

4 Controle de Tração

O controle de tração buscará prover as rodas do veículo um torque que alcance os seguintes objetivos:

- a) Proporcionar ao veículo robótico vencer os obstáculos em terrenos acidentados com um mínimo deslizamento;
- b) Minimizar o consumo de potência do sistema em terrenos suaves.

O compromisso prioritário do controle de tração será com o movimento do veículo, assim sendo o objetivo de vencer obstáculos terá prioridade sobre a minimização do consumo de potência.

O movimento de um corpo está intimamente ligado à sua velocidade. Assim sendo, cada movimento desejado do veículo estará associado a uma velocidade de seu centro de massa, onde o módulo dessa velocidade será denominado velocidade desejada. Desta forma, para fazer com que o sistema consiga realizar o seu movimento desejado basta assegurar que o mesmo tenha a velocidade desejada (V_d) associada ao dado movimento.

Baseado nisso, para alcançar o objetivo da letra (a) acima o controle de tração irá calcular as forças de atrito que devem atuar entre cada roda e o solo de modo a fazer com que a velocidade do centro de massa do sistema seja V_d , onde V_d será um dado de entrada relacionado ao movimento desejado do sistema, ao mesmo tempo em que evita deslizamento e descolamento das rodas.

Já a minimização da potência dissipada pelo veículo ocorrerá quando o controle tiver mais que uma opção de escolha das F_{at} 's que devem atuar sobre o sistema para alcançar V_d , e neste caso o controle de tração escolherá as forças de atrito (F_{at1} e F_{at2}) que minimizem a potência consumida do sistema.

4.1.

Cálculo das forças de atrito para obtenção da velocidade desejada

A velocidade desejada (V_d) do centro de massa do veículo será sempre tomada na direção longitudinal ao chassi do mesmo, assim:

$$V_d = V_L \quad (205)$$

$$V_d = \dot{x}_c \cdot \cos \alpha + \dot{y}_c \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (206)$$

Sendo que V_L pode ser calculada conforme abaixo:

$$V_L = {}^0V_L + \int_{t_0}^{t_f} a_L \cdot dt \quad (207)$$

onde

V_L = velocidade do centro de massa do veículo na direção longitudinal ao chassi do mesmo.

0V_L = velocidade do centro de massa do veículo na direção longitudinal ao chassi do mesmo no instante t_0 ;

a_L = aceleração do centro de massa do veículo na direção longitudinal ao chassi do mesmo no intervalo de tempo $[t_0, t_f]$.

A aceleração a_L pode ser controlada através dos torques das rodas, que geram as forças de atrito. Pela Eq. (207) o sistema é de primeira ordem, portanto um controle proporcional é satisfatório. Considerando um ganho proporcional K_p para o erro entre as velocidades longitudinais (desejada e real), tem-se a seguinte lei de controle:

$$a_L := K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) \quad (208)$$

A equação do movimento resultante com esse controle é

$$V_L = {}^0V_L + \int_{t_0}^{t_f} K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) \cdot dt \quad (209)$$

Note que a velocidade V_L irá variar devido ao termo integral, estabilizando quando a mesma foi igual à V_d .

A aceleração a_L é dada por:

$$a_L = \ddot{x}_c \cdot \cos \alpha + \ddot{y}_c \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (210)$$

De acordo com as Equações (150) e (151) do Capítulo 2 e as Equações (202) e (203) do Capítulo 3, as acelerações \ddot{x}_c e \ddot{y}_c são funções do estado atual do sistema e das forças de atrito, assim pode-se escrever a_L de uma forma geral como:

$$a_L = \eta_1 \cdot Fat_1 + \eta_2 \cdot Fat_2 + a_0 \quad (211)$$

onde os coeficientes η_1, η_2 e a_0 dependem do estado atual do sistema e das suas características físicas e geométricas, além do modelo adotado para a suspensão. Assim, esses coeficientes são calculados da seguinte forma:

a) Veículo modelado como corpo rígido

De acordo com a Eq. (163), as acelerações \ddot{x}_c e \ddot{y}_c do centro de massa do veículo são dadas por:

$$\ddot{x}_c = g_{11} \cdot Fat_1 + g_{12} \cdot Fat_2 + \bar{e}_1 \quad (212)$$

$$\ddot{y}_c = g_{21} \cdot Fat_1 + g_{22} \cdot Fat_2 + \bar{e}_2 \quad (213)$$

onde

g_{ij} = é o elemento da linha i e coluna j da matriz G, definida em (162b);

\bar{e}_i = é o i-ésimo elemento do vetor \bar{E} , definido em (162c).

