

3 Modelagem 2D do veículo com suspensão flexível

Neste capítulo, as suspensões do veículo são modeladas como tendo uma certa flexibilidade e amortecimento na direção transversal ao chassi e sendo rígidas na direção longitudinal ao mesmo. O modelo também não leva em consideração as inércias das suspensões e das rodas como corpos rígidos isolados, sendo as mesmas consideradas concentradas no centro de massa. A Fig. 16 ilustra o modelo do veículo com a suspensão flexível.

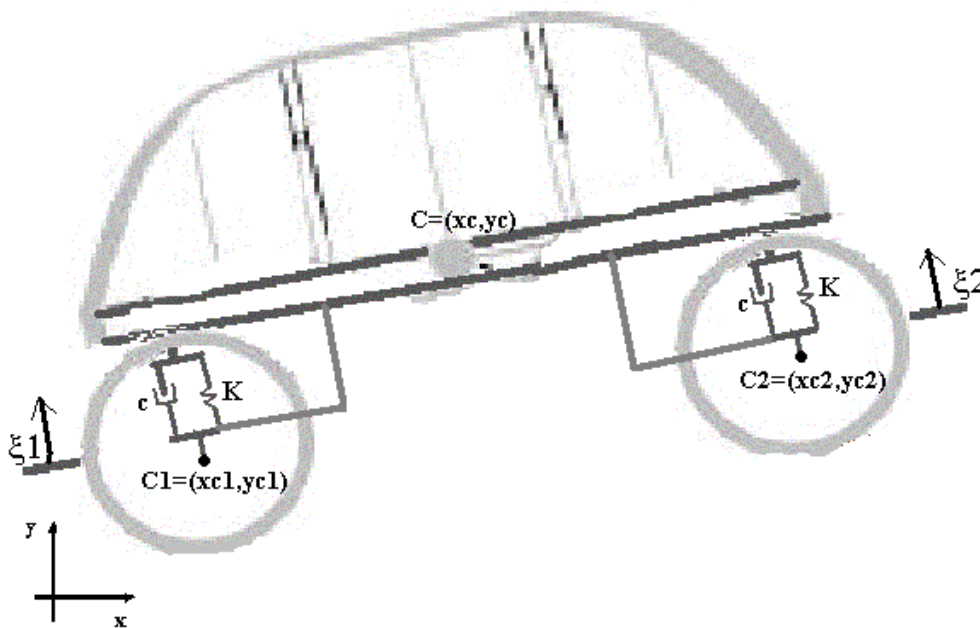


Figura 16 - Modelo do veículo com suspensão flexível.

A Fig. 17 ilustra as forças atuando sobre o chassi do veículo, sendo que a aplicação das leis de Newton-Euler ao mesmo resulta nas seguintes equações:

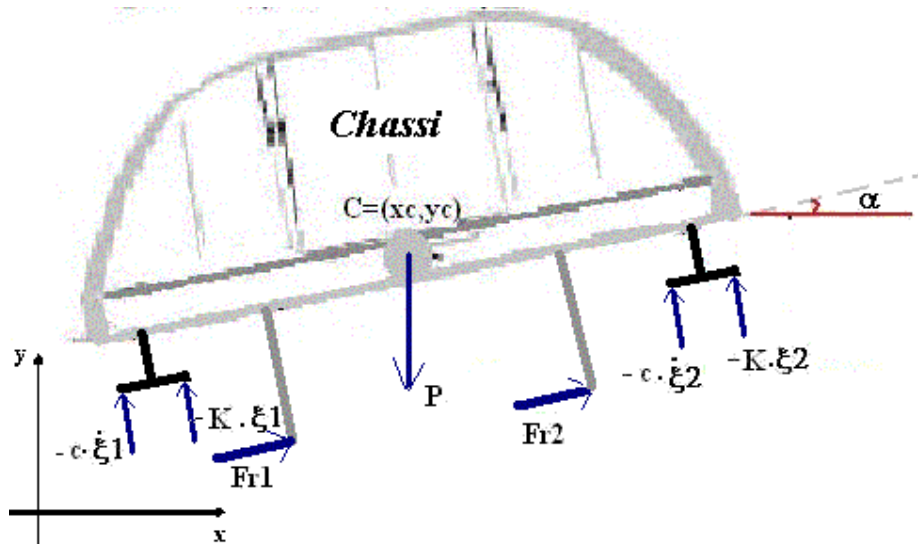


Figura 17 - Forças agindo no chassi do veículo.

