2
Dinâmica dos fluidos clássica

Para simular o comportamento de um fluido, precisamos ter uma representação matemática do estado de um fluido num instante de tempo. A quantidade física mais importante a ser representada é a velocidade do fluido, pois a velocidade determina não só como o próprio fluido se move, mas também como a densidade do fluido varia.

O modelo matemático que descreve o comportamento de um fluido é dado por um conjunto de equações diferenciais parciais conhecido como *equações de Navier–Stokes*. Há duas abordagens para as equações de Navier–Stokes: a *forma euleriana* e a *forma lagrangeana*. Na forma euleriana o volume de controle finito do fluido está fixo no espaço, enquanto na forma lagrangeana o volume de controle finito se move junto com o escoamento (veja Figura 2.1). Tradicionalmente as equações de governo de fluidos são dadas na forma euleriana:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \tag{2-1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{g}, \tag{2-2}$$

onde t é o tempo, $\mathbf{v}$ o vetor velocidade, ρ a densidade, p a pressão, $\mathbf{g}$ o vetor de aceleração da gravidade, $\mathbf{S}$ tensor extra–tensão e ∇ o operador gradiente. Por sua vez, o tensor $\mathbf{S}$ é determinado a partir do coeficiente de viscosidade do fluido μ e pelo tensor taxa de deformação $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{S} = 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}\text{traço}(\mathbf{D})\mathbf{I} \right), \quad \text{com} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}}). \tag{2-3}$$

Denotamos $\nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ como sendo a transposta de $\nabla \mathbf{v}$ e $\mathbf{I}$ como sendo o tensor identidade. Note que, traço$(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{v}$.

As equações de Navier–Stokes são deduzidas a partir das leis físicas de conservação [1] [3]. A equação (2-2) é uma aplicação direta da segunda Lei de Newton e diz respeito à conservação de momento. A equação (2-1) obedece a lei de conservação de massa e é conhecida como *equação da continuidade*, a qual é deduzida a partir do teorema de Gauss. Se o fluido possuir densidade constante, isto é $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, podemos simplificar a equação (2-1) como sendo

[1] Nessa tese não iremos abordar a lei de conservação de energia, apenas massa e momento.

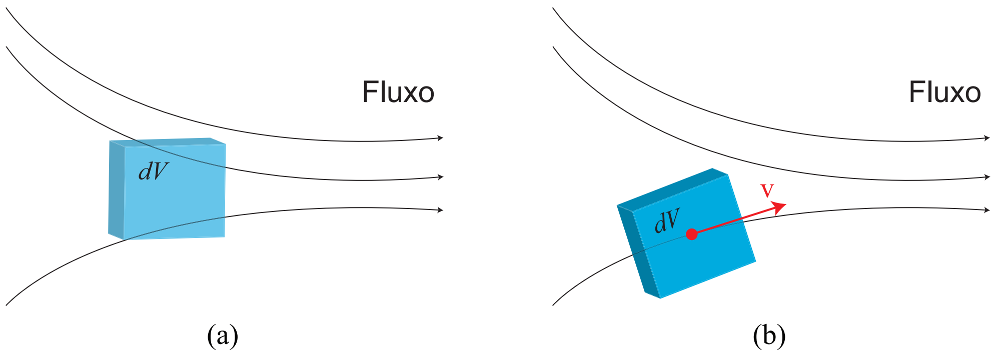

Figura 2.1: Modelos de um volume de controle finito de fluido dV: (a) Volume de controle fixo no espaço com o escoamento do fluido passando através ele. (b) Volume de controle movendo ao longo do escoamento com velocidade $\mathbf{v}$ igual à velocidade local do fluxo naquele ponto.

apenas a restrição

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2-4}$$

O fluido que escoa com o campo velocidade cuja divergência é livre é chamado de *fluido incompressível*.

O termo viscoso $\nabla \cdot \mathbf{S}$ pode conter várias variáveis a serem calculadas; assim a equação (2-2) na forma geral não pode ser aplicada em qualquer problema. Por essa razão, devemos especificar o tensor $\mathbf{S}$ de acordo com o comportamento do fluido baseando-se em observações naturais e aplicá-las com o intuito de representá-lo em termos de variáveis conhecidas, tais como a velocidade. Por exemplo, se o fluido for incompressível e possuir viscosidade constante, o termo $\nabla \cdot \mathbf{S}$ pode ser reescrito na forma $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$, onde μ é a viscosidade do fluido. Assim podemos reescrever a equação (2-2) na forma usual:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}. \tag{2-5}$$

A discretização numérica das equações de Navier–Stokes na sua forma euleriana é feita através de métodos numéricos que usam uma grade fixa no espaço para estimar as derivadas espaciais. Detalharemos mais sobre esses métodos na Seção 3.1. O leitor interessado poderá encontrar com detalhes as deduções acima no livro de Anderson [3].

2.1 Formulação lagrangeana

A formulação lagrangeana das equações de Navier–Stokes descreve comportamento de um fluido no ponto de vista de uma partícula que se move junto com o fluxo do fluido. Definimos a *derivada material* como

$$\frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial(\,)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\,). \tag{2-6}$$

Fisicamente a derivada material representa a variação instantânea de uma grandeza física em relação ao tempo de um elemento de fluido que se move no espaço. Substituindo no lado esquerdo das equações (2-1) – (2-2) pela derivada material, as equações de governo na forma lagrangeana são dadas como:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{2-7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{S} + \mathbf{g}. \tag{2-8}$$

Note que cada partícula possui uma advecção própria, logo a equação (2-8) não requer o cálculo explícito do termo advectivo

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}. \tag{2-9}$$

Assim podemos também reescrever a equação (2-5) na sua forma lagrangeana

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g}. \tag{2-10}$$

Portanto, se discretizarmos um fluido como um sistema de partículas, a equação de momento na forma euleriana (2-2), que antes era descrita por uma equação diferencial parcial, se torna na forma lagrangeana um conjunto de equações diferenciais ordinárias as quais podem ser resolvidas via integração numérica em relação à variável temporal.

Nessa tese, o modelo físico que vamos adotar é dado pelas equações de Navier–Stokes em sua forma lagrangena. No Capítulo 4 veremos com detalhes a discretização numérica dessas equações através de sistema de partículas.

2.2 Fluidos não–newtonianos

Um *fluido newtoniano*, água por exemplo, é um fluido no qual seu tensor extra–tensão $\mathbf{S}$ possui uma dependência linear do tensor taxa de deformação $\mathbf{D}$. Caso contrário, o fluido é chamado de *fluido não–newtoniano*.

Entre os fluidos não–newtonianos, o comportamento dos fluidos viscoplásticos é caracterizado quando uma tensão significante é aplicada no material antes que ele comece a fluir como um líquido (efeito pasta de dente), essa tensão crítica é conhecida como *tensão limite do escoamento* (*yield stress*). Se a tensão aplicada é menor do que a tensão correspondente a plasticidade limite então o material se comporta como um sólido. Uma vez que a plasticidade limite é excedida, o material pode fluir como um fluido newtoniano.

Fluidos não–newtonianos são estudados extensivamente em dinâmica dos fluidos computacional, e o estudo deles é conhecido como *Reologia* [57].