

2 Modelagem do veículo

As equações cinemáticas e dinâmicas analisadas neste capítulo consideram o veículo e o terreno como um único corpo rígido. O modelo utilizado é baseado na arquitetura do Robô Ambiental Híbrido, porém não considerando a possibilidade de cambagem das rodas. Sendo assim, não se pode reconfigurar os parâmetros geométricos do robô.

O perfil do terreno, os parâmetros físicos e geométricos e as variáveis de estado são dados de entrada para esta modelagem.

Este ensaio foi feito sob uma análise 2D, já que serve como base para trabalhos posteriores.

2.1. Cinemática

A Fig. 5 especifica os parâmetros geométricos relacionados à estrutura física do veículo.

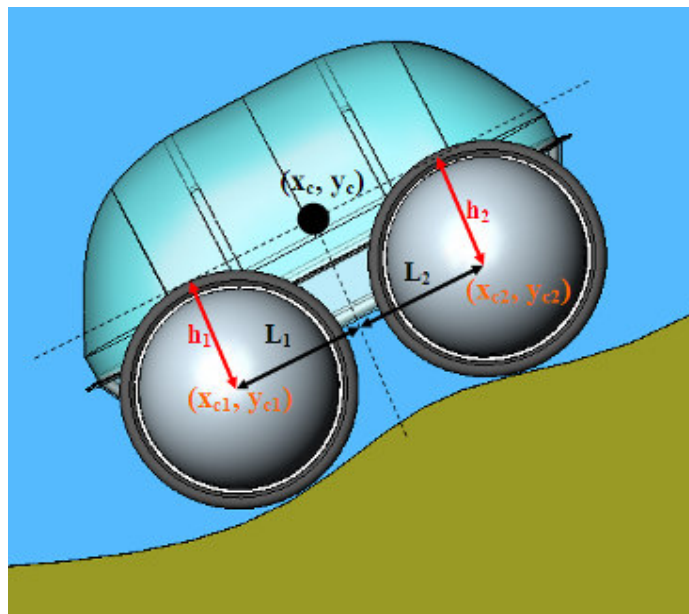


Figura 5 – Parâmetros geométricos do veículo.

onde:

x_c = coordenada x do centro de gravidade do veículo.

y_c = coordenada y do centro de gravidade do veículo.

x_{ci} = coordenada x do centro geométrico da roda i.

y_{ci} = coordenada y do centro geométrico da roda i.

h_i = distância vertical do centro geométrico da roda i ao centro de massa.

L_i = a distância longitudinal do centro geométrico da roda i ao centro de massa.

Para completar a análise cinemática faz-se necessário definir o ângulo α de inclinação do veículo em relação a horizontal (eixo x), que é mostrado na Fig. 6.

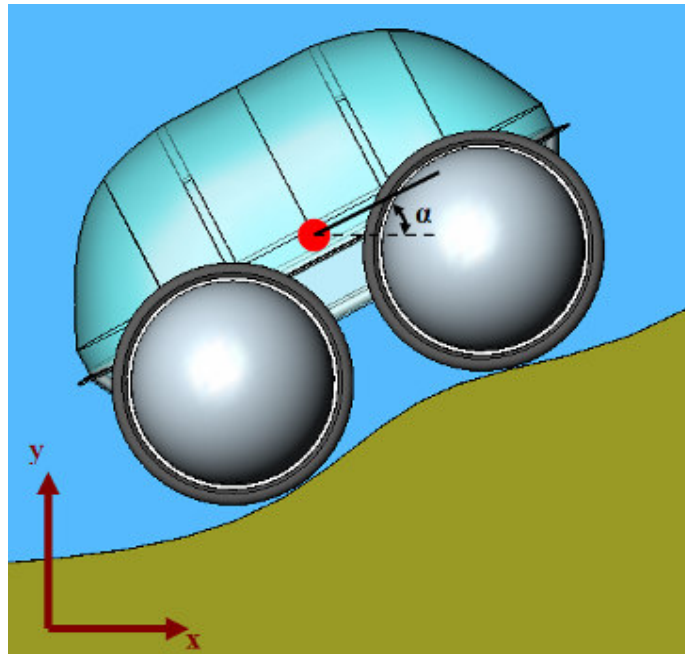


Figura 6 – Ângulo de inclinação do veículo.

