

## 2 Formulação Matemática

Este capítulo descreve a formulação matemática utilizada neste trabalho. O modelo sugerido engloba o acoplamento numérico, através do método dos elementos finitos, das equações de fluxo superficial e da equação que rege o fluxo em meio poroso saturado e não saturado. As equações governantes que regem o fluxo superficial são descritas primeiramente, seguida da dedução da equação que dita o fluxo em meios porosos.

### 2.1. Fluxo Superficial

As equações usualmente utilizadas que descrevem o fenômeno de escoamento em canais abertos são comumente conhecidas como equações de Saint-Venant. Deduzidas pela primeira vez por Barre de Saint-Venant em 1871, elas descrevem o fluxo não permanente e não uniforme em canal aberto unidirecional. Estas equações são referências base deste trabalho, sendo estendida para escoamento superficial com superfície livre em duas dimensões. Na suas formas diferenciais, possibilitam o conhecimento ponto a ponto do campo de escoamento formulando um modelo hidrográfico distribuído.

O modelo para escoamento superficial é constituído pela equação da continuidade integrada na profundidade e pelas equações da quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$ . Estas equações serão deduzidas a seguir.

#### 2.1.1. Equação da continuidade

Para a dedução da equação da continuidade, adota-se um volume de controle infinitesimal com lados de comprimento  $dx$ ,  $dy$ ,  $h$ , conforme mostrado na Figura 2.1, sendo  $h$  a altura da lâmina da água.

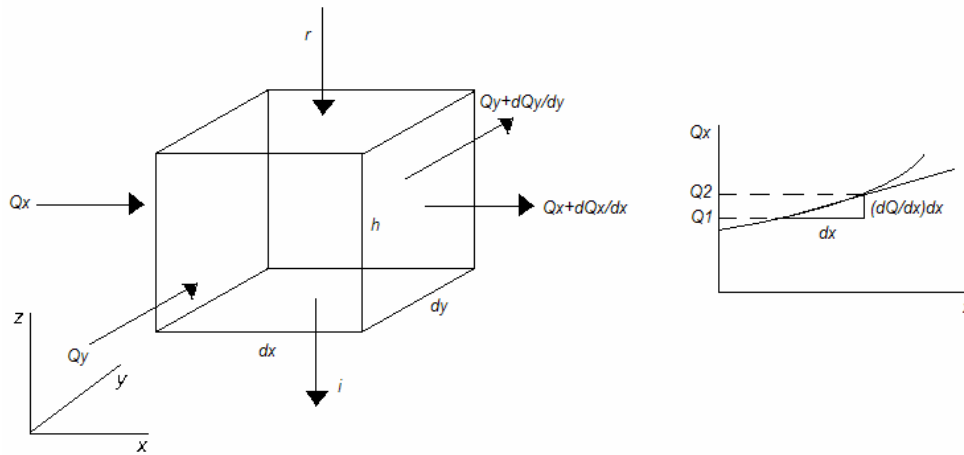


Figura 2.1 - Volume de controle para balanço de massa.

Avaliando o fluxo de massa em cada uma das seis faces da superfície de controle, deve-se contabilizar a equação da continuidade através do teorema de transporte de Reynolds, dado por:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} \rho dV + \iint_{s.c.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $\vec{V}$  é a velocidade, ambos no centro do volume de controle.

A parcela correspondente ao fluxo de entrada no sistema é definida como:

$$\iint_{entrada} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = -\rho(Q_x dy + Q_y dx + r dx dy) \quad (2.2)$$

e a parcela correspondente ao fluxo de saída é expressa por:

$$\iint_{saída} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho \left( Q_x dy + Q_y dx + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + i dx dy \right) \quad (2.3)$$

onde  $Q_j$  [ $L^3/T/L$ ] é a vazão de entrada por unidade de largura,  $r$  [ $L/T$ ] a velocidade de chuva,  $i$  [ $L/T$ ] a velocidade infiltração e  $\frac{\partial Q_j}{\partial j}$  a variação do fluxo ao longo do volume de controle, sendo  $j = x, y$ . O sinal negativo da equação (2.2)

deve-se ao fluxo de entrada ser considerado negativo no teorema de transporte de Reynolds, ou oposto ao vetor normal da superfície do sistema.

A massa dentro do volume de controle, em qualquer instante, é o produto da massa específica do fluido,  $\rho$ , pelo volume,  $dx dy h$  (FOX *et al.*, 1995) e a variação da massa dentro do volume de controle é dada por:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} \rho dV = \frac{\partial(\rho dx dy h)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Substituindo as equações (2.2), (2.3) e (2.4) em (2.1) e considerando fluido incompressível, obtém-se:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = (r - i) \quad (2.5)$$

Esta equação fornece a altura da lâmina de água para escoamento com superfície livre e fluidos Newtonianos, permitindo que, a variação da altura da água em uma coluna esteja de acordo com o padrão de fluxo nas direções  $x$  e  $y$ , além das imposições dos contornos que possibilitam fluxo de entrada e saída do domínio.

