Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Taygoara Felamingo de Oliveira

Microhidrodinâmica e Reologia de Emulsões

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Francisco Ricardo da Cunha
Orientador: Prof. Paulo Roberto de Souza Mendes

Rio de Janeiro
Agosto de 2007

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Taygoara Felamingo de Oliveira

Microhidrodinâmica e Reologia de Emulsões

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Engenharia Mecânica. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Francisco Ricardo da Cunha
Orientador
Departamento de Engenharia Mecânica — UnB

Prof. Paulo Roberto de Souza Mendes
Orientador
Departamento de Engenharia Mecânica — PUC–Rio

Prof. Paulo Seleghim Júnior
Departamento de Engenharia Mecânica — EESC/USP

Prof. Roney Leon Thompson
Departamento de Engenharia Mecânica — UFF

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Departamento de Engenharia Mecânica — PUC–Rio

Prof. Mônica Feijó Naccache
Departamento de Engenharia Mecânica — PUC–Rio

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 7 de Agosto de 2007

Taygoara Felamingo de Oliveira

Graduou-se em Engenharia Mecânica pelo Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília (ENM—UnB) em Agosto de 2000. Ingressou em seguida no curso de Mestrado em Engenharia Mecânica nesse mesmo departamento, concluindo o curso em Outubro de 2002, com dissertação intitulada *Tratamento Estatístico e Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos.* Atuou como professor e pesquisador do ENM—UnB, estando vinculado ao Grupo de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos — VORTEX.

Ficha Catalográfica

Oliveira, Taygoara Felamingo de

Microhidrodinâmica e Reologia de Emulsões / Taygoara Felamingo de Oliveira; orientadores: Francisco Ricardo da Cunha, Paulo Roberto de Souza Mendes. — 2007.
211 f.: il.; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.
Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Tese. 2. Emulsões. 3. Microhidrodinâmica. 4. Reologia. 5. Métodos Assintóticos. 6. Método Integral de Contorno. I. Cunha, Francisco Ricardo da. II. Mendes, Paulo Roberto de Souza. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

A minha esposa Isabel que é o meu amor, minha companheira, meu presente. A meus filhos Yan e Ana Letícia, que iluminam minha vida e me acenam do futuro. Ao meu pai Dagoberto e minha mãe Ângela, em longa viagem, que ainda me falam pelas lembranças do passado.

Agradecimentos

Ao Professor Aldo João de Sousa, meu mestre e meu sogro, por me acolher em sua casa e permitir que eu não abdicasse da condição de filho, mesmo após a partida de papai.

A Telma Tavares Richa, minha sogra, pelo amor de mãe e por sempre trazer a tona doces lembranças de meu pai.

A Maria Inez Felamingo de Oliveira, minha tia querida, que viabilizou minha vida, estando sempre ao meu lado em todos os momentos que precisei.

Aos meus irmãos Pedro, Giuliana, Thelma e Sílvia, companheiros fiéis, mesmo quando distantes.

Ao professor Francisco Ricardo da Cunha, mestre e amigo, pela orientação dedicada e incansável, pelas aulas magistrais e pelas gargalhadas que demos juntos durante esses sete anos de estrada.

Ao professor Paulo Roberto de Souza Mendes, pela acolhida, pela confiança, pela orientação e por todo o suporte que tive nesta escola magnífica.

Aos professores da PUC–Rio: Márcio da Silveira Carvalho, Solly Andy Segenreich e Ricardo Sá Earp, cujos cursos marcaram especialmente minha formação acadêmica.

Ao professor Antônio Pinho Brasil Júnior, pelo apoio e por fornecer o computador utilizado na redação desta monografia.

Ao professores da UnB: Carlos Alberto Gurgel Veras, Alessadro Borges de Sousa Oliveira e Lúcio Salomon, pelos trabalhos que realizamos juntos, que em diversos aspectos impactaram sobre esta tese.

Aos membros da banca examinadora pelas valiosas contribuições ao trabalho e ao texto da tese.

A Sygifredo e Teresa pela amizade, companheirismo e por tornarem mais branda e agradável minha estada na cidade o Rio de Janeiro.

A minha prima Juçara Ribeiro por me receber em sua casa durante bons meses enquanto estive na cidade do Rio de Janeiro.

A Rodrigo Avelino, velho amigo, com quem dividi muitos fins de semana longe de casa.

A Rodrigo Carrijo, pelo grande senso de humor e por tantas tacadas que demos juntos na mesa de bilhar.