A cinemática das rodas está determinada primeiramente pela sua posição em referência ao centro de gravidade do veículo.

Considerou-se nestas operações que a localização do centro de gravidade é previamente conhecida.

Assim, considerando os parâmetros da Fig. 5 e Fig. 6, obtém-se para as rodas do veículo o seguinte sistema de equações:

Roda 1:

$$x_{c_1} = x_c - L_1 \cdot \cos \alpha + h_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (1)$$

$$y_{c_1} = y_c - L_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha - h_1 \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Roda 2:

$$x_{c_2} = x_c + L_2 \cdot \cos \alpha + h_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (3)$$

$$y_{c_2} = y_c + L_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha - h_2 \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

As equações acima podem ser representadas matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} x_{c_1} \\ y_{c_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L_1 \\ -h_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} x_{c_2} \\ y_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ -h_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

As velocidades dos centros geométrico das rodas são encontradas derivando, em relação ao tempo, as equações (1), (2), (3) e (4).

Assim, obtém-se:

Roda 1:

$$\dot{x}_{c_1} = \dot{x}_c + (L_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha + h_1 \cdot \cos \alpha) \cdot \dot{\alpha} \quad (7)$$

$$\dot{y}_{c_1} = \dot{y}_c - (L_1 \cdot \cos \alpha - h_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha) \cdot \dot{\alpha} \quad (8)$$

Roda 2:

$$\dot{x}_{c_2} = \dot{x}_c - (L_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha - h_2 \cdot \cos \alpha) \cdot \dot{\alpha} \quad (9)$$

$$\dot{y}_{c_2} = \dot{y}_c + (L_2 \cdot \cos \alpha + h_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha) \cdot \dot{\alpha} \quad (10)$$

As acelerações dos centros geométrico das rodas são encontradas derivando, em relação ao tempo, as equações (7), (8), (9) e (10).

Assim, obtém-se:

Roda 1:

$$\ddot{x}_{c_1} = \ddot{x}_c + (L_1 \cdot \text{sen} \alpha + h_1 \cdot \text{cos} \alpha) \cdot \ddot{\alpha} + (L_1 \cdot \text{cos} \alpha - h_1 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 \quad (11)$$

$$\ddot{y}_{c_1} = \ddot{y}_c - (L_1 \cdot \text{cos} \alpha - h_1 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \ddot{\alpha} + (L_1 \cdot \text{sen} \alpha + h_1 \cdot \text{cos} \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 \quad (12)$$

Roda 2:

$$\ddot{x}_{c_2} = \ddot{x}_c - (L_2 \cdot \text{sen} \alpha - h_2 \cdot \text{cos} \alpha) \cdot \ddot{\alpha} - (L_2 \cdot \text{cos} \alpha + h_2 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 \quad (13)$$

$$\ddot{y}_{c_2} = \ddot{y}_c + (L_2 \cdot \text{cos} \alpha + h_2 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \ddot{\alpha} - (L_2 \cdot \text{sen} \alpha - h_2 \cdot \text{cos} \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 \quad (14)$$

2.2. Dinâmica

Para a análise dinâmica, foi utilizada a abordagem de Newton – Euler, por resultar em uma obtenção direta das equações que regem o movimento, visto que o sistema considerado é formado por um único corpo rígido.

As equações de Newton – Euler, para o caso 2D, são representadas da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}_c$$

$$M = I \cdot \ddot{\alpha}$$

Onde:

$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ - somatório das forças atuando sobre o corpo.

m - massa do corpo.

$\mathbf{a}_c = [\ddot{x}_c; \ddot{y}_c]$ - vetor aceleração do centro de gravidade do veículo.

$M = \sum M_i$ somatório dos momentos em relação ao centro de gravidade.

$I \rightarrow$ momento de inércia de rotação do veículo em relação ao centro de gravidade.

$\ddot{\alpha}$ = aceleração angular do corpo.

Tendo como hipótese que o contato entre cada roda e o terreno se dá em um único ponto, as forças relevantes atuando no sistema serão: as forças de atrito (Fat), as forças normais (N) nas rodas, e o peso (P) do veículo. A Fig. 7 mostra a atuação de cada uma destas forças.