$$\sum F_x = m \cdot \ddot{x}_c$$

$$m \cdot \ddot{x}_c = [K \cdot (\xi_1 + \xi_2) + c \cdot (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)] \cdot \text{sen} \alpha + (F_{r1} + F_{r2}) \cdot \text{cos} \alpha \quad (174)$$

$$\sum F_y = m \cdot \ddot{y}_c$$

$$m \cdot \ddot{y}_c = -[K \cdot (\xi_1 + \xi_2) + c \cdot (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)] \cdot \text{cos} \alpha + (F_{r1} + F_{r2}) \cdot \text{sen} \alpha - P \quad (175)$$

$$\sum M_{CM} = I \cdot \ddot{\alpha}$$

$$I \cdot \ddot{\alpha} = (K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot L_1 - (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot L_2 + F_{r1} \cdot (h_1 + \xi_1) + F_{r2} \cdot (h_2 + \xi_2) \quad (176)$$

onde

K = constante de rigidez das suspensões na direção transversal ao chassi do veículo;

c = constante de amortecimento das suspensões na direção transversal ao chassi do veículo;

ξ_i = alongamento / compressão da suspensão i na direção transversal ao chassi do veículo;

$\dot{\xi}_i$ = taxa de variação no tempo do alongamento / compressão da suspensão i na direção transversal ao chassi do veículo;

F_{ri} = força de reação interna da suspensão i sobre o chassi na direção longitudinal;

α = ângulo de inclinação do chassi do veículo em relação ao eixo x ;

O diagrama de corpo livre de uma roda i do veículo é ilustrado pela Fig. 18 abaixo, aplicando as leis de Newton-Euler a mesma resulta nas seguintes equações:

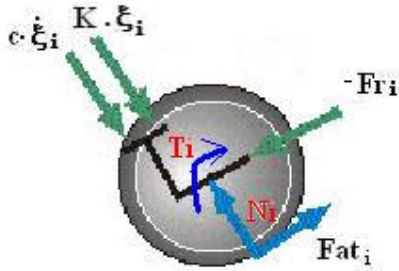


Figura 18 - Forças e torque agindo em uma roda i do veículo.

$$\sum F_x = 0$$

$$-(K \cdot \xi_i + c \cdot \dot{\xi}_i) \cdot \text{sen} \alpha - F_{r_i} \cdot \cos \alpha + Fat_i \cdot \cos \gamma_i - N_i \cdot \text{sen} \gamma_i = 0 \quad (177)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$(K \cdot \xi_i + c \cdot \dot{\xi}_i) \cdot \cos \alpha - F_{r_i} \cdot \text{sen} \alpha + Fat_i \cdot \text{sen} \gamma_i + N_i \cdot \cos \gamma_i = 0 \quad (178)$$

$$\sum M_{C_i} = 0$$

$$Fat_i \cdot r - T_i = 0 \Rightarrow Fat_i = \frac{T_i}{r} \quad (179)$$

onde

T_i = torque de entrada da roda i ;

γ_i = ângulo de contato entre a roda i e o solo.