### 2.1.2. Equação da quantidade de movimento

A análise do movimento de fluxo resulta na avaliação de forças em uma partícula infinitesimal ou de um volume de controle. As forças atuantes são classificadas como internas ou externas. As forças internas ou forças de corpo por unidade de massa atuam no centro de massa do elemento, denotadas por  $F_{bx}$ ,  $F_{by}$  e  $F_{bz}$  em um sistema cartesiano. As forças externas por unidade de área, podem ser tangencias ou normais à superfície, considerando as tensões normais como positivas para compressão (FOX *et al.*, 1996).

Para deduzir a equação de quantidade de movimento linear, aplica-se a segunda lei de Newton a um volume de controle infinitesimal definido na Figura 2.1. Para esta dedução denotará a altura do elemento  $h$  por  $dz$ .

A segunda lei de Newton para um sistema é dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Bigg)_{\text{sistema}}$$

onde a quantidade de movimento,  $\vec{P}$ , do sistema, é definida como:

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{\text{massa(sistema)}} \vec{V} dm$$

Para um sistema com massa  $dm$  em um campo de velocidade  $\vec{V}$ , a segunda lei de Newton pode ser escrita:

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt} \Bigg)_{\text{sistema}}$$

Conhecendo a aceleração de um elemento fluido de massa  $dm$ , pode-se escrever a segunda lei de Newton como uma expressão vetorial.

$$d\vec{F} = dm \frac{D\vec{V}}{Dt} = dm \left[ u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] = dm \left( (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \quad (2.6)$$

sendo  $D\vec{V}/Dt$  a aceleração total da partícula,  $\vec{V}(x,y,z,t)$  o campo de velocidade e  $u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes da velocidade nas direções ortogonais  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

Apresentada a segunda lei de Newton na forma vetorial, deve-se definir uma formulação adequada para a força  $d\vec{F}$ , ou suas componentes,  $d\vec{F}_x, d\vec{F}_y, d\vec{F}_z$ , atuando sobre o elemento.

Partindo de um elemento de massa  $dm$  e volume  $dV = dx dy dz$  (Figura 2.1), apenas as componentes de tensão superficial atuando na direção  $x$  darão origem às forças nessa direção. Se as tensões no centro do elemento diferencial forem tomadas como  $\sigma_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ , obtém-se as tensões atuantes nas faces do elemento através de um desenvolvimento em série de Taylor em relação ao seu centro (FOX *et al.*, 1996).

Assim, para a componente  $x$ , as forças de superfície podem ser definidas como:

$$\begin{aligned}
dF_{xx} &= \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dx dz - \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dx dz \\
&+ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\
&+ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy
\end{aligned}$$

Simplificando, obtém-se:

$$dF_{xx} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.7)$$

Como a única força de campo atuante no volume de controle é a força da gravidade, sua componente na direção  $x$  é definida pelo produto entre o peso específico do fluido pelo seu volume e o seno do ângulo de inclinação do fundo. Para pequenas inclinações o seno é aproximadamente igual à tangente, ou o declive ( $S_{ox}$ ) do terreno (Chow *et al.*, 1988), desta forma:

$$dF_{bx} = \rho g (dx dy dz) \text{sen} \theta_x = \rho g (dx dy dz) S_{ox} \quad (2.8)$$

A força líquida na direção  $x$  é a soma das forças de corpo e de superfície, equações (2.7) e (2.8):

$$\begin{aligned}
dF_x &= dF_{Bx} + dF_{sx} \\
&= \left( \rho g S_{ox} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz
\end{aligned}$$

De forma análoga podem-se obter as equações para as forças nas direções  $y$  e  $z$ :

$$\begin{aligned}
dF_y &= dF_{By} + dF_{sy} \\
&= \left( \rho g S_{oy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz
\end{aligned}$$

$$dF_z = dF_{Bz} + dF_{sz}$$

$$= \left( \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dx dy dz$$

Substituindo as componentes das forças em  $x$ ,  $y$  e  $z$  na equação (2.6), obtém-se as equações diferenciais da quantidade de movimento.

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho g_{S_{ox}} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.9)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \rho g_{S_{oy}} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (2.10)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \quad (2.11)$$

As equações acima são as equações diferenciais do movimento de qualquer partícula fluida que satisfaça a hipótese do contínuo (FOX *et al.*, 1996). Para se obter as equações desejadas, devem ser obtidas expressões adequadas para as tensões, a fim de se obter o campo de velocidade e as cargas hidráulicas na superfície de uma bacia hidrográfica.