Substituindo (212) e (213) na eq. (210), tem-se:

$$a_L = (g_{11} \cdot Fat_1 + g_{12} \cdot Fat_2 + \bar{e}_1) \cdot \cos \alpha + (g_{21} \cdot Fat_1 + g_{22} \cdot Fat_2 + \bar{e}_2) \cdot \text{sen} \alpha \quad (214)$$

$$a_L = (g_{11} \cdot \cos \alpha + g_{21} \cdot \text{sen} \alpha) \cdot Fat_1 + (g_{12} \cdot \cos \alpha + g_{22} \cdot \text{sen} \alpha) \cdot Fat_2 + (\bar{e}_1 \cdot \cos \alpha + \bar{e}_2 \cdot \text{sen} \alpha) \quad (215)$$

Comparando a eq. (211) com a Eq. (215), verifica-se que para o caso em que o veículo é modelado como um corpo rígido os valores de η_1, η_2 e a_0 são:

$$\eta_1 \equiv g_{11} \cdot \cos \alpha + g_{21} \cdot \text{sen} \alpha \quad (216)$$

$$\eta_2 \equiv g_{12} \cdot \cos \alpha + g_{22} \cdot \text{sen} \alpha \quad (217)$$

$$a_0 \equiv \bar{e}_1 \cdot \cos \alpha + \bar{e}_2 \cdot \text{sen} \alpha \quad (218)$$

b) Veículo modelado com suspensão flexível:

De acordo com as Equações (202) e (203) do Capítulo 3, as acelerações \ddot{x}_c e \ddot{y}_c podem ser escritas como:

$$\ddot{x}_c = \zeta_1 + \frac{\cos \alpha}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} \cdot Fat_1 + \frac{\cos \alpha}{m \cdot \cos(\gamma_2 - \alpha)} \cdot Fat_2 \quad (219)$$

$$\ddot{y}_c = \zeta_2 + \frac{\text{sen} \alpha}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} \cdot Fat_1 + \frac{\text{sen} \alpha}{m \cdot \cos(\gamma_2 - \alpha)} \cdot Fat_2 - P \quad (220)$$

onde

$$\zeta_1 \equiv \frac{(K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot [\text{sen}\alpha + \tan(\gamma_1 - \alpha) \cdot \cos\alpha] + (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot [\text{sen}\alpha + \tan(\gamma_2 - \alpha) \cdot \cos\alpha]}{m} \quad (221)$$

$$\zeta_2 \equiv \frac{(K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot [-\cos\alpha + \tan(\gamma_1 - \alpha) \cdot \text{sen}\alpha] + (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot [-\cos\alpha + \tan(\gamma_2 - \alpha) \cdot \text{sen}\alpha]}{m} \quad (222)$$

Substituindo (219) e (220) na Eq. (210) resulta em:

$$a_L = \left(\zeta_1 + \frac{\cos\alpha}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} \cdot \text{Fat}_1 + \frac{\cos\alpha}{m \cdot \cos(\gamma_2 - \alpha)} \cdot \text{Fat}_2 \right) \cdot \cos\alpha + \left(\zeta_2 + \frac{\text{sen}\alpha}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} \cdot \text{Fat}_1 + \frac{\text{sen}\alpha}{m \cdot \cos(\gamma_2 - \alpha)} \cdot \text{Fat}_2 - P \right) \cdot \text{sen}\alpha \quad (223)$$

$$a_L = \frac{(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} \cdot \text{Fat}_1 + \frac{(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)}{m \cdot \cos(\gamma_2 - \alpha)} \cdot \text{Fat}_2 + (\zeta_1 \cdot \cos\alpha + \zeta_2 \cdot \text{sen}\alpha - P \cdot \text{sen}\alpha) \quad (223a)$$

$$a_L = \frac{\text{Fat}_1}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} + \frac{\text{Fat}_2}{m \cdot \cos(\gamma_2 - \alpha)} + (\zeta_1 \cdot \cos\alpha + \zeta_2 \cdot \text{sen}\alpha - P \cdot \text{sen}\alpha) \quad (223b)$$