Ao amigo Hugo Couto, com quem travei longas discussões sobre Mecânica dos Fluidos, inclusive sobre o formato da espuma do café expresso que tomávamos, religiosamente todos os dias, naqueles tempos em que éramos vizinhos de sala.

Aos amigos Farith, Gustavo Abade, Marcelo Andreotti, Douglas Machado, Jonas Antônio e Yuri que em algum momento deram valiosas contribuições a este e outros trabalhos realizados durante meu período de doutorado.

A Roseli Marins, pela ajuda sempre eficiente, e sorridente, que me prestou na secretaria do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

Oliveira, Taygoara Felamingo de; Cunha, Francisco Ricardo da; Mendes, Paulo Roberto de Souza. **Microhidrodinâmica e Reologia de Emulsões**. Rio de Janeiro, 2007. 211p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho trata do escoamento na escala das gotas e da Reologia de emulsões diluídas. Técnicas analíticas e numéricas são empregadas na solução do problema. Nas vizinhanças das gotas o escoamento pode ser considerado livre de efeitos de inércia e conseqüentemente as equações governantes são as equações de Stokes. Esse limite é conhecido na literatura como Microhidrodinâmica. O campo de velocidade e de tensão sobre a superfície das gotas é calculado. Um processo de média espacial é realizado em um volume representativo da suspensão tal que a mesma possa ser estudada como um fluido contínuo equivalente. Métodos assintóticos baseados em aproximações de pequenas deformações das gotas são empregados para produzir teorias de primeira e segunda ordens da razão de viscosidade. Uma extensão da teoria para emulsões diluídas polidispersas é desenvolvida. Uma teoria viscoelástica *quasi*-linear é construída para emulsões diluídas de alta razão de viscosidade em cisalhamento oscilatório. Em regimes de grandes deformações utiliza-se o Método Integral de Contorno para determinar-se a forma da gota e o campos de velocidade sobre a mesma. O método é descrito em detalhes, tanto do ponto de vista teórico como de sua implementação numérica. A validação da metodologia numérica é feita utilizando resultados teóricos e experimentais, disponíveis na literatura. A reologia da emulsão é estudada em escoamentos de cisalhamento simples, oscilatório, pura extensão e cisalhamento quadrático (escoamento de Poiseuille). Os resultados numéricos para cisalhamento simples são utilizados para determinar constantes materiais da teoria assintótica de segunda ordem para a tensão. Limites não-lineares de escoamento em regimes de razões de viscosidade moderadas para os cisalhamentos simples, oscilatório e quadrático são estudados.

Palavras–chave

Emulsões. Microhidrodinâmica. Reologia. Métodos Assintóticos. Método Integral de Contorno.

Abstract

Oliveira, Taygoara Felamingo de; Cunha, Francisco Ricardo da; Mendes, Paulo Roberto de Souza. **Microhydrodynamics and Rheology of Emulsions**. Rio de Janeiro, 2007. 211p. PhD Thesis — Department of Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work deals with the flow in the scale of the drops and the Rheology of diluted emulsions. Analytic and numerical techniques are employed in order to solve the problem. In the drop neighborhoods the flow may be considered as free of inertia effects and consequently governed by Stokes equations. In the literature this limit is known as Microhydrodynamics. The flow field and the stress tensor on the drop surface are calculated. A spatial mean process was taken, in a representative suspension volume, in order to study the emulsion as an homogeneous and continuous fluid. Asymptotic methods based in small drop deformation approximation are used to produce first and second orders theories which the parameter is the viscosity ratio. An extension of these theories for polydisperse diluted emulsion is developed. A *quasi*-linear viscoelasticity theory is constructed for diluted emulsion of high viscosity ratios in oscillatory shear flows. In the regimes of large deformations, the velocity and the stress on the particles are evaluated by a numerical procedure based on the Boundary Integral Method for deformable drops. The theoretical and numerical aspects of the Boundary Integral Method are described in details. The code is validated by comparison the numerical results with the experimental data presented in the literature, and also by comparison with the theoretical results of small deformation. The emulsion rheology is studied in simple shear, oscillatory shear, extensional and also in pressure driven flows. The numerical results are used to determine material constants of the stress theory of the second order. Non linear flow regimes of moderate viscosity ratios in simple shear, oscillatory shear and pressure driven flows are also studied.