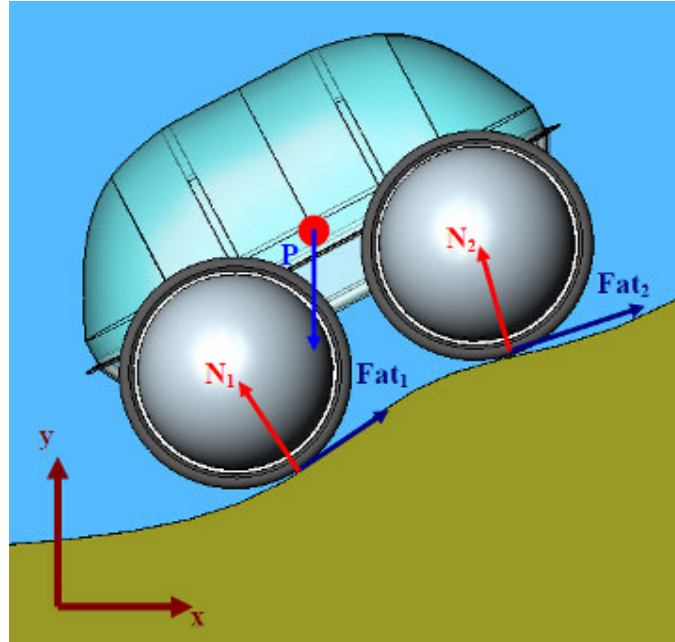


Figura 7 – Forças atuando no sistema.

Sendo:

Fat_i = Força de atrito estático atuando na roda i do veículo.

N_i = Força Normal atuando na roda i do veículo.

P = Peso do veículo.

A direção das forças de atrito está determinada pelos ângulos de contato γ_1 e γ_2 , como apresentado na Fig. 8.

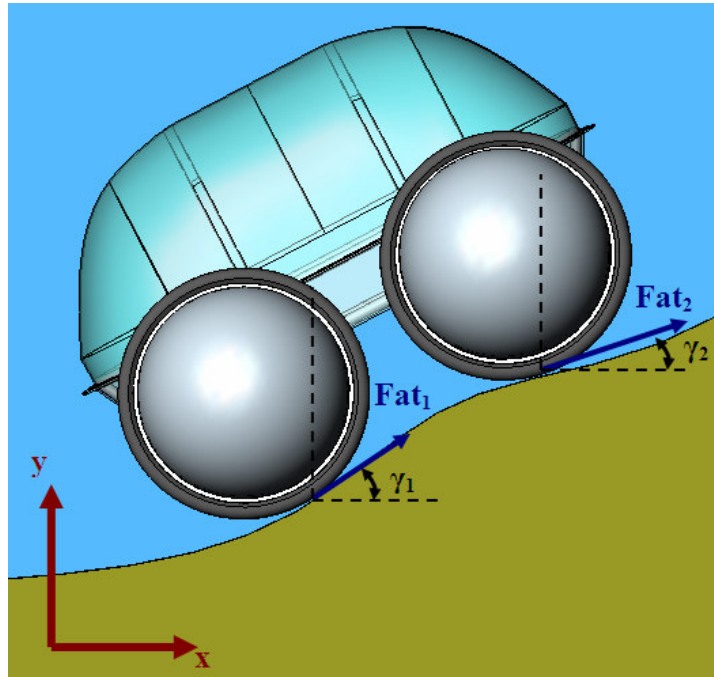


Figura 8 – Ângulos de contato das rodas com o perfil do terreno.

Desta forma, utilizando a abordagem de Newton – Euler neste sistema, obtêm-se as seguintes equações:

$$\sum F_x = m \cdot \ddot{x}_c$$

$$m \cdot \ddot{x}_c = Fat_1 \cdot \cos \gamma_1 + Fat_2 \cdot \cos \gamma_2 - N_1 \cdot \text{sen} \gamma_1 - N_2 \cdot \text{sen} \gamma_2 \quad (15)$$

$$\sum F_y = m \cdot \ddot{y}_c$$

$$m \cdot \ddot{y}_c = Fat_1 \cdot \text{sen} \gamma_1 + Fat_2 \cdot \text{sen} \gamma_2 + N_1 \cdot \cos \gamma_1 + N_2 \cdot \cos \gamma_2 - P \quad (16)$$