Assim, comparando agora a Eq. (211) com a Eq. (223b) resulta nos seguintes valores para η_1, η_2 e a_0 :

$$\eta_1 \equiv \frac{1}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} \quad (224)$$

$$\eta_2 \equiv \frac{1}{m \cdot \cos(\gamma_2 - \alpha)} \quad (225)$$

$$a_0 \equiv \zeta_1 \cdot \cos\alpha + \zeta_2 \cdot \text{sen}\alpha - P \cdot \text{sen}\alpha \quad (226)$$

Substituindo a Eq. (211) na Eq. (208), resulta em:

$$\eta_1 \cdot \text{Fat}_1 + \eta_2 \cdot \text{Fat}_2 + a_0 = K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) \quad (227)$$

$$\eta_1 \cdot \text{Fat}_1 + \eta_2 \cdot \text{Fat}_2 = K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0 \quad (228)$$

Assim, de acordo com a Eq. (228) acima pode-se verificar que os valores de Fat_1 e Fat_2 que aplicados às rodas do veículo resultam em uma velocidade desejada (V_d) do centro de massa do mesmo formam um plano.

No entanto, nem todos os pontos ($\text{Fat}_1, \text{Fat}_2$) de tal plano poderão ser obtidos a partir de uma dado torque aplicado as rodas do sistema, sendo que as Fat 's possíveis de serem obtidas entre as rodas e o solo devem satisfazer as seguintes condições:

- i) $|Fat_1| \leq F_{sat_1}$, restrição referente à força de saturação do motor da roda 1;
- ii) $|Fat_2| \leq F_{sat_2}$, restrição referente à força de saturação do motor da roda 2;
- iii) $N_1 > 0$, condição para haver contato entre a roda 1 e o terreno;
- iv) $N_2 > 0$, condição para haver contato entre a roda 2 e o terreno;
- v) $|Fat_1| \leq \mu_1 \cdot N_1$, condição de não deslizamento da roda 1;
- vi) $|Fat_2| \leq \mu_2 \cdot N_2$, condição de não deslizamento da roda 2;

Assim, haverá uma região $D = \{(Fat_1, Fat_2) \in \mathfrak{R}^2 / \text{as condições (i) a (vi) acima sejam verdadeiras}\}$ das possíveis forças de atrito que poderão agir no sistema. A forma da região D irá depender do tipo de abordagem aplicada ao estudo do sistema, sendo que as Figuras 19 e 20 mostram a forma de D para o veículo considerado como corpo rígido e para o veículo com suspensão flexível, respectivamente.

