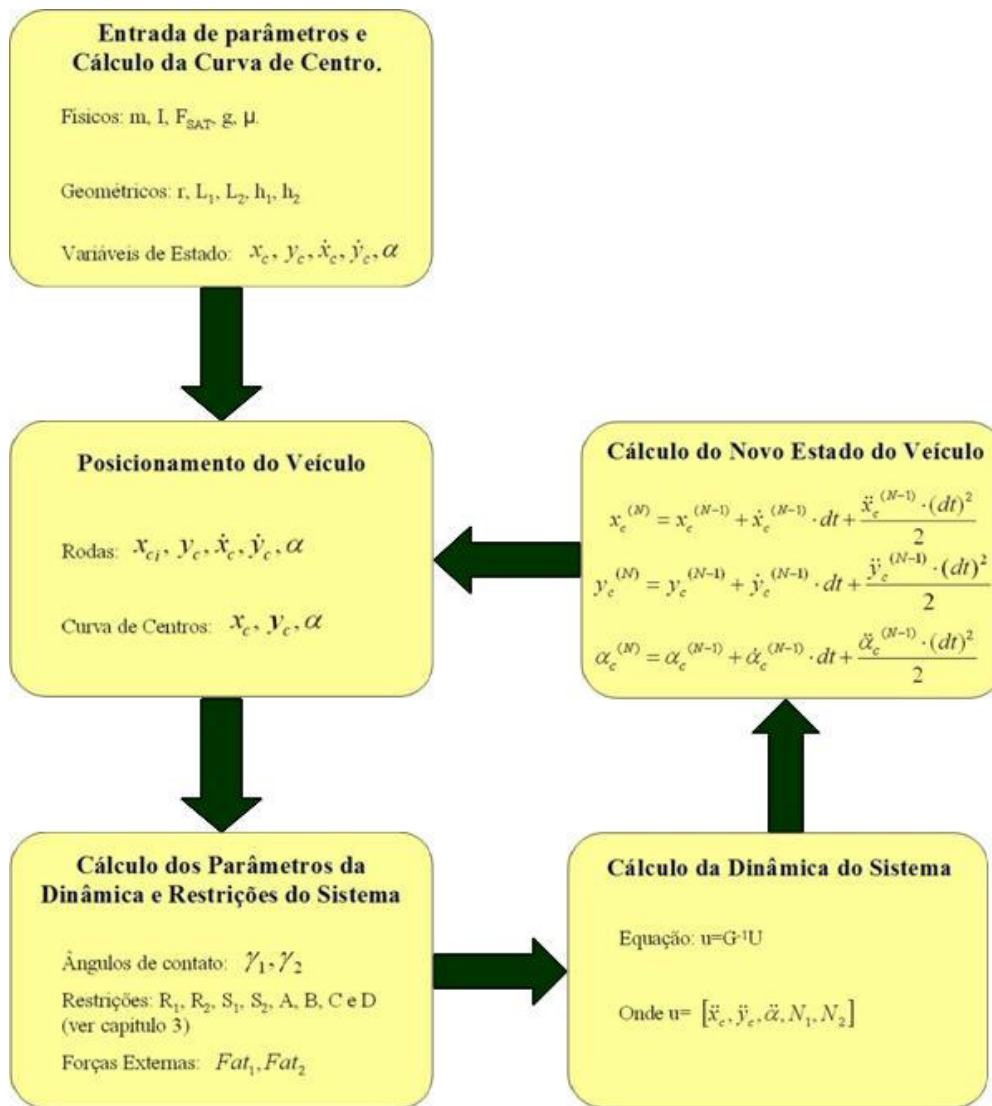


Figura 23 – Fluxograma que demonstra o algoritmo utilizado nas simulações.