Segundo Julien 2002, as tensões normais podem ser definidas como:

$$\sigma_x = -p + \tau_{xx}, \quad (2.12)$$

$$\sigma_y = -p + \tau_{yy}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_z = -p + \tau_{zz}. \quad (2.14)$$

Iniciando a dedução das equações 2D para escoamento superficial empregadas neste trabalho, será analisada primeiramente a equação (2.11). Considerando a aceleração em  $z$  nula ( $a_z = 0$ ) e as variações das tensões cisalhantes desprezíveis, esta equação resulta em:

$$\rho g_z + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (2.15)$$

Substituindo a equação (2.14) em (2.15) e considerando  $g_z$  aproximadamente igual a  $g$  (aceleração gravitacional normal à superfície da Terra), integra-se a expressão resultante em relação à  $z$  da forma:

$$\int_p^o dp = \rho \int_z^{z+h} -g dz.$$

Deste modo, obtém-se a distribuição de pressão hidrostática na coluna do elemento, através da equação (2.11), dada por:

$$p = \rho gh. \quad (2.16)$$

A tensão cisalhante no fundo do elemento é definida através da análise de fluxo permanente e uniforme pela equação:  $\tau_{zi} = \gamma R S_{fi}$ , onde  $\gamma$  é o peso específico ( $\gamma = \rho g$ ),  $R$  é o raio hidráulico definido como  $R=A/P$ , sendo  $A$  a área da seção do elemento e  $P$  o perímetro molhado. Para escoamento superficial, considera-se que o escoamento desenvolve-se sobre um plano de largura infinita, assim, o raio hidráulico simplifica-se para o valor da carga hidráulica, sendo esta a altura da lâmina da água sobre a superfície, resultando na seguinte equação para a tensão cisalhante:

$$\tau_{zi} = \rho gh S_{fi} \quad (2.17)$$

onde  $i = x, y$ .

De acordo com as considerações: velocidade em  $z$  nula ( $w = 0$ ), efeito das variações das tensões cisalhantes das bordas desprezíveis,  $\partial S_f / \partial z = \partial H / \partial z = 0$ , fluido incompressível ( $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$ ) e substituindo a equação (2.16) em (2.12) e (2.13) e estas respectivamente em (2.9) e (2.10) e reescrevendo a equação (2.17) em termos de carga total ( $H=h+z$ ), obtém-se as equações de Saint Venant nas direções  $x$  e  $y$ :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} = g S_{ox} - g \frac{\partial h}{\partial x} - g S_{fx} \quad (2.18)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = g S_{oy} - g \frac{\partial h}{\partial y} - g S_{fy} \quad (2.19)$$

A Tabela 2.1 (Rossman, 1997) explica o significado dos termos da equação (2.18), da mesma forma aplicadas à equação (2.19).

$\frac{\partial u}{\partial t}$	Representa a aceleração local do escoamento, i.e. em uma dada posição, a taxa de variação temporal do fluxo de quantidade de movimento por unidade de massa. Em escoamento permanente, esse termo é igual à zero.
$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$	Representa a aceleração advectiva do escoamento, i.e. em um determinado instante, esses termos representam a taxa de variação espacial do fluxo de quantidade de movimento na direção $x$ por unidade de massa. Em escoamento uniforme, esses termos são iguais à zero.
$-g \frac{\partial h}{\partial x}$	Representa a resultante da pressão hidrostática na direção $x$ (gradiente de pressão), devido à declividade da superfície da água na direção $x$ . O sinal negativo representa que o fluxo desenvolve-se na direção da maior elevação para a de menor elevação.
$gS_{ox}$	Representa a ação da força de campo gravitacional, sendo proporcional à declividade do elemento.
$-gS_{fx}$	Representa a ação de atrito com o fundo.

Tabela 2.1 - Significado físico dos termos da equação de Saint Venant na direção  $x$ .

Estas equações originam o modelo hidrodinâmico, o qual pode ser utilizado para qualquer escoamento superficial. No entanto, para escoamentos com grandes declividades e pequena coluna de água, a força gravitacional torna-se preponderante, Henderson (1966). Desta forma, os termos advectivos (ou de inércia) e de pressão podem ser negligenciados tornando o ângulo de declive da energia total igual à declividade do fundo topográfico, limitando a direção de escoamento apenas de montante para jusante, dando origem ao modelo da onda cinemática.

Em sistemas onde existam efeitos de jusante sobre o escoamento e os efeitos do gradiente de pressão são significativos, o modelo cinemático torna-se obsoleto. Todavia, suas representações podem ser dadas, introduzindo o termo de pressão hidrostática no modelo da onda cinemática, com isso, originando o modelo de difusão.



O modelo de difusão não considera os termos de inércia presentes no modelo hidrodinâmico. Estes termos são importantes quando se tem grande variação temporal e espacial do campo de velocidade (Bedient *et al.*, 2002).