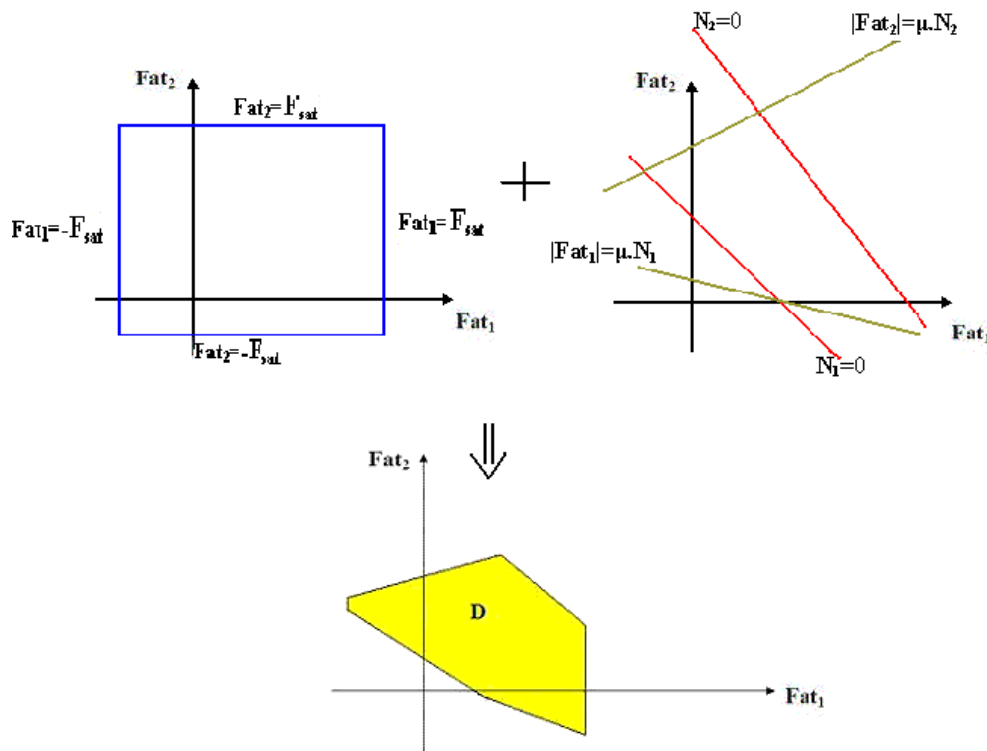


Figura 19 – Obtenção da região D para a abordagem de corpo rígido.

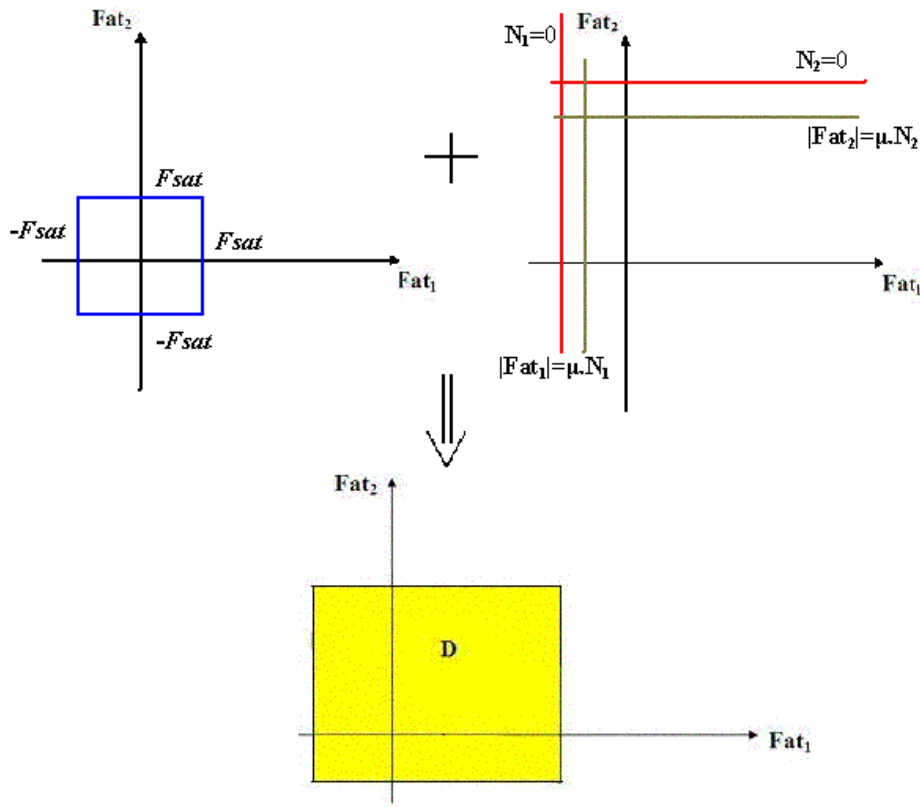


Figura 20 - Obtenção da região D para a abordagem com suspensão flexível.

O modelo que considera o veículo com suspensão flexível possui a região D retangular (Fig. 20) devido à equação das forças normais não apresentar acoplamento “instantâneo” com as das forças de atrito, como discutido no Capítulo 3.