O deslocamento ξ_i e a sua taxa de variação no tempo $\dot{\xi}_i$ são calculados a partir do conhecimento do estado atual do sistema $(x_c, y_c, \alpha, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\alpha})$ e das coordenadas cartesianas do centro da roda i (x_{ci}, y_{ci}) , que são conhecidas a partir do perfil do terreno. Sendo que essas quantidades são calculadas como segue:

$$\xi_i = -(x_c - x_{ci}) \cdot \text{sen} \alpha + (y_c - y_{ci}) \cdot \cos \alpha \quad (180)$$

$$\dot{\xi}_i = \frac{d\xi_i}{dt} \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i = & -(\dot{x}_c - \dot{x}_{ci}) \cdot \text{sen} \alpha + (\dot{y}_c - \dot{y}_{ci}) \cdot \cos \alpha \\ & - [(x_c - x_{ci}) \cdot \cos \alpha + (y_c - y_{ci}) \cdot \text{sen} \alpha] \cdot \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (181a)$$

Como as inércias das rodas e das suspensões são consideradas desprezíveis, as mesmas nunca sofrerão alongamento. Desta forma as Equações (180) e (181a) são válidas apenas para a situação de compressão das suspensões, caso contrário têm-se que $\xi_i = \dot{\xi}_i = 0$. Assim, sempre que a Eq. (181a) for válida o veículo estará com a sua roda i em contato com o solo e as velocidades do centro desta roda ao longo do eixo y e do eixo x estarão relacionadas da seguinte forma:

$$\dot{y}_{ci} = \tan \gamma_i \cdot \dot{x}_{ci} \quad (182)$$

Considerando que num dado instante a velocidade do centro da roda i na direção longitudinal ao chassi do veículo é dada por:

$$V_{ci}^L = V_c^L + (h_i + \xi_i) \cdot \dot{\alpha} \quad (183)$$

onde

$$V_{ci}^L = \dot{x}_{ci} \cdot \cos \alpha + \dot{y}_{ci} \cdot \text{sen} \alpha \quad (184)$$

$$V_c^L = \dot{x}_c \cdot \cos \alpha + \dot{y}_c \cdot \text{sen} \alpha \quad (185)$$

Substituindo (184) e (185) na Eq. (183) e utilizando o resultado da Eq. (182), resulta em:

$$\dot{x}_{ci} \cdot (\cos \alpha + \tan \gamma_i \cdot \text{sen} \alpha) = \dot{x}_c \cdot \cos \alpha + \dot{y}_c \cdot \text{sen} \alpha + (h_i + \xi_i) \cdot \dot{\alpha} \quad (186)$$

$$\dot{x}_{ci} = \frac{\dot{x}_c \cdot \cos \alpha + \dot{y}_c \cdot \text{sen} \alpha + (h_i + \xi_i) \cdot \dot{\alpha}}{(\cos \alpha + \tan \gamma_i \cdot \text{sen} \alpha)} \quad (187)$$

Substituindo (187) em (182), obtém-se o seguinte valor para \dot{y}_{ci} :

$$\dot{y}_{ci} = \tan \gamma_i \cdot \left(\frac{\dot{x}_c \cdot \cos \alpha + \dot{y}_c \cdot \text{sen} \alpha + (h_i + \xi_i) \cdot \dot{\alpha}}{(\cos \alpha + \tan \gamma_i \cdot \text{sen} \alpha)} \right) \quad (188)$$

Assim, substituindo as Equações (187) e (188) acima na Eq. (181a) é possível calcular $\dot{\xi}_i$ somente em função do estado atual do sistema e das coordenadas cartesianas do centro da roda i , sendo o seu valor dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i = & -\dot{x}_c \cdot \text{sen} \alpha + \dot{y}_c \cdot \cos \alpha - [(x_c - x_{ci}) \cdot \cos \alpha + (y_c - y_{ci}) \cdot \text{sen} \alpha] \cdot \dot{\alpha} \\ & + (\dot{x}_c \cdot \cos \alpha + \dot{y}_c \cdot \text{sen} \alpha + (h_i + \xi_i) \cdot \dot{\alpha}) \cdot \frac{(\text{sen} \alpha - \tan \gamma_i \cdot \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \tan \gamma_i \cdot \text{sen} \alpha)} \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i = & [\tan(\alpha - \gamma_i) \cdot \cos \alpha - \text{sen} \alpha] \cdot \dot{x}_c + [\tan(\alpha - \gamma_i) \cdot \text{sen} \alpha - \cos \alpha] \cdot \dot{y}_c \\ & + [(h_i + \xi_i) \cdot \tan(\alpha - \gamma_i) - (x_c - x_{ci}) \cdot \cos \alpha - (y_c - y_{ci}) \cdot \text{sen} \alpha] \cdot \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (190)$$

