

3

Dinâmica dos fluidos computacional

Existem vários métodos numéricos que foram desenvolvidos para resolver equações diferenciais parciais que modelam matematicamente um sistema dinâmico. Esses métodos se diferem de acordo com a discretização das derivadas espaciais das equações diferenciais, e são tradicionalmente classificados em *métodos eulerianos*, *métodos lagrangeanos* e *métodos híbridos*. Nesse capítulo, apresentaremos uma visão geral de cada uma dessas classes de métodos numéricos, discutindo as diferenças e as vantagens de cada classe.

3.1

Métodos eulerianos

Métodos eulerianos fornecem tipicamente uma representação numérica das equações de Navier–Stokes para fluidos incompressíveis (2-2) – (2-4). A representação do fluido é feita no interior das células de um reticulado retangular fixo no espaço conhecido como *grid* (Figura 3.1(a)).

O grid, além de ser o domínio computacional da simulação, auxilia na estimativa das derivadas espaciais dessas equações usando o método de diferenças finitas [3]. Tipicamente a distribuição de massa do fluido é calculada através das células enquanto o fluxo de velocidade é calculado nos vértices do grid. A forma e o volume das células assim como a posição dos vértices não se alteram durante todo processo computacional.

O campo de velocidade \mathbf{v} é atualizado em cada instante de tempo resolvendo separadamente cada termo da equação (2-2) por etapas. Uma das etapas mais importantes consiste na projeção da pressão [62]. Os métodos de projeção são baseados no teorema¹ abaixo:

Teorema 3.1.1 (Decomposição de Helmholtz–Hodge) *Um campo vetorial \mathbf{w} num domínio D pode ser decomposto unicamente na forma*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla p, \quad (3-1)$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, \mathbf{n} é um vetor normal a ∂D .

¹A demonstração do teorema pode ser encontrada em [11].

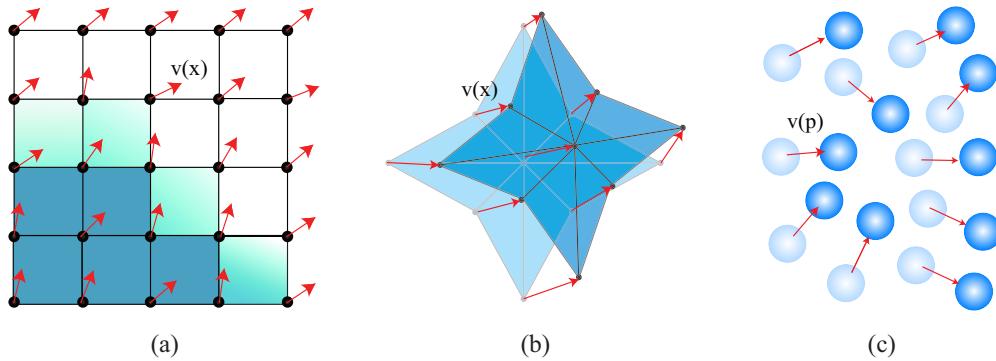


Figura 3.1: (a) Discretização euleriana com campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ nos vértices \mathbf{x} do grid. A região em azul representa o fluido. Representação lagrangeana: (b) discretização utilizando uma malha com campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ nos vértices \mathbf{x} da malha. (c) discretização através de um sistema de partículas com campo de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ nas partículas \mathbf{p} do sistema.

A decomposição de Helmholtz–Hodge nos permite calcular implicitamente a pressão p^{n+1} num passo $n + 1$ através da seguinte equação de Poisson:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^*. \quad (3-2)$$

com

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + \Delta t \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}^n + \mathbf{g} \right). \quad (3-3)$$

A pressão é a solução do sistema linear obtido da discretização dos operadores diferenciais da equação (3-2) pelo método de diferenças finitas. Finalmente, a velocidade com divergência livre \mathbf{v}^{n+1} é obtida da seguinte maneira

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1}. \quad (3-4)$$

Os métodos eulerianos são rápidos, estáveis, tratam de extremas deformações e mudanças topológicas do fluido sem alterar a sua discretização. As maiores desvantagens são: a dificuldade de representar domínios com geometria complexa numa grade regular, problema de conservação de massa devido à difusão numérica, dificuldade de capturar a superfície livre de fluidos que possuem uma interface bem definida e alto armazenamento de memória, pois o domínio computacional abrange até mesmo regiões onde não há fluido.

Simulação de fluidos utilizando métodos eulerianos tornou-se bastante popular em Computação Gráfica com o trabalho de Foster & Metaxas [22]. Stam em [65], propôs um método estável na solução do termo advectivo (2-9) através de uma técnica semi-lagrangeana. Para introduzir novamente as pequenas escalas de vorticidade dissipadas numericamente em simulações de fumaça, Fedkiw *et al.* [20] adicionaram uma força artificial de *confinamento de vórtice*.

3.2

Métodos lagrangeanos

A discretização numérica da formulação lagrangeana das equações de Navier–Stokes (2-7) – (2-8), se dividem em duas categorias: *métodos com malha* e *métodos sem malha*.