### 2.1.3.

#### Modelo bidimensional de onda cinemática

O modelo da onda cinemática assume que os efeitos inerciais e de pressão são desprezíveis e que a força gravitacional do fluido está balanceada com a força de resistência gerada pelo atrito com o solo. A onda cinemática não vai apresentar acelerações locais e deve fluir apenas na direção do maior declive, não contabilizando efeitos de jusante. Ainda assim, este modelo representa as variações de vazão, elevação ou declínio da superfície da água, em qualquer instante ou localização no domínio de escoamento, sempre seguindo suas premissas. Este modelo é classificado como uniforme e não permanente (Bedient *et al.*, 2002), sendo composto pela equação da continuidade e pela equação simplificada da quantidade de movimento, expressas por:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = (r - i)$$

$$S_{ox} = S_{fx}$$

$$S_{oy} = S_{fy}$$

Devido às suas simplificações este modelo restringe de forma significativa sua aplicação. Segundo Bedient *et al.* (2002), ao considerar a declividade do fundo igual à declividade da linha de atrito, na equação de quantidade de movimento, o escoamento tem as seguintes características:

- As forças de atrito e de gravidade são preponderantes sobre os termos da equação dinâmica;
- A relação entre a vazão e a altura da água torna-se unívoca;
- O modelo simula somente os efeitos de montante e não pode ser utilizado para simular escoamentos com influência de jusante, isto é efeito de remanso, marés ou tomadas de águas como na ocorrência de fraturas numa superfície rochosa de escoamento;

- O amortecimento da onda simulada neste modelo é devido à infiltração no solo, não ocorrendo amortecimento devido a efeitos dinâmicos.

Para as condições da onda cinemática, a vazão pode se escrita como uma função da área de seção de um rio.

$$Q = \alpha A^m$$

onde  $Q$  é a vazão [ $L^3/T$ ],  $A$  a área da seção [ $L^2$ ] e  $\alpha$  e  $m$  são parâmetros. Definindo esses parâmetros, através do sistema internacional de unidades (SI) e considerando escoamento desenvolvido em superfície plana, (onde o raio hidráulico iguala-se à altura da lamina de água  $h$ ), obtém-se a equação de Manning:

$$Q = \frac{1}{n} \sqrt{S_o} h^{5/3}. \quad (2.20)$$

onde  $n$  é o coeficiente de rugosidade (ou de Mannig) [ $T/L^{1/3}$ ],  $Q$  a descarga por unidade de largura [ $L^3/T/L$ ].

#### 2.1.4. Solução analítica do modelo cinemático 1D

Com a finalidade de validar os modelos numéricos, será descrita a solução analítica para uma condição simples de escoamento. Considerando o caso de um plano impermeável, com:  $h = A/b$ ,  $q = Q/b$ , e  $R = h$ , onde  $h$  [ $L$ ] é a altura da lâmina da água,  $A$  a área da seção transversal,  $b$  [ $L$ ] a largura da seção,  $Q$  [ $L^3/T$ ] o fluxo na seção,  $q$  [ $L^2/T$ ] o fluxo por unidade de largura e  $R$  o raio hidráulico [ $L$ ]. A resultante entre velocidade de precipitação e de infiltração será dada por  $i_e$ , obtendo-se a equação da onda cinemática da forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = i_e \quad (2.21)$$

com

$$q = \alpha h^m \quad (2.22)$$

Substituindo a equação (2.22) na equação (2.21) e aplicando a regra da cadeia, o segundo termo da equação (2.21) pode ser escrito da forma:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = \alpha m h^{m-1} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Podendo rescrever a equação (2.21):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \alpha m h^{m-1} \frac{\partial h}{\partial x} = i_e \quad (2.23)$$

Um incremento de altura d'água pode ser escrito como

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

dividindo por dt

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.24)$$

As equações (2.23) e (2.24) são idênticas se

$$\frac{dh}{dt} = i_e \quad (2.25)$$

e

$$\frac{dx}{dt} = \alpha m h^{m-1} = c \quad (2.26)$$

Onde  $c$  é a celeridade da onda cinemática. Um observador deslocando-se a uma velocidade  $c$ , no sentido do fluxo, poderia ver a variação da vazão nesta direção dada pela taxa de entrada no sistema, da forma  $dQ/dx = i_e$ , e para o caso  $i_e = 0$ , o observador veria uma descarga uniforme ou constante. A celeridade da onda cinemática pode também ser descrita como  $c = dQ/dA$ , onde  $dA = b dh$  (chow *et al.*, 1988).

As equações (2.25) e (2.24) são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, facilmente integráveis. Onde a solução da equação (2.25) para uma superfície inicialmente seca é dada por:

$$h = i_e t \quad (2.27)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.26) e resolvendo-a obtém-se:

$$x = x_o + \alpha i_e^{m-1} t^m$$

ou

$$x = x_o + \alpha h^{m-1} t \quad (2.28)$$

A equação (2.28) fornece a posição de uma coluna de água  $h$  no tempo  $t$ , em um plano de escoamento de comprimento  $L$  (onde  $L = x - x_o$ ). O tempo necessário para que a onda cinemática percorra completamente um plano de escoamento linear é denominado tempo de concentração, o qual pode ser obtido, isolando a variável tempo na equação (2.28) da forma:

$$t_c = \left( \frac{L}{\alpha i_e^{m-1}} \right)^{1/m} .$$

Note que este é o tempo para que a onda cinemática percorra o plano, e não uma gota d' água.