Analisando as Equações (177) a (179), e assumindo que o torque (T_i) em cada eixo é dado, as mesmas apresentam como incógnitas N_i e F_{ri} .

Assim, rearrumando as equações (177) e (178) acima, resulta no seguinte sistema de equações lineares:

$$F_{ri} \cdot \cos \alpha + N_i \cdot \operatorname{sen} \gamma_i = -(K \cdot \xi_i + c \cdot \dot{\xi}_i) \cdot \operatorname{sen} \alpha + Fat_i \cdot \cos \gamma_i \quad (191)$$

$$F_{ri} \cdot \operatorname{sen} \alpha - N_i \cdot \cos \gamma_i = (K \cdot \xi_i + c \cdot \dot{\xi}_i) \cdot \cos \alpha + Fat_i \cdot \operatorname{sen} \gamma_i \quad (192)$$

Somando a Eq. (191). $\cos \gamma_i$ a Eq. (192). $\operatorname{sen} \gamma_i$ resulta o seguinte:

$$F_{ri} \cdot (\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \gamma_i) = (K \cdot \xi_i + c \cdot \dot{\xi}_i) \cdot (-\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \gamma_i) + Fat_i \cdot (\cos^2 \gamma_i + \operatorname{sen}^2 \gamma_i) \quad (193)$$

$$F_{ri} \cdot \cos(\gamma_i - \alpha) = (K \cdot \xi_i + c \cdot \dot{\xi}_i) \cdot \operatorname{sen}(\gamma_i - \alpha) + Fat_i \quad (193a)$$

$$F_{ri} = (K \cdot \xi_i + c \cdot \dot{\xi}_i) \cdot \tan(\gamma_i - \alpha) + \frac{Fat_i}{\cos(\gamma_i - \alpha)} \quad (193b)$$

Substituindo a Eq. (193b) na Eq. (192), resulta em:

$$N_i = Fat_i \cdot \tan(\gamma_i - \alpha) + \frac{(K \cdot \xi_i + c \cdot \dot{\xi}_i)}{\cos(\gamma_i - \alpha)} \quad (194)$$

Portanto, fazendo $i = 1, 2$ nas equações (193b) e (194) é possível calcular as forças de reação interna e a força normal atuando sobre a roda 1 e 2, respectivamente, sendo os seus valores o seguinte:

$$F_{r1} = (K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot \tan(\gamma_1 - \alpha) + \frac{Fat_1}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \quad (195)$$

$$F_{r2} = (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot \tan(\gamma_2 - \alpha) + \frac{Fat_2}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \quad (196)$$

$$N_1 = Fat_1 \cdot \tan(\gamma_1 - \alpha) + \frac{(K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1)}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \quad (197)$$

$$N_2 = Fat_2 \cdot \tan(\gamma_2 - \alpha) + \frac{(K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2)}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \quad (198)$$