Dessa forma, independente do modelo adotado, o conjunto de pontos (Fat_1, Fat_2) que o controle de tração poderá escolher para gerar V_d será:

$$\Gamma = D \cap D' \tag{229}$$

onde

$$D' = \{(Fat_1, Fat_2) \in \mathbb{R}^2 / \eta_1 \cdot Fat_1 + \eta_2 \cdot Fat_2 = K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0\} \tag{230}$$

Se $\Gamma = \emptyset$, então não será possível para o controle fazer com que o veículo alcance a velocidade V_d no estado seguinte do sistema, assim será escolhido no domínio D de possíveis valores das forças de atrito um ponto $(\check{Fat}_1, \check{Fat}_2)$ que minimize o valor absoluto da diferença entre a velocidade longitudinal do centro

de massa (V_L) e a velocidade desejada para o mesmo (V_d), ou seja: $(\check{F}at_1, \check{F}at_2)$ será tal que minimiza $\Delta V_L = |V_L - V_d|$.

Entretanto, se $D \cap D' \neq \emptyset$, Γ será um segmento de reta no plano $Fat_1 \times Fat_2$ conforme mostrado na Fig. 21. Assim, haverá infinitos pontos (Fat_1, Fat_2) que aplicados ao sistema irão gerar V_d , podendo nesse caso se aplicar um critério de otimização para escolher as forças de atrito a serem aplicadas ao veículo.

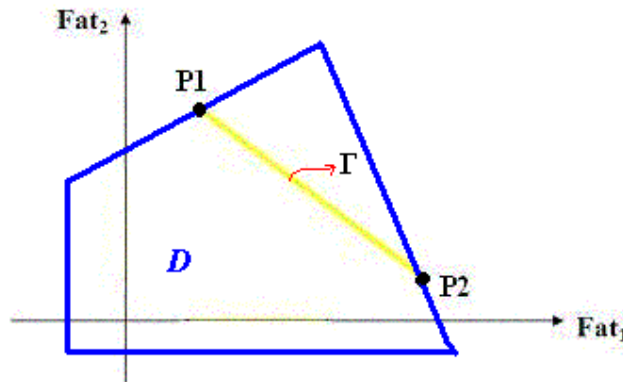


Figura 21 - Região Γ de possíveis valores das forças de atrito para escolha do controle.

No problema aqui abordado o critério de otimização será, como já mencionado, minimizar o consumo de potência do veículo, onde a metodologia empregada nessa otimização será a descrita no item 4.2 a seguir.

4.2. Minimização do consumo de potência do sistema

A potência dissipada pelos motores de acionamento das rodas pode ser dividida em duas parcelas. Uma devido ao efeito Joule (que dependerá da resistência elétrica do motor e da corrente elétrica que atravessa o motor) dada conforme a Eq. (68) do Capítulo 2 e a outra é devido ao trabalho mecânico do eixo do motor, dada por:

$$P_e = |T_1 \cdot \omega_1| + |T_2 \cdot \omega_2| \tag{231}$$

onde

P_e = potência devido ao movimento do eixo dos motores de acionamento das rodas;

T_1 = torque do eixo do motor da roda 1 dado em N.m;

T_2 = torque do eixo do motor da roda 2 dado em N.m;

ω_1 = velocidade angular do eixo do motor da roda 1 dada em rad/s ;

ω_2 = velocidade angular do eixo do motor da roda 2 dada em rad/s .

Na presente abordagem a parcela da potência elétrica dissipada será desprezada, assumindo que a resistência elétrica do motor é pequena, resultando assim que a potência total dissipada pelo sistema em análise será igual a P_e . Desta forma, a potência total dissipada pelo sistema (P_T) pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_T = P_e \Rightarrow P_T = |T_1 \cdot \omega_1| + |T_2 \cdot \omega_2| \quad (232)$$

Considerando que não há deslizamento entre o eixo dos motores e as rodas (transmissão sem embreagem ou limitadores de torque), as velocidades angulares das rodas serão iguais às dos eixos. E como as inércias das rodas foram desprezadas, o torque do eixo do motor de acionamento de uma dada roda i será igual à força de atrito entre essa roda e o solo multiplicada pelo raio da mesma, ou seja:

$$T_i = Fat_i \cdot r \quad (233)$$

Assumindo que, o controle irá sempre conseguir evitar o deslizamento das rodas, a velocidade angular de uma roda i do veículo estará relacionada com o módulo da velocidade linear do centro desta roda da seguinte forma:

$$\omega_i = sign(\omega_i) \cdot \frac{V_{ci}}{r} \quad (234)$$

onde

V_{ci} = módulo da velocidade linear do centro da roda i ;

r = raio da roda.