$$\sum M_{CG} = I \cdot \ddot{\alpha}$$

$$I \cdot \ddot{\alpha} = Fat_1 \cdot \cos \gamma_1 (y_c - y_1) - Fat_1 \cdot \text{sen} \gamma_1 (x_c - x_1) + Fat_2 \cdot \cos \gamma_2 (y_c - y_2) - Fat_2 \cdot \text{sen} \gamma_2 (x_c - x_2) - N_1 \cdot \text{sen} \gamma_1 (y_c - y_1) - N_1 \cdot \cos \gamma_1 (x_c - x_1) - N_2 \cdot \text{sen} \gamma_2 (y_c - y_2) - N_2 \cdot \cos \gamma_2 (x_c - x_2)$$

$$I \cdot \ddot{\alpha} = [(y_c - y_1) \cdot \cos \gamma_1 - (x_c - x_1) \cdot \text{sen} \gamma_1] \cdot Fat_1 + [(y_c - y_2) \cdot \cos \gamma_2 - (x_c - x_2) \cdot \text{sen} \gamma_2] \cdot Fat_2 - [(y_c - y_1) \cdot \text{sen} \gamma_1 - (x_c - x_1) \cdot \cos \gamma_1] \cdot N_1 + [(y_c - y_2) \cdot \text{sen} \gamma_2 - (x_c - x_2) \cdot \cos \gamma_2] \cdot N_2 \quad (17)$$

Assumindo-se que as forças de atrito são conhecidas, as três equações acima, (15), (16) e (17), apresentam cinco incógnitas ($\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, N_1, N_2, \ddot{\alpha}$), resultando desta forma em um sistema com infinitas soluções.

Para que o problema apresente uma única solução é necessário que haja mais duas equações independentes, as quais são obtidas através da imposição das restrições descritas abaixo.

2.2.1. Equação das restrições

As restrições impostas a este sistema são que as rodas do veículo sempre devem estar em contato com o terreno. Para satisfazer esta condição, o centro geométrico das rodas, a cada instante, deve pertencer a uma determinada curva que é gerada a partir do perfil do terreno.

A esta curva é dado o nome de curva de centro, e a mesma é obtida da seguinte forma:

- É calculada a normal à curva do perfil do terreno em cada um de seus pontos (x, y) , onde $y = f(x)$.
- Tomando-se sobre esta normal um vetor com magnitude r (raio da roda) e origem em (x, y) , fica definido o ponto (x_{cc}, y_{cc}) como ilustrado na Fig. 9. O conjunto formado pelos pontos (x_{cc}, y_{cc}) gera a curva de centro.

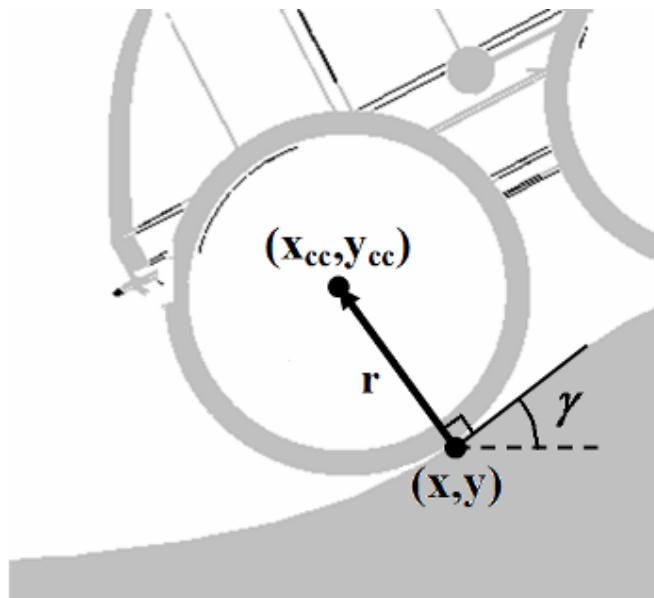


Figura 9 – Vetor normal ao terreno em direção ao centro da roda.