Keywords

Emulsions. Microhydrodynamics. Rheology. Asymptotic Methods. Boundary Integral Method.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de símbolos

Símbolo	**Definição**
a	Raio da gota não-deformada
$\boldsymbol{A}$	Tensor distorção da gota
B	Menor semi-eixo da gota deformada
$\boldsymbol{B}$	Tensor de forma da gota (Frankel & Acrivos, 1970)
c	Constante analítica do modelo microestrutural de pequenas deformações, $c = 20/19$
c_λ	Parâmetro de seleção da viscosidade característica
C_{r1}, C_{r2}	Parâmetros do processo de relaxação da malha
Ca	Número de capilaridade, $Ca = \dfrac{\dot{\gamma}_c a \mu}{\sigma}$
$Ca_{\langle a \rangle}$	Número de capilaridade baseado no raio médio da gota, $Ca_{\langle a \rangle} = \dfrac{\dot{\gamma}_c \langle a \rangle \mu}{\sigma}$
Ca_ℓ	Número de capilaridade local, $Ca_\ell = Ca_p \, \varrho \left\| \dfrac{du(r)}{dr} \right\|$
Ca_p	Número de capilaridade baseado na velocidade de vazão através do tubo, $Ca_p = \dfrac{\lambda \mu U_c}{\sigma}$
$Ca_{\dot{\varepsilon}}$	Número de capilaridade baseado na taxa de extensão, $Ca = \dfrac{\dot{\varepsilon} a \lambda \mu}{\sigma}$
Ca_λ	Número de capilaridade baseado na viscosidade da gota, $Ca_\lambda = Ca/\lambda$
ds	Comprimento de um arco material após a deformação
ds_o	Comprimento de um arco material no instante de referência (antes da deformação)
$d\boldsymbol{x}$	Arco material de comprimento ds
$d\boldsymbol{x}_o$	Arco material de comprimento ds_o
D	Coeficiente de difusão ordinário, $D = \kappa T/(6\pi\mu a)$
$\boldsymbol{\mathcal{D}}$	Tensor momento de inércia, $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \int_S [\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}) - \hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}] \, dS$
D_1, D_2	Medidas de deformação da gota relacionadas ao tensor distorção
De	Número de Deborah, $De = \tau_{relax}/\tau_{u^\infty}$
D_T	Deformação de Taylor, $D_T = \dfrac{L - B}{L + B}$
e	Elongação normal da gota, $e = \dfrac{ds - ds_o}{ds_o}$
$\boldsymbol{E}$	Tensor taxa de deformação
f	Parâmetro de controle de refinamento da malha
$\boldsymbol{f}$	Força de campo por unidade de volume
$\widehat{f}$	Função f no espaço de Fourier (após a transformada de Fourier)
f_D	Fator de atrito
$\boldsymbol{F}$	Força de arrasto hidrodinâmica; Intensidade de um monopolo

$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	Tensor gradiente de deformação
$\mathfrak{F}\{\ \}$	Transformada de Fourier, $\mathfrak{F}\{f(\boldsymbol{x})\} = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x}$
Fr	Número de Froude, $Fr = U_a^2/(\\|\boldsymbol{g}\\|\, a)$
g	Aceleração da gravidade
$\boldsymbol{g}$	Força de campo por unidade de massa
$\boldsymbol{\mathcal{G}}$	Propagador do distúrbio de velocidade ou tensor de Oseen-Burgers ("stokeslet"), $\boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{I}}{r} + \dfrac{\boldsymbol{rr}}{r^3}$
i	Unidade imaginária, $i = \sqrt{-1}$
$\boldsymbol{I}$	Tensor identidade
$\boldsymbol{I}_D$	Camada potencial dupla, $\boldsymbol{I}_D = \dfrac{1-\lambda}{4\pi(1+\lambda)\mu} \displaystyle\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, dS(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{I}_S$	Camada potencial simples, $\boldsymbol{I}_S = \dfrac{1}{4\pi(1+\lambda)\mu} \displaystyle\int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o) \cdot \Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, dS(\boldsymbol{x})$
k	Magnitude do vetor número de onda
$\boldsymbol{k}$	Vetor número de onda
ℓ	Comprimento característico da escala local da suspensão
L	Comprimento característico da escala macroscópica; Maior semi-eixo da gota deformada
$\boldsymbol{L}$	Dupla camada potencial vista como um operador linear, $\boldsymbol{L} = \dfrac{1}{\beta}\boldsymbol{I}_D$
$\boldsymbol{L}^A$	Operador adjunto de $\boldsymbol{L}$
$\boldsymbol{L}'$	Operador $\boldsymbol{L}$ após a deflação de autovalores
M	Número de espécies de gotas de uma emulsão
$\boldsymbol{M}$	Tensor mobilidade
Ma	Número de Marangoni, $Ma = \dfrac{\mu\, a\dot{\gamma}}{\Delta\sigma}$
n	Número de densidade médio de uma suspensão, $n = N/V$
n_{relax}	Número de iterações do processo de relaxação
$\boldsymbol{n}$	Vetor normal unitário a superfície da gota
$\boldsymbol{n}_e$	Vetor normal unitário a superfície da gota exato
$\boldsymbol{n}_n$	Vetor normal unitário a superfície da gota calculado numericamente
N	Número de partículas contidas em um volume da escala local de uma suspensão
N_1	Primeira diferença de tensões normais, $N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22}$
N_2	Segunda diferença de tensões normais, $N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33}$
N_Δ	Número de elementos (triângulos) da malha
$N_\bullet$	Número de pontos de controle da malha
N_ℓ	Número de arestas da malha
p	Pressão mecânica
$\widehat{p}$	Pressão do espaço de Fourier