Substituindo as Equações (234) e (233) na Eq. (232), resulta em:

$$P_T = |Fat_1 \cdot r \cdot sign(\omega_1)| \cdot \frac{V_{c1}}{r} + |Fat_2 \cdot r \cdot sign(\omega_2)| \cdot \frac{V_{c2}}{r} \quad (235)$$

$$P_T = |Fat_1 \cdot sign(\omega_1)| \cdot V_{c1} + |Fat_2 \cdot sign(\omega_2)| \cdot V_{c2} \quad (235a)$$

$$P_T = |Fat_1| \cdot |sign(\omega_1)| \cdot V_{c1} + |Fat_2| \cdot |sign(\omega_2)| \cdot V_{c2} \quad (235b)$$

$$P_T = |Fat_1| \cdot V_{c1} + |Fat_2| \cdot V_{c2} \quad (235c)$$

4.2.1.

Cálculo da potência dissipada nas duas abordagens empregadas na análise do sistema

Como o sistema foi analisado com duas abordagens diferentes, faz-se necessário derivar a relação entre a potência dissipada e as velocidades dos centros das rodas para cada caso.

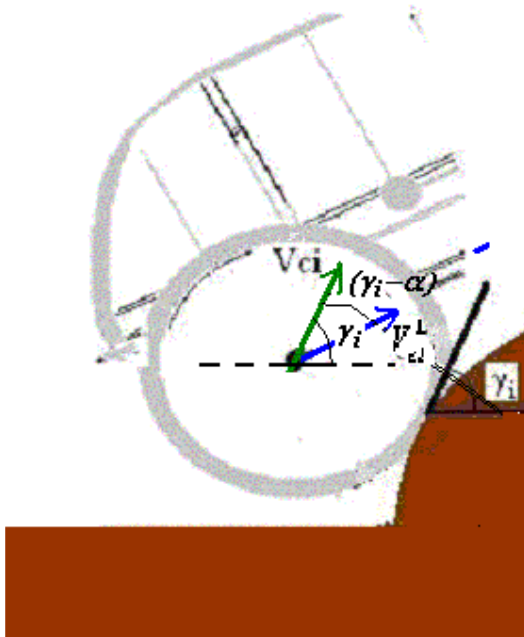


Figura 22 – Velocidades V_{ci} e V_{ci}^L .

Analisando a Fig. 22 pode-se verificar que V_{ci} está relacionada com a velocidade V_{ci}^L , que é a velocidade do centro da roda i na direção longitudinal ao chassi do veículo, da seguinte forma:

$$V_{ci} = \left| \frac{V_{ci}^L}{\cos(\gamma_i - \alpha)} \right| \tag{236}$$

A Eq. (236) é válida tanto para o modelo do veículo como corpo rígido, quanto para a modelagem que considera as suspensões do veículo flexíveis. Assim, a equação da potência total dissipada do sistema pode ser escrita de acordo com a Eq. (235c), em ambas as abordagens do sistema, da seguinte forma:

$$P_T = |Fat_1| \cdot \left| \frac{V_{c1}^L}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \right| + |Fat_2| \cdot \left| \frac{V_{c2}^L}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right| \tag{237}$$

A expressão das velocidades V_{ci}^L varia conforme o modelo empregado para análise do sistema, tendo como consequência a variação também da potência dissipada (P_T). Dessa forma, é necessário derivar a expressão da potência dissipada para cada uma das abordagens empregadas para modelagem do sistema, conforme abaixo.

a) Veículo modelado como corpo rígido

Como essa abordagem considera o veículo como um corpo rígido, tem-se que V_{ci}^L será:

$$V_{ci}^L = V_c^L + h_i \cdot \dot{\alpha} \quad (238)$$

onde

V_c^L = velocidade do centro de massa na direção longitudinal ao chassi do veículo;

Substituindo V_c^L por V_d na Eq. (238), pois deseja-se que $V_c^L = V_d$, resulta em:

$$V_{ci}^L = V_d + h_i \cdot \dot{\alpha} \quad (239)$$

Observando a Eq. (239) pode-se verificar que uma vez definida a velocidade desejada (V_d), a velocidade V_{ci}^L será constante na transição deste estado para o seguinte, pois V_{ci}^L depende do estado atual do sistema (que já é conhecido), do perfil do terreno (que também está fixado) e da velocidade desejada (V_d).