Substituindo os valores de F_{r1} e F_{r2} calculados conforme as Equações (195) e (196) e os valores dos deslocamentos das suspensões e de suas taxas de variação no tempo (ξ_i e $\dot{\xi}_i$, para $i=1,2$) dados pelas Equações (180) e (190), respectivamente, nas Equações (174) a (176) acima, resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
m \cdot \ddot{x}_c &= [K \cdot (\xi_1 + \xi_2) + c \cdot (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)] \cdot \text{sen} \alpha \\
&+ \left[(K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot \tan(\gamma_1 - \alpha) + \frac{Fat_1}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} + (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot \tan(\gamma_2 - \alpha) + \frac{Fat_2}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right] \cdot \cos \alpha
\end{aligned} \tag{199}$$

$$\begin{aligned}
m \cdot \ddot{y}_c &= -[K \cdot (\xi_1 + \xi_2) + c \cdot (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)] \cdot \cos \alpha \\
&+ \left[(K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot \tan(\gamma_1 - \alpha) + \frac{Fat_1}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} + (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot \tan(\gamma_2 - \alpha) + \frac{Fat_2}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right] \cdot \text{sen} \alpha - P
\end{aligned} \tag{200}$$

$$\begin{aligned}
I \cdot \ddot{\alpha} &= (K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot L_1 - (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot L_2 + \left[(K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot \tan(\gamma_1 - \alpha) + \frac{Fat_1}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \right] \cdot (h_1 + \xi_1) \\
&+ \left[(K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot \tan(\gamma_2 - \alpha) + \frac{Fat_2}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right] \cdot (h_2 + \xi_2)
\end{aligned} \tag{201}$$

que após manipulação algébrica, resultam nos seguintes valores das acelerações:

$$\begin{aligned}
m \cdot \ddot{x}_c &= (K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot [\text{sen} \alpha + \tan(\gamma_1 - \alpha) \cdot \cos \alpha] \\
&+ (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot [\text{sen} \alpha + \tan(\gamma_2 - \alpha) \cdot \cos \alpha] + Fat_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} + Fat_2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos(\gamma_2 - \alpha)}
\end{aligned} \tag{202}$$

$$\begin{aligned}
m \cdot \ddot{y}_c &= (K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot [-\cos \alpha + \tan(\gamma_1 - \alpha) \cdot \text{sen} \alpha] \\
&+ (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot [-\cos \alpha + \tan(\gamma_2 - \alpha) \cdot \text{sen} \alpha] + Fat_1 \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} + Fat_2 \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} - P
\end{aligned} \tag{203}$$

$$\begin{aligned}
I \cdot \ddot{\alpha} &= (K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1) \cdot [L_1 + \tan(\gamma_1 - \alpha) \cdot (h_1 + \xi_1)] - (K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2) \cdot [L_2 + \tan(\gamma_2 - \alpha) \cdot (h_2 + \xi_2)] \\
&+ Fat_1 \cdot \frac{(h_1 + \xi_1)}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} + Fat_2 \cdot \frac{(h_2 + \xi_2)}{\cos(\gamma_2 - \alpha)}
\end{aligned} \tag{204}$$

Analisando as Equações (202) a (204) pode-se observar que o novo estado do sistema estará condicionado ao perfil do terreno e às forças de atrito atuando entre as rodas e o solo, sendo que estas forças podem ser controladas através do torque aplicado a cada roda. Nota-se que, ao contrário das Equações (103) a (105) para suspensão rígida, as Equações (202) a (204) com suspensão flexível não dependem diretamente das forças normais N_1 e N_2 . No caso de suspensão rígida, as forças normais variavam “instantaneamente” com as alterações das forças de atrito. Na suspensão flexível isso não ocorre, uma vez que variações nas forças de

atrito afetarão primeiramente o estado das suspensões, para então só depois influenciar nas forças normais (quanto mais flexível, mais retardado será o efeito).

Em suma, as equações apresentadas permitem que o modelo do veículo com suspensão flexível seja simulado desde que as forças de atrito (F_{at1} e F_{at2}) sejam especificadas e se conheça o estado atual do veículo e o perfil do terreno.

No próximo capítulo, técnicas de controle de tração serão apresentadas para evitar deslizamento, minimizar o consumo de potência e garantir não descolamento das rodas considerando a suspensão flexível ou rígida.