Excetuando os pontos não diferenciáveis e as regiões que têm um raio de curvatura menor que o raio r da roda, pertencentes à curva do perfil do terreno, que serão tratados no capítulo quatro, a curva de centro gerada a partir dos demais pontos da curva do perfil do terreno será da forma $(x_{CC}, g(x_{CC}))$.

Assim, para garantir que o veículo esteja sempre em contato com o terreno, basta que a todo instante as coordenadas dos centros geométricos das rodas pertençam à curva de centro, isto é verdade quando:

$$y_{c_1} = g(x_{c_1}) \quad (18)$$

$$y_{c_2} = g(x_{c_2}) \quad (19)$$

Derivando em relação ao tempo as Equações (18) e (19), obtém-se:

$$\left. \frac{dy_{c_i}}{dt} = \frac{dg(x_{c_i})}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right|_{x_{c_i}} \quad (20)$$

$$\dot{y}_{c_1} = g'(x_{c_1}) \cdot \dot{x}_{c_1} \quad (21)$$

$$\dot{y}_{c_2} = g'(x_{c_2}) \cdot \dot{x}_{c_2} \quad (22)$$

Derivando em relação ao tempo a Equação (20), obtém-se:

$$\left. \frac{d^2 y_{c_i}}{dt^2} = \frac{dg(x_{c_i})}{dx} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{x_{c_i}} + \frac{d^2 g(x_{c_i})}{dx^2} \cdot \left(\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x_{c_i}} \right)^2 \quad (23)$$

$$\ddot{y}_{c_1} = g'_1 \cdot \ddot{x}_{c_1} + g''_1 \cdot \dot{x}_{c_1}^2 \quad (24)$$

$$\ddot{y}_{c_2} = g'_2 \cdot \ddot{x}_{c_2} + g''_2 \cdot \dot{x}_{c_2}^2 \quad (25)$$

$$\text{onde: } g'_i = \frac{dg_i}{dx_{c_i}} \cdot (x_{c_i})$$

$$g'_1 = g'(x_{c_1})$$

$$g'_2 = g'(x_{c_2})$$

$$g''_1 = g''(x_{c_1})$$

$$g''_2 = g''(x_{c_2})$$

Substituindo a equação (11) e (12) em (24), encontram-se:

$$\ddot{y}_c - (L_1 \cdot \cos \alpha - h_1 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \ddot{\alpha} + (L_1 \cdot \text{sen} \alpha + h_1 \cdot \cos \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 = g_1' \cdot (\ddot{x}_c + (L_1 \cdot \text{sen} \alpha + h_1 \cdot \cos \alpha) \cdot \ddot{\alpha} + (L_1 \cdot \cos \alpha - h_1 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2) + g_1'' \cdot \dot{x}_{c_1}^2$$

Rearranjando os termos da equação acima, resulta em:

$$g_1' \cdot \ddot{x}_c - \ddot{y}_c + [(\cos \alpha + g_1' \cdot \text{sen} \alpha) \cdot L_1 - (\text{sen} \alpha - g_1' \cdot \cos \alpha) \cdot h_1] \cdot \ddot{\alpha} = g_1'' \cdot \dot{x}_{c_1}^2 + [(\cos \alpha + g_1' \cdot \text{sen} \alpha) \cdot h_1 + (\text{sen} \alpha - g_1' \cdot \cos \alpha) \cdot L_1] \cdot \dot{\alpha}^2 \quad (26)$$

Substituindo a equação (13) e (14) em (25), encontram-se:

$$\ddot{y}_c + (L_2 \cdot \cos \alpha + h_2 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \ddot{\alpha} - (L_2 \cdot \text{sen} \alpha - h_2 \cdot \cos \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 = g_2' \cdot (\ddot{x}_c - (L_2 \cdot \text{sen} \alpha - h_2 \cdot \cos \alpha) \cdot \ddot{\alpha} - (L_2 \cdot \cos \alpha + h_2 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot \dot{\alpha}^2) + g_2'' \cdot \dot{x}_{c_2}^2$$

Rearranjando os termos da equação acima, resulta em:

$$g_2' \cdot \ddot{x}_c - \ddot{y}_c - [(\cos \alpha + g_2' \cdot \text{sen} \alpha) \cdot L_2 + (\text{sen} \alpha - g_2' \cdot \cos \alpha) \cdot h_2] \cdot \ddot{\alpha} = -g_2'' \cdot \dot{x}_{c_2}^2 - [(\text{sen} \alpha - g_2' \cdot \cos \alpha) \cdot L_2 - (\cos \alpha + g_2' \cdot \text{sen} \alpha) \cdot h_2] \cdot \dot{\alpha}^2 \quad (27)$$