De acordo com a Eq. (239) as velocidades do centro das rodas, na direção longitudinal ao chassi, serão:

$$V_{c1}^L = V_d + h_1 \cdot \dot{\alpha} \quad (240)$$

$$V_{c2}^L = V_d + h_2 \cdot \dot{\alpha} \quad (241)$$

Assim, substituindo as velocidades calculadas em (240) e (241) na Eq. (237) da potência, resulta em:

$$P_T = |Fat_1| \cdot \left| \frac{V_d + h_1 \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \right| + |Fat_2| \cdot \left| \frac{V_d + h_2 \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right| \quad (242)$$

Como as variáveis de estado são consideradas constantes ao longo da transição de um estado j para o estado seguinte ($j+1$), somente variando os seus valores no instante de chegada ao estado ($j+1$), a Eq. (242) acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$P_T = |Fat_1| \cdot \Delta_1 + |Fat_2| \cdot \Delta_2 \quad (243)$$

com

$$\Delta_1 \equiv \left| \frac{V_d + h_1 \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \right| \quad (244)$$

$$\Delta_2 \equiv \left| \frac{V_d + h_2 \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right| \quad (245)$$

Note que Δ_1 e Δ_2 são constantes no estado atual do sistema. Assim, a Eq. (243) revela que a potência dissipada pelo sistema será função das forças de atrito, ou seja, $P_T = f(Fat_1, Fat_2)$.

b) Veículo modelado com suspensão flexível

Quando as suspensões do veículo são modeladas como flexíveis na direção transversal ao chassi do mesmo, consideram-se as velocidades V_{ci}^L dadas por:

$$V_{ci}^L = V_c^L + (h_i + \xi_i) \cdot \dot{\alpha} \quad (246)$$

Conforme já mencionado, tem-se que $V_c^L = V_d$, resultando no seguinte valor de V_{ci}^L :

$$V_{ci}^L = V_d + (h_i + \xi_i) \cdot \dot{\alpha} \quad (247)$$

Substituindo $i=1,2$ na Eq. (247) encontram-se V_{c1}^L e V_{c2}^L , respectivamente.

Desta forma, tem-se que:

$$V_{c1}^L = V_d + (h_1 + \xi_1) \cdot \dot{\alpha} \quad (248)$$

$$V_{c2}^L = V_d + (h_2 + \xi_2) \cdot \dot{\alpha} \quad (249)$$

Substituindo as Equações (248) e (249) na Eq. (237), resulta em:

$$P_T = |Fat_1| \cdot \left| \frac{V_d + (h_1 + \xi_1) \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \right| + |Fat_2| \cdot \left| \frac{V_d + (h_2 + \xi_2) \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right| \quad (250)$$

Analogamente à Eq. (243), P_T pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_T = |Fat_1| \cdot \nabla_1 + |Fat_2| \cdot \nabla_2 \quad (251)$$

onde

$$\nabla_1 \equiv \left| \frac{V_d + (h_1 + \xi_1) \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \right| \quad (252)$$

$$\nabla_2 \equiv \left| \frac{V_d + (h_2 + \xi_2) \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right| \quad (253)$$

Como ∇_1 e ∇_2 dependem apenas do estado atual do sistema e do perfil do terreno, os mesmos podem ser considerados constantes na transição de estado, resultando assim que a potência dissipada para o caso onde a suspensão do veículo é modelada como flexível será função apenas das forças de atrito, ou seja, $P_T = f_1(Fat_1, Fat_2)$.

Desta forma, conforme visto nos item (a) e (b) acima, a potência dissipada pelo sistema (P_T) pode ser escrita de uma forma geral como:

$$P_T = |Fat_1| \cdot \bar{\Delta}_1 + |Fat_2| \cdot \bar{\Delta}_2 \quad (254)$$

onde os coeficientes das forças de atrito ($\bar{\Delta}_1$ e $\bar{\Delta}_2$) irão depender da abordagem utilizada na resolução do problema. (suspensão rígida ou flexível)

4.2.2.