p_c	Pressão característica
p_n	Funções harmônicas sólidas associadas à pressão
$p(a)$	Probabilidade incondicional de ocorrência do raio a em uma suspensão
P	Pressão modificada, $P = p + \rho\chi$
$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	Propagador do distúrbio de pressão, $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{r}) = 2\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$
Pe_a	Número de Peclet na escala da gota, $Pe_a = \dfrac{a^2\dot{\gamma}_c}{D}$
$\boldsymbol{r}$	Vetor deslocamento relativo, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o$
$\boldsymbol{R}$	Tensor resistência, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}^{-1}$
Re	Número de Reynolds, $Re = \dfrac{\rho U L}{\mu}$
Re_a	Número de Reynolds na escala da gota, $Re_a = \dfrac{a^2\dot{\gamma}_c}{\nu}$
Re_L	Número de Reynolds na escala macroscópica, $Re_L = Re_a\dfrac{L}{a}$
Re_g	Número de Reynolds interno à gota, $Re_g = Re_a/\lambda$
S^α	Superfície que delimita uma partícula da suspensão
$\boldsymbol{S}_\alpha$	Tensor de Landau-Batchelor de uma suspensão
Sh	Número de Strouhal, $Sh_a = \frac{a\omega_c}{U_a}$
T	Temperatura absoluta
$\boldsymbol{\mathcal{T}}$	Propagador do distúrbio de tensão ("stresslet"), $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{6}{r^5}\boldsymbol{rrr}$
u	Magnitude do vetor velocidade
$\boldsymbol{u}$	Vetor velocidade
$\boldsymbol{u}_{padrão}$	Velocidade calculada sem o procedimento de deflação de autovalores
$\boldsymbol{u}^s$	Velocidade na superfície da gota
$\widehat{\boldsymbol{u}}$	Vetor velocidade no espaço de Fourier
$\boldsymbol{u}^\infty$	Vetor velocidade do escoamento não-perturbado
$\boldsymbol{U}$	Velocidade de translação de um partícula
U_a	Velocidade característica na escala da gota
U_c	Velocidade característica do escoamento
v_i	Volume de uma gota da raio a_i
V	Porção de volume da escala local da suspensão, $V = \ell^3$
V_f	Volume da fase contínua da suspensão
V_α	Volume de uma partícula da suspensão
$\boldsymbol{V}$	Velocidade de translação de corpo rígido
$\boldsymbol{w}$	Vetor velocidade modificado pela deflação de autovalores
$\boldsymbol{w}'$	Projeção de $\boldsymbol{w}$ em um espaço de movimentos de corpo rígido
$\boldsymbol{W}$	Tensor vorticidade
$\boldsymbol{x}_c$	Coordenada do centróide da gota
$\hat{\boldsymbol{x}}$	Posição em relação a $\boldsymbol{x}$, $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c$
α	Auto-valor do operador linear $\boldsymbol{L}$