Definindo-se:

$$R_1 \equiv (\cos \alpha + g_1' \cdot \text{sen} \alpha) \cdot L_1 - (\text{sen} \alpha - g_1' \cdot \cos \alpha) \cdot h_1 \quad (28)$$

$$R_2 \equiv (\cos \alpha + g_2' \cdot \text{sen} \alpha) \cdot L_2 + (\text{sen} \alpha - g_2' \cdot \cos \alpha) \cdot h_2 \quad (29)$$

$$S_1 \equiv [(\cos \alpha + g_1' \cdot \text{sen} \alpha) \cdot h_1 + (\text{sen} \alpha - g_1' \cdot \cos \alpha) \cdot L_1] \cdot \dot{\alpha}^2 - g_1'' \cdot \dot{x}_{c_1}^2 \quad (30)$$

$$S_2 \equiv -[(\text{sen} \alpha - g_2' \cdot \cos \alpha) \cdot L_2 - (\cos \alpha + g_2' \cdot \text{sen} \alpha) \cdot h_2] \cdot \dot{\alpha}^2 - g_2'' \cdot \dot{x}_{c_2}^2 \quad (31)$$

As Equações (26) e (27) resultam após as substituições feitas acima, nas seguintes equações de restrição do sistema:

$$g_1' \cdot \ddot{x}_c - \ddot{y}_c + R_1 \cdot \ddot{\alpha} = S_1 \quad (32)$$

$$g'_2 \cdot \ddot{x}_c - \ddot{y}_c + R_2 \cdot \ddot{\alpha} = S_2 \quad (33)$$

As Equações (32) e (33) são linearmente independentes (L.I.) se a matriz W , dos coeficientes das acelerações, tiver posto igual a dois.

$$W = \begin{bmatrix} g'_1 & -1 & R_1 \\ g'_2 & -1 & R_2 \end{bmatrix}$$

Quando $g'_1 \neq g'_2$, o posto de W é igual a dois. Logo, as Equações (32) e (33) são L.I.

Quando $g'_1 = g'_2$ ($\gamma_1 = \gamma_2$), ocorrem duas possibilidades:

- Se $\alpha \neq \gamma_1 = \gamma_2$, $R_1 \neq R_2$ e a matriz W tem posto igual a dois.
- Se $\alpha = \gamma_1 = \gamma_2$, R_1 será igual a R_2 e W terá posto igual a um, resultando que as Equações (32) e (33) sejam linearmente dependentes (L.D.).

Neste caso faz-se necessário gerar uma nova equação de restrição que seja L.I. com a Equação (32).

Para gerar esta nova equação, considera-se um caso onde $\alpha = \gamma_1 = \gamma_2$, como o mostrado na Fig. 10.

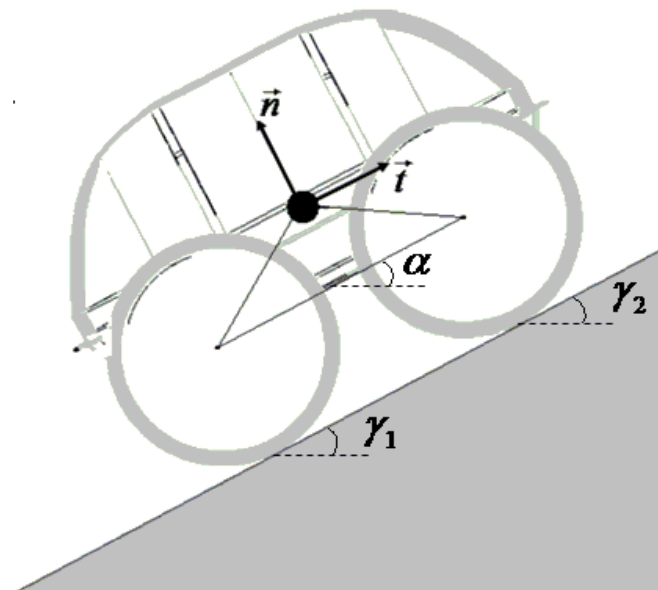


Figura 10 – Ângulos de contato γ_1 e γ_2 igual ao ângulo de inclinação do veículo α .