Cálculo das Forças de Atrito que minimizam a Potência Total Dissipada

O problema de minimização de P_T é na verdade um problema de se achar o mínimo de uma função em um domínio fechado, o qual será o conjunto Γ definido anteriormente.

Como as forças de atrito (Fat_1 e Fat_2) candidatas à solução do problema devem pertencer ao conjunto Γ , as mesmas estão relacionadas, de acordo com a Eq. (228), da seguinte maneira:

$$Fat_2 = \frac{K_p \cdot (V_d - V_L) - a_0 - \eta_1 \cdot Fat_1}{\eta_2} \quad (255)$$

Substituindo agora a Eq. (255) na Eq. (254), obtém-se:

$$P_T = |Fat_1| \cdot \bar{\Delta}_1 + \left| \frac{K_p \cdot (V_d - V_L) - a_0 - \eta_1 \cdot Fat_1}{\eta_2} \right| \cdot \bar{\Delta}_2 \quad (256)$$

Assim, P_T é agora uma função de uma única variável (Fat_1), sendo que os possíveis candidatos a ponto de mínimo, de acordo com Demidovitch [16], serão: os pontos da fronteira de Γ , os pontos onde a derivada de P_T em relação a Fat_1 é nula e onde a derivada não existe.

O domínio Γ pode ser escrito como:

$$\Gamma = \left\{ (Fat_1, Fat_2) \in \mathbb{R}^2 / Fat_1 \in [fat_min, fat_max] e Fat_2 = \frac{K_p \cdot (V_d - V_L) - a_0 - \eta_1 \cdot Fat_1}{\eta_2} \right\} \quad (257)$$

Assim, os pontos candidatos a mínimo serão:

- Pontos da fronteira de Γ :

$$P_1 = \left(fat_min, \frac{K_p \cdot (V_d - V_L) - a_0 - \eta_1 \cdot fat_min}{\eta_2} \right) \quad (258)$$

$$P_2 = \left(fat_max, \frac{K_p \cdot (V_d - V_L) - a_0 - \eta_1 \cdot fat_max}{\eta_2} \right) \quad (259)$$

- Pontos onde a derivada de P_T é nula ou não existe:

De acordo com a Eq. (256) acima, pode-se verificar que $\frac{dP_T}{dFat_1} \neq 0$, para todos os pontos (Fat_1, Fat_2) pertencentes a Γ .

Pode-se verificar que $\frac{dP_T}{dFat_1}$ não é definida em :

$$Fat_1 = 0 \quad (260)$$

$$e Fat_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Fat_1 = \frac{K_p \cdot (V_d - V_L) - a_0}{\eta_1} \quad (261)$$

Os valores de Fat_1 dados pelas Equações (260) e (261) irão gerar mais dois pontos, a saber:

$$P_3 = \left(0, \frac{K_p \cdot (V_d - V_L) - a_0}{\eta_2} \right) \quad (262)$$

$$P_4 = \left(\frac{K_p \cdot (V_d - V_L) - a_0}{\eta_1}, 0 \right) \quad (263)$$

Sendo que para P_3 e P_4 serem candidatos a mínimo da função P_T , os mesmos devem pertencer a Γ , ou seja, os valores de sua coordenada Fat_1 devem pertencer ao intervalo $[fat_min, fat_max]$.

Desta forma, as forças de atrito (Fat_1^o, Fat_2^o) que o controle aplicará ao sistema serão as componentes do ponto P_i tal que :

$$P_i = (Fat_1^o, Fat_2^o) \text{ tal que } \min P_T = P_T(Fat_1^o, Fat_2^o) \text{ em } \Gamma, \text{ com } i=1, \dots, 4. \quad (264)$$

Assim, o controle proposto atuando de forma independente sobre o torque dos motores de acionamento das rodas consegue fazer com que o robô vença os obstáculos ao longo do seu percurso através da manutenção de uma dada velocidade desejada, evitando deslizamento e descolamento das rodas e saturação dos motores. Além disso, se todas as condições acima puderem ser satisfeitas com mais de uma combinação (Fat_1 , Fat_2), o controle proposto ainda busca a solução que minimiza o consumo de potência.

No próximo capítulo será apresentado o simulador desenvolvido para comprovar a eficácia das técnicas apresentadas.