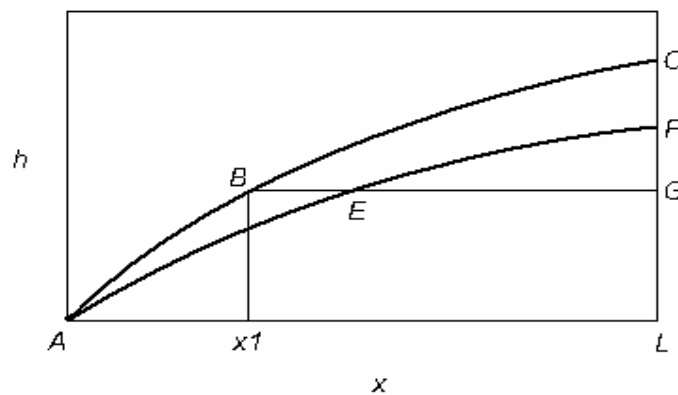


Figura 2.2 – Perfil da altura da lâmina d' água ao longo de um plano de comprimento  $L$ .

Henderson *et al.* (1964) deduziram a equação cinemática para duas situações possíveis: caso (1), quando o hidrograma atinge o equilíbrio e caso (2), quando o hidrograma fica abaixo do equilíbrio.

Caso (1): a curva ABC representa um perfil de profundidade em equilíbrio, que após um período de escoamento sem recarga passa a ser formado pela curva AEF. Durante esse período a profundidade no ponto B move-se para o ponto E, percorrendo uma distância  $\Delta x$  dada por:

$$\Delta x = \alpha m h^{m-1} \Delta t$$

ou

$$x = x_1 + \alpha m h^{m-1} (t - D)$$

onde D é a duração da chuva,  $x_1$  é a posição do ponto B. Substituindo  $x_1$  em termos da profundidade  $h$ , através da relação entre as equações (2.28) e (2.27), obtém-se:

$$x = \frac{\alpha h^m}{i_e} + \alpha m h^{m-1} (t - D) \quad (2.29)$$

Finalmente, para o ponto  $x = L$  e  $q_L = \alpha h_L^m$ , obtém-se a equação para o recesso da hidrógrafa.

$$L = \frac{q_L}{i_e} + m \alpha^{1/m} q^{(1-1/m)} (t - D)$$

Esta equação é implícita e deve ser resolvida iterativamente para obtenção da vazão de saída do sistema.

Caso 2: a período de chuva D é menor que o tempo de concentração  $t_c$ , e o perfil de profundidade assemelha-se à curva ABG. A profundidade no ponto B mover-se-á a uma taxa constante até alcançar o fim do plano no tempo  $t^*$ , avaliado como:

$$t^* = D + \frac{L - x_1}{dx/dt}$$

Rearranjando os termos, chega-se em:

$$t^* = D \left( 1 + 1/m \left( (t_c / D)^m - 1 \right) \right)$$

A vazão de saída do plano de escoamento permanece constante durante o intervalo de tempo  $D \leq t \leq t^*$  definido por:

$$q = \alpha(i_e D)^m .$$

Para  $t > t^*$ , o recesso segue a equação (2.29).

A Figura 2.3 mostra hidrogramas típicos de saída para várias situações possíveis relacionando o tempo de precipitação com o tempo de concentração do modelo. A vazão de saída no intervalo de tempo  $t < D$  e  $t < t_c$  é sempre calculado pelas equações acopladas (2.22) e (2.27).

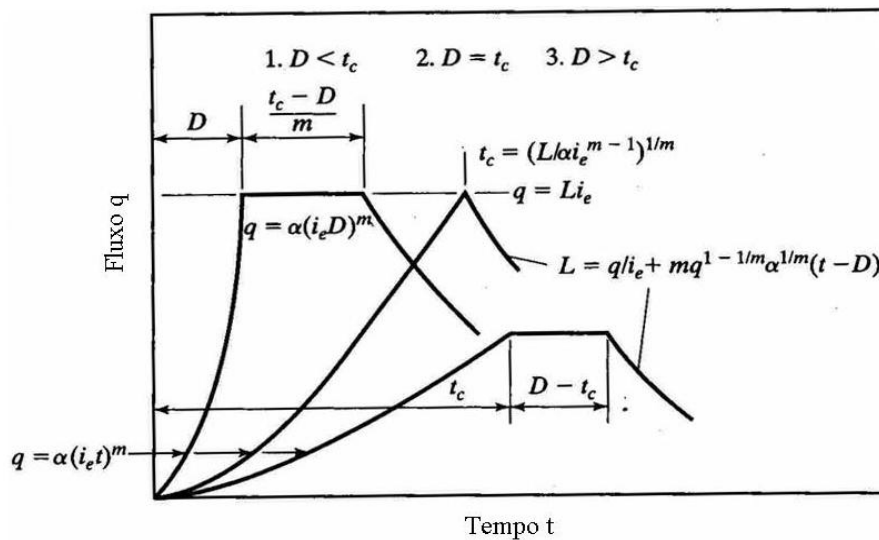


Figura 2.3 - Hidrogramas típicos de saída para três situações relacionando o tempo de precipitação  $D$  com o tempo de concentração  $t_c$ .