Assim, para que o veículo mantenha sempre as rodas em contato com o solo, as componentes das velocidades dos centros das rodas ao longo do eixo n devem ser nulas.

$$\overset{n}{V}_{c_1} = \overset{n}{V}_{c_2} = 0$$

Sendo que as velocidades $\overset{n}{V}_{c_1}$ e $\overset{n}{V}_{c_2}$ estão relacionadas da seguinte forma:

$$\overset{n}{V}_{c_2} = \overset{n}{V}_{c_1} + (L_1 + L_2) \cdot \dot{\alpha}$$

A velocidade angular ($\dot{\alpha}$) é dada por:

$$\dot{\alpha} = \frac{\overset{n}{V}_{c_2} - \overset{n}{V}_{c_1}}{(L_1 + L_2)} = 0$$

Assim a aceleração angular será:

$$\ddot{\alpha} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt} = 0 \quad (34)$$

2.3. Sistema de Equações Resultante

O sistema de equações resultante é formado pelas equações provenientes das equações de Newton – Euler (15), (16) e (17) e pelas equações provenientes das equações de restrição do sistema (32), (33) e (34). Podendo ser colocado em forma matricial, mostrado a seguir.

$$G \cdot \mathbf{u} = U \quad (35)$$

onde:

$$G = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \text{sen}\gamma_1 & \text{sen}\gamma_2 \\ 0 & m & 0 & -\text{cos}\gamma_1 & -\text{cos}\gamma_2 \\ 0 & 0 & I & d_1 & d_2 \\ g'_1 & -1 & R_1 & 0 & 0 \\ & & c & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [\ddot{x}_c \quad \ddot{y}_c \quad \ddot{\alpha} \quad N_1 \quad N_2]^T$$

$$U = [F_x \quad F_y \quad T_{in} \quad S_1 \quad S]$$

$$\mathbf{c} = \begin{cases} [g'_2 & -1 & R_2 & 0 & 0], & \text{se } \alpha \neq \gamma_1 \text{ ou } \alpha \neq \gamma_2 \\ [0 & 0 & 1 & 0 & 0], & \text{se } \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} S_2, & \text{se } \alpha \neq \gamma_1 \text{ ou } \alpha \neq \gamma_2 \\ 0, & \text{se } \alpha = \gamma_1 = \gamma_2 \end{cases}$$

$$F_x = Fat_1 \cdot \cos \gamma_1 + Fat_2 \cdot \cos \gamma_2$$

$$F_y = Fat_1 \cdot \sin \gamma_1 + Fat_2 \cdot \sin \gamma_2 - P$$

$$T_{in} = [(y_c - y_1) \cdot \cos \gamma_1 - (x_c - x_1) \cdot \sin \gamma_1] \cdot Fat_1 + [(y_c - y_2) \cdot \cos \gamma_2 - (x_c - x_2) \cdot \sin \gamma_2] \cdot Fat_2$$

$$d_1 = (y_c - y_1) \cdot \sin \gamma_1 + (x_c - x_1) \cdot \cos \gamma_1$$

$$d_2 = (y_c - y_2) \cdot \sin \gamma_2 + (x_c - x_2) \cdot \cos \gamma_2$$

Da equação matricial (35), podem-se calcular as acelerações do veículo e as forças normais das rodas, através da equação:

$$\mathbf{u} = G^{-1}U \quad (36)$$

A partir da obtenção do vetor \mathbf{u} através da equação (36), determinam-se os valores das normais (N_1 e N_2) e das acelerações do centro de gravidade (\ddot{x}_c , \ddot{y}_c e $\ddot{\alpha}$).

Estes valores dependem das forças de atrito (Fat_1 e Fat_2), dos ângulos de contato da roda com o solo (γ_1 e γ_2) e das variáveis de estado do veículo (x_c , y_c , α , \dot{x}_c , \dot{y}_c e $\dot{\alpha}$).

Tendo obtido a modelagem cinemática e dinâmica do veículo, pode-se proceder com a proposta de técnicas de controle, descritas a seguir.