β	Função racional de λ, $\beta = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$; raio adimensional da gota $\beta = a/\langle a \rangle$
γ_o	Amplitude de deformação do cisalhamento oscilatório
$\dot{\gamma}_c$	Taxa de deformação característica
δ	Comprimento característico da escala interna da suspensão
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)$	Função "Delta de Dirac" singular em $\boldsymbol{x}_o$
ε	Parâmetro pequeno em teorias de pequenas deformações; no estudo do escoamento através de tubos $\varepsilon = (Ca_p \varrho)^2$
$\varepsilon_{\mathbf{n}}$	Erro associado ao cálculo do vetor normal, $\varepsilon_{\mathbf{n}} = max\{\Vert \boldsymbol{n}_n - \boldsymbol{n}_e \Vert / \Vert \boldsymbol{n}_e \Vert\}$
ε_u	Erro associado ao cálculo da velocidade, $\varepsilon_u = max\{\Vert \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})_{padrão} \Vert\}$
ε_κ	Erro associado ao cálculo da curvatura, $\varepsilon_\kappa = max\{\vert\bar{\kappa}_n - \bar{\kappa}_e\vert / \bar{\kappa}_e\}$
ζ	Módulo viscométrico relacionado a resposta de N_1 de uma emulsão em cisalhamento oscilatório
κ	Constante de Stefan-Boltzmann, $1,3806503 \times 10^{-23} J/K$
$\bar{\kappa}$	Curvatura média local, $\bar{\kappa} = (\nabla_s \cdot \boldsymbol{n})/2$
$\bar{\kappa}_e$	Curvatura média local exata
$\bar{\kappa}_n$	Curvatura média local calculada pelo método numérico
λ	Razão de viscosidade, $\lambda = \mu_{gota}/\mu_{ambiente}$
λ_j	Comprimento de onda na direção $\boldsymbol{e}_j$
μ	Viscosidade dinâmica molecular do fluido ambiente
μ_{ap}	Viscosidade aparente da emulsão
μ_B	Viscosidade aparente de uma emulsão diluída em regimes de taxa de cisalhamento infinitas
μ_c	Viscosidade dinâmica característica
μ_E	Viscosidade de Einstein de uma suspensão diluída
μ_T	Viscosidade de Taylor de uma emulsão diluída
ν	Viscosidade cinemática molecular do fluido ambiente, μ/ρ
η	Elongação normal de um arco material; módulo viscométrico relacionado a resposta da viscosidade de uma emulsão em cisalhamento oscilatório
θ	Orientação da gota em relação ao escoamento não-perturbado
$\boldsymbol{\xi}$	Vorticidade, $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{\Pi}$	Velocidade tangencial a superfície da gota usada na relaxação da malha
ρ	Massa específica do fluido ambiente
ρ_p	Massa específica da partícula (ou gota)
ϱ	Razão de aspecto entre o raio da gota e do tubo, $\varrho = \dfrac{a}{R}$
σ	Coeficiente de tensão interfacial
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\boldsymbol{\sigma}^d$	Tensor de tensões adicional devida a presença das partículas

$\boldsymbol{\sigma}^T$	Tensor de tensões transposto
$\boldsymbol{\Sigma}^d$	Parte deviatórica do tensor de tensões
τ_d	Tempo característico de uma mudança na configuração da superfície
τ_s	Tempo característico de redistribuição de tensoativos sobre a superfície da gota
τ_{u^∞}	Tempo característico do escoamento
τ_ξ	Tempo característico de propagação de vorticidade
τ_σ	Tempo característico de relaxação da gota
τ_ω	Tempo característico de rotação da gota
ϕ	Fração volumétrica da emulsão
Φ	Taxa de dissipação de quantidade de movimento, $\Phi = 2\mu\boldsymbol{E} : \boldsymbol{E}$
χ	Potencial escalar associado gravitacional, $\boldsymbol{g} = -\nabla\chi$; módulo viscométrico relacionado a resposta de N_1 de uma emulsão em cisalhamento oscilatório
ψ	Constante positiva associada à magnitude de $\boldsymbol{\Pi}$
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidade angular do escoamento
ω	Freqüência de excitação do escoamento
ω_c	Freqüência característica
Ω	Velocidade angular de rotação de corpo rígido; ângulo sólido
$\Delta\boldsymbol{f}$	Salto de tensões através de uma interface fluida
$\Delta\rho$	Diferença de massa específica, $\Delta\rho = \rho_{gota} - \rho_{ambiente}$
∇_s	Gradiente avaliado sobre uma superfície S, $\nabla_s = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{nn}) \cdot \nabla$
$\langle\ \rangle$	Média volumétrica na escala local. Exemplo: $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V \boldsymbol{\sigma}\, dV$

A perseverança é a mãe da boa sorte.

Miguel de Servantes Saavedra.