Analisando a Figura 2.3, pode-se verificar o seguinte comportamento de acordo com a duração do evento de precipitação: Se o período de precipitação for maior que o tempo de concentração calculado ( $D > t_c$ ), tem-se o aumento da vazão de saída até atingir o equilíbrio ditado pelo tempo de concentração, passando a ter um comportamento linear e horizontal, como indicado na curva 3. Na curva 2, quando o tempo de precipitação  $D$  se igualar ao tempo de concentração  $t_c$ , o comportamento é semelhante à curva 3, no entanto com a presença de um pico, ao invés de um período de vazão constante na saída do plano. Por último, (curva 1) quando a duração da chuva é menor que o tempo de concentração, o comportamento linear e horizontal ocorre entre o término da precipitação e a chegada da onda cinemática na jusante do plano.

### 2.1.5. Modelo bidimensional de difusão

O modelo de difusão considera a equação (2.5) e as equações de quantidade de movimento (2.18) e (2.19). Negligenciando os termos de aceleração local e advectivos destas equações, obtém-se o seguinte sistema:

$$S_{ox} - \frac{\partial h}{\partial x} = S_{fx}$$

$$S_{oy} - \frac{\partial h}{\partial y} = S_{fy}$$

Por definição sabe-se que  $S_{ox} = -\partial z / \partial x$  e a carga total é definida por  $H = h + z$ , onde  $z$  representa a carga de elevação. Desta forma, pode se escrever para ambas as direções o seguinte sistema:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + S_{fx} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} + S_{fy} = 0. \quad (2.31)$$

Para a descrição do ângulo de atrito das equações anteriores, aplica-se a lei de Manning-Stricker (Giammarco *et al.*, 1996), expressando as componentes nas coordenadas  $x$  e  $y$  como:

$$S_{fx} = \frac{n_x^2}{h^{4/3}} |V| V \times i = \frac{n_x^2}{h^{4/3}} (u^2 + v^2)^{1/2} u \quad (2.32)$$

$$S_{fy} = \frac{n_y^2}{h^{4/3}} |V| V \times j = \frac{n_y^2}{h^{4/3}} (u^2 + v^2)^{1/2} v \quad (2.33)$$

onde  $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$  é a velocidade resultante, e  $n_x$  e  $n_y$  os coeficientes de Manning nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Isolando as componentes da velocidade,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , das equações (2.32) e (2.33) e substituindo no módulo da velocidade resultante  $\vec{V}$ , obtém-se:

$$\vec{V} = h^{2/3} \left( \frac{S_{fx}^2}{n_x^4} + \frac{S_{fy}^2}{n_u^4} \right)^{1/4}.$$

Substituindo as equações (2.32) e (2.33) nas equações (2.30) e (2.31) respectivamente e considerando meio isotrópico ( $n_x = n_y$ ), podemos isolar as componentes  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , encontrando:

$$u = -D \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.34)$$

$$v = -D \frac{\partial H}{\partial y} \quad (2.35)$$

onde:

$$D = \frac{h^{2/3}}{n} \frac{1}{\left| \frac{\partial H}{\partial s} \right|^{0.5}}$$

sendo  $s$  a direção de máximo declive da superfície da água. O gradiente da carga total,  $\partial H / \partial s$  pode ser expresso pela equação:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \sqrt{\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^{0.5} + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^{0.5}}$$

Considerando a superfície topográfica invariável ao longo do tempo, pode-se reescrever a equação (2.5):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = (q - i) \quad (2.36)$$

Substituindo as equações (2.34) e (2.35) na equação (2.36), obtém-se uma nova equação diferencial, em termos de cargas totais, não linear, da forma:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K_d \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_d \frac{\partial H}{\partial y} \right) = (r - i) \quad (2.37)$$

Onde a constante  $K_d$  é dada pela seguinte expressão:



$$K_d = \frac{h^{5/3}}{n} \frac{1}{\left| \frac{\partial H}{\partial s} \right|^{0.5}}$$

A equação (2.37) define o modelo de difusão para escoamento superficial, sendo o coeficiente de difusão  $K_d$  [ $L^2/T$ ], dependente da altura da coluna de água e do coeficiente de Manning.