Métodos com malha. Nessa categoria, o domínio computacional é constituído por um conjunto de células irregulares (ou elementos) conectadas através de um mapa topológico formando uma malha não-estruturada. Diferentemente dos métodos eulerianos, a malha não-estruturada se movimenta dinamicamente com o fluido (Figura 3.1(b)). Conseqüentemente, se o fluido sofrer alguma mudança topológica a malha também sofrerá tal mudança. Um dos métodos lagrangeanos com malha mais conhecido e amplamente utilizado é o *método de elementos finitos* [72].

As principais vantagens dos métodos lagrangeanos com malha são: não requer nenhum esforço computacional extra para calcular o termo advectivo já que a malha não está fixa no espaço, modela facilmente domínios com geometrias complexas e irregulares graças à adaptatividade de sua malha não-estruturada, a malha envolve apenas o domínio computacional onde existe fluido.

Porém, devido ao fato da malha estar diretamente vinculada ao fluido, esses métodos apresentam algumas dificuldades, como a de simular um fluido que sofra uma grande deformação. Grandes deformações resultam em grandes distorções nos elementos da malha que acabam afetando numericamente a solução do sistema. Outra dificuldade é a captura da superfície livre do fluido, principalmente quando a superfície sofre mudanças topológicas. Uma técnica para resolver esse problema é conhecida como *remalhamento* [68].

Existem várias aplicações do método de elementos finitos em Computação Gráfica. O'Brien *et al.* [54] simularam fratura de objetos sólidos. Etzmuss *et al.* [19] utilizaram elementos finitos para modelar a dinâmica de tecidos. Klingner *et al.* [31] apresentaram um método de simulação de fluidos usando uma malha tetraedral com remalhamento dinâmico.

Métodos sem malha. Geralmente essa categoria se refere a uma classe de métodos que utilizam um conjunto finito de partículas para discretizar o estado e a dinâmica de um sistema. Nos problemas de dinâmica dos fluidos, cada partícula está diretamente associada a atributos físicos do fluido e sua evolução é determinada através de leis de conservação de massa e momento (Figura 3.1(c)).

As vantagens desses métodos em relação aos tradicionais métodos com malha são: o fluido é representado por um sistema de partículas sem conectividade fixa, assim o tratamento de grandes deformações é relativamente mais fácil. Cada partícula representa um elemento de fluido, logo a massa do sistema é trivialmente conservada. Discretiza facilmente geometrias complexas, pois só requer a discretização inicial do domínio computacional. Refinamento de um sistema de partículas é uma tarefa computacionalmente mais simples de ser executada do que refinar uma malha. Captura facilmente superfície livres e suas mudanças topológicas.

Nessa tese, utilizamos um método sem malha conhecido como Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). O método SPH foi criado na década de 70 por Monaghan & Gingold [24] e Lucy [42] para simular fenômenos envolvendo fluidos compressíveis em astrofísica, tais como colisão de estrelas, formação de galáxias e supernovas. Desbrun & Cani em [17], introduziram o SPH na comunidade de Computação Gráfica com o objetivo de simular corpos deformáveis. Müller *et al.* [51] utilizaram o SPH para simular fluidos com tensão superficial em tempo de execução interativo. Recentemente, simulações SPH se tornaram bastante populares na indústria cinematográfica de efeitos especiais, onde foi utilizado em simulações de água nos filmes *Poseidon* e *300* (<http://www.nextlimit.com>). Além de aplicações em astrofísica e Computação Gráfica, o SPH é aplicado com sucesso em simulações mais complexas de hidrodinâmica relativística e colisões de íons pesados em altas energias [1, 32]. No Capítulo 4 mostraremos com detalhes o método SPH. Variações e extensões desse método podem ser encontradas em [37, 38].

3.3 **Métodos híbridos**

Apesar de possuírem características distintas e complementares os métodos eulerianos e lagrangeanos podem ser combinados de forma simbiótica a fim de evitar as desvantagens de cada método. Através dessa idéia, foram desenvolvidos dois métodos híbridos que utilizam tanto a abordagem euleriana quanto a lagrangeana: o *Coupled Eulerian Lagrangian* (CEL) [43] e o *Arbitrary Lagrange Eulerian* (ALE) [8]. Esses métodos são usados com freqüência em simulações que envolvem a interação fluido-estrutura.

O método CEL combina os métodos euleriano e lagrangeano em regiões separadas do domínio computacional. A prática mais comum é utilizar a abordagem lagrangeana pra discretizar sólidos (estruturas) e a abordagem euleriana na discretização de fluidos. A região lagrangeana e a região euleriana interagem continuamente trocando informação computacional através de um

mapeamento especial na interface formada nessas duas regiões no grid.

O método ALE é semelhante a uma técnica de deformação de uma malha lagrangeana de elementos finitos. O ALE é obtido introduzindo uma malha computacional de referência onde os seus vértices podem se deslocar através do movimento lagrangeano natural, ou podem estar fixos no espaço como nos métodos eulerianos, ou podem alguns vértices se movimentarem arbitrariamente e independentemente enquanto outros ficam fixos. O livre movimento dos vértices no método ALE tem como finalidade minimizar a distorção dos elementos da malha.