## 2.2. Equação de fluxo em meios porosos

Analisando o fluxo de massa líquida num volume de controle infinitesimal de solo, cuja base é  $dxdy$ , tal como esquematizado na Figura 2.1, considera-se que todas as componentes do fluxo sofrem variações ao longo de suas direções. Sendo o significado geométrico da variação da vazão  $Q_x$  para  $Q_x + (\partial Q_x / \partial x)dx$  apresentado na mesma figura (Prevedello, 1996). O termo diferencial  $\partial Q_x / \partial x$  representa a inclinação da curva  $Q_x$ . A densidade de fluxo representa a vazão por unidade de área da seção transversal de solo, não representando a velocidade real do fluido entre os poros.

Concebendo o fluxo nas faces do elemento de acordo com a Figura 2.1, a massa de água no volume de controle pode ser calculada por  $\rho \theta dx dy dz$  onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\theta$  a umidade volumétrica e  $dxdydz$  o volume do sistema (considerando novamente  $h = dz$ ). Aplicando o balanço de massa, de acordo com a equação (2.1), obtém-se a equação da continuidade para fluxo em meios porosos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = 0 \quad (2.38)$$

O cálculo da velocidade e sentido do fluxo em meios porosos saturados é feito em função da permeabilidade e do estado de energia do fluido no meio, como foi demonstrado em 1856, por Henry Darcy.

A extensão da equação de Darcy para meios não saturados consiste em escrever a permeabilidade como uma função da umidade do solo, reescrevendo a equação de Darcy na forma:

$$V_D = -K(\theta) \frac{dH}{ds} \quad (2.39)$$

Onde:  $V_D$  é a densidade de fluxo [L/T],  $K(\theta)$  é a permeabilidade do meio em função da umidade volumétrica na direção do fluxo [L/T],  $H$  é a energia total da água por unidade de peso ou carga hidráulica total [L] e  $s$  é a direção de fluxo. O sinal negativo advém de que o sentido do fluxo é contrário à convenção de sinal do gradiente matemático.

Considerando meio anisotrópico e incorporando a equação (2.39) na (2.40) em suas respectivas direções, obtém-se a equação governante de fluxo tridimensional transiente em meios porosos, denominada equação de Richards:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ K \left( K_{ij}^A \frac{\partial h}{\partial x_j} + K_{iz}^A \right) \right] - S_v. \quad (2.40)$$

onde  $h$  é a carga de pressão [L],  $\theta$  é a umidade volumétrica [-],  $S_v$  é o termo que representa a taxa de umidade volumétrica extraído pela vegetação [ $T^{-1}$ ],  $x_i$  são as coordenadas no espaço [L],  $t$  é o tempo [T],  $K_{ij}^A$  são as componentes adimensionais do tensor de anisotropia  $K^A$  [-] e  $K$  é a permeabilidade saturada e não saturada do solo [ $LT^{-1}$ ], sendo expressa por:

$$K(h, x, y, z) = K_s(x, y, z) K_r(h, x, y, z).$$

onde  $K_r$  é a condutividade hidráulica relativa [-] e  $K_s$  a permeabilidade saturada do meio [ $LT^{-1}$ ]. De acordo com a definição o valor de  $K_{ij}^A$  na equação (2.40) deve ser positivo e menor ou igual a zero. Em meios isotrópicos essa matriz é a matriz identidade. A equação (2.40) é a equação adotada pelo SWMS3D original.

O termo transiente da equação (2.40) é escrito em termos de umidade volumétrica. Desta forma, quando o solo está saturado, esta equação passa para uma condição de fluxo permanente. No entanto, para uma variação de carga na superfície ao longo do tempo, o estado de energia total do solo se modifica. Com

isso o modelo original não faz uma boa estimativa de carga de pressão na superfície no instante de saturação. Essa ocorrência foi verificada através de uma imposição de fluxo prescrito constante na superfície. Quando esse ultrapassa o potencial de infiltração do solo, cargas não condizentes eram calculadas no contorno.

Buscando solucionar esse problema, optou-se em introduzir o conceito de armazenamento específico, que leva em conta o efeito de compressibilidade do solo e do fluido.

A umidade volumétrica referente ao termo transiente da equação (2.40) é dada por  $\theta = \xi S$  onde  $\xi$  é porosidade e  $S$  é o grau de saturação. Desenvolvendo o termo transiente da equação (2.40), em derivadas parciais:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho S \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho \xi \frac{\partial S}{\partial t} + S \xi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.41)$$

Empregando os conceitos de compressibilidade dos grãos sólidos e de compressibilidade do fluido na equação (2.41) e, substituindo na equação (2.40) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ K \left( K_{ij}^A \frac{\partial h}{\partial x_j} + K_{iz}^A \right) \right] - S_v = \xi \frac{\partial S}{\partial t} + S_s S_{sat} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.33)$$

Sendo o termo do armazenamento específico expresso por:

$$S_s = S \rho g (C_s + \xi C_w)$$

O termo de armazenamento específico representa a quantidade de água liberada por um aquífero confinado para uma variação unitária de carga.

Admitindo que não ocorram variações volumétricas durante o processo de fluxo e reescrevendo o termo transiente do grau de saturação da equação (2.41) (Andrade, 2003), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ K \left( K_{ij}^A \frac{\partial h}{\partial x_j} + K_{iz}^A \right) \right] - S_v = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{S_s \theta(h)}{\xi} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.42)$$

Essa equação é geralmente aplicada para estudos de rebaixamento de poços em aquíferos confinados e não confinados.

### 2.2.1. Propriedades hidráulicas de solos não saturados

A permeabilidade em meios não saturados pode ser escrita em função do grau de saturação, ou em termo da carga hidráulica no solo. Essas duas grandezas podem ser relacionadas graficamente através da curva característica (Figura 2.4), obtida por meio de ensaios laboratoriais. Van Genuchten (1980) sugeriu uma expressão analítica que relaciona as variáveis de umidade e de carga de pressão, baseado no modelo estatístico de distribuição do tamanho dos poros de Mualem (1976). O modelo SWMS3D utiliza uma formulação modificada da equação de Van Genuchten, que sugere maior flexibilidade das propriedades hidráulicas na eminência de saturação (Sir *et al.*, 1985; Vogel *et al.*, 1988).

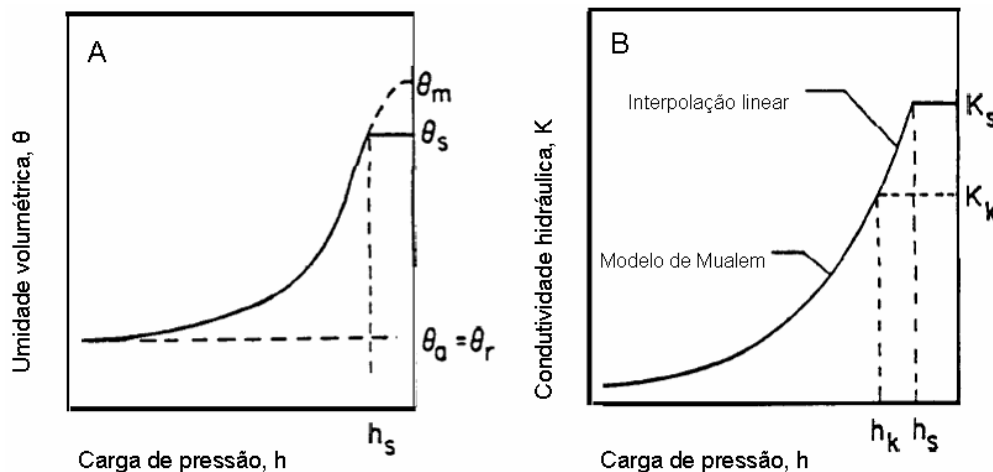


Figura 2.4 - Curva A - curva que representa a relação umidade volumétrica versus carga de pressão. Curva B - curva que representa a relação permeabilidade não saturada versus carga de pressão (fonte Simunek et al., 1995).

A equação modificada de Van Genuchten e da permeabilidade implementadas no modelo SWMS3D são respectivamente dadas por:

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_a + \frac{\theta_m - \theta_a}{(1 + |\alpha h|^n)^m} & h < h_s \\ e_s & h \geq h_s \end{cases}$$

$$K(h) = \begin{cases} K_s K_r(h) & h \leq h_k \\ K_k + \frac{(h-h_k)(K_s-K_k)}{h_s-h_k} & h_k < h < h_s \\ K_s & h \geq h_s \end{cases}$$

Onde  $K_r$  é expresso por:

$$K_r = \frac{K_k}{K_s} \left[ \frac{S_e}{S_{ek}} \right]^{1/2} \left[ \frac{F(\theta_r) - F(\theta)}{F(\theta_r) - F(\theta_k)} \right]^{1/2}$$

$$F(\theta) = \left[ 1 - \left( \frac{\theta - \theta_a}{\theta_m - \theta_a} \right)^{1/m} \right]^m$$

$$m = 1 - 1/n, \text{ onde } n > 1$$

Os parâmetros  $S_e$  e  $S_{ek}$  são obtidos pela equação (2.43) genérica:

$$S_n = \frac{E - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.43)$$

onde  $E$  representa  $\theta$  e  $\theta_k$  respectivamente com  $S_n$  representando  $S_e$  e  $S_{ek}$  respectivamente, sendo  $S_e$  o grau de saturação e  $S_{ek}$  o grau de saturação correspondente à variável  $\theta_k$ , a qual corresponde à umidade volumétrica correspondente a permeabilidade  $K_k$ , definida nos arquivos de entrada do modelo. As variáveis  $\theta_r$  e  $\theta_s$  são a umidade residual e de saturação. Quando  $\theta_a = \theta_r$ ,  $\theta_m = \theta_k = \theta_s$  e  $K_k = K_s$  as funções hidráulicas do solo se reduzem ao modelo de van Genuchten.