

7

Referências Bibliográficas

ADHIKARY, B.B.; MUTSUYOSHI, H; ASHRAF, M. **Effective Shear Strengthening of Concrete Beams Using FRP Sheets with Bonded Anchorage**. 6th International Symposium on Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-6), Singapore, 2003, p.457–466.

ADHIKARY, B.B.; MUTSUYOSHI, H. **Enhancement of Shear Strength for Reinforced Concrete Beams Using Externally Bonded Fiber-Reinforced Polymer Sheet**. Repair, Rehabilitation and Maintenance of Concrete Structures and Innovations in Design and Construction, Proceedings of Fourth International Conference, Seoul, Korea, 2000, p.587–604.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI). COMMITTEE 440. **Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures**. 2001.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM) D3039/D3039M. **Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials**. USA, 2000.

ANG, A.-H.; TANG, W.H. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design – Decision, Risk and Reliability**. Vol.2, John Wiley and Sons, 1984.

APRILE, A.; BENEDETTI, A. **Coupled flexural-shear design of R/C beams strengthened with FRP**. Composites: Part B, Vol.35, 2004, p.1–25.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento: NBR 6118**. Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Ações e Seguranças nas Estruturas – Procedimento: NBR 8681**. Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Concreto – Preparo, Controle e Recebimento: NBR 12655**. Rio de Janeiro, Brasil, 1996.

BEBER, A.J. **Comportamento Estrutural de Vigas de Concreto Armado Reforçadas com Compósitos de Fibra de Carbono**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil, 2003.

BOUSSELHAM, A.; CHAALLAL, O. **Shear Strengthening Reinforced Concrete Beams with Fiber-Reinforced Polymer: Assessment of Influencing Parameters and Required Research**. ACI Structural Journal, Vol.101, N°2, 2004, p.219–227.

CAROLIN, A.; TÄLJSTEN, B. **Experimental Study of Strengthening for Increased Shear Bearing Capacity**. ASCE – Journal of Composites for Construction, Vol.9, N°.6, 2005, p.488–496.

CAROLIN, A. **Carbon Fibre Reinforced Polymers for Strengthening of Structural Elements**. Doctoral Thesis, Luleå University of Technology, 2003.

CHAALLAL, O.; NOLLET, M.J., PERRATON, D. **Shear Strengthening of RC Beams by Externally Bonded Side CFRP Strips**. ASCE – Journal of Composites for Construction, 1998, p.111–113.

CHAALLAL, O.; NOLLET, M.J., PERRATON, D. **Strengthening of Reinforced Concrete Beams with Externally Bonded Fiber-Reinforced-Plastic Plates: Design Guidelines for Shear and Flexure**. Can. J. Civil Eng., Vol.25, 1998, p.692–704.

CHEN, J.F.; TENG, J.G. **Shear Capacity of FRP-Strengthened RC Beams: FRP Debonding**. Construction and Building Materials, Vol.17, 2003a, p.27–41.

CHEN, J.F.; TENG, J.G. **Shear Capacity of FRP-Strengthened RC Beams: FRP Rupture**. Journal of Structural Engineering, Vol.129, N°.5, 2003b, p.615–625.

CHEN, J.F.; TENG, J.G. **A Shear Strength Model for FRP-Strengthened RC Beams**. 5th International Symposium on Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-5), London, 2001, p.205–214.

CHOI, K.K.; YOUN, B.D. **Advances in Reliability-Based Design Optimization and Probability Analysis**. NASA/ICASE Series on Risk-Based Design, Center for Computer-Aided Design, University of Iowa, 2001.

CONCRETE SOCIETY. **Design Guidance for Strengthening Concrete Structures Using Fibre Composite Materials**. Technical Report N°55, 2000.

DENIAUD, C.; CHENG, J.J.R. **Shear Behavior of Reinforced Concrete T-Beams with Externally Bonded Fiber-Reinforced Polymer Sheets**. ACI Structural Journal, Vol.98, 2001, p.386–394.

DIAGANA, C.; LI, A.; GEDALIA, B.; DELMAS, Y. **Shear Strengthening Effectiveness with CFF Strips**. Engineering Structures, Vol.25, 2003, p.507–516.

DINIZ, S.M.C. **A Confiabilidade Estrutural e a Evolução das Normas Técnicas**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, Brasil, 2006, p. 1-16.

DITLEVSEN, O. **Structural Reliability Codes for Probabilistic Design – A Debate Paper based on Elementary Reliability and Decision Analysis Concepts**. Structural Safety, Vol.19, 1997, p.253–270.

EBOLI, C.R.; VAZ, L.E. **Optimization of plane trusses with constraints in the reliability index Beta**. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, 2005.

ELLINGWOOD, B. R. **Reliability-based condition assessment and LRFD for existing structures**. Structural Safety, Vol.18, 1996, p.67–80.

ELLINGWOOD, B.R.; GALAMBOS, T.V.; MACGREGOR, J.C.; CORNELL, C.A. **Development of a Probability Based Load Criteria for American National Standard A58, NBS Special Publication No. 577.** National Bureau of Standards, US Department of Commerce, Washington, DC, 1980.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode: Basis of Structural Design** – EN 1990, Brussels, 2002.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode 2: Design of Concrete Structures** – EN 1992-1-1, Brussels, 2004.

FIB (CEB-FIP). **Externally Bonded FRP Reinforcement for RC Structures.** Bulletin 14, 2001.

GULVANESSIAN, H.; CALGARO, J.-A.; HOLICKÝ, M. **Designers' Guide to EN 1990 Eurocode: Basis of Structural Design.** Thomas Telford, 2002.

HART, G.C. **Uncertainty Analysis, Loads, and Safety in Structural Engineering.** Prentice-Hall, 1982.

HOU, W.; GENE, J. **A Most Probable Point-Based Method for Reliability Analysis, Sensitivity Analysis and Design Optimization.** NASA/CR-2004-213002, University Norfolk, Virginia, 2004.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. **JCSS: Probabilistic Model Code.** Disponível em: <http://www.jcss.ethz.ch>. Acesso em 25 de março de 2005.

KASZYNSKA, M.; LAUMET, P.; NOWAK, A.S. **Material Quality and Reliability of Beams in Flexure and Shear.** 9th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR), Rome, Italy, 2005, p.687–694.

KHALIFA, A.; NANNI, A. **Rehabilitation of Rectangular Simply Supported RC Beams with Shear Deficiencies Using CFRP Composites.** Construction and Building Materials, Vol.16, 2002, p.135–146.

KHALIFA, A.; NANNI, A. **Improving Shear Capacity of Existing RC T-Section Beams Using CFRP Composites.** Cement & Concrete Composites, Vol.22, N°2, 2000, p.165–174.

KHALIFA, A.; BELARBI, A.; NANNI, A. **Shear Performance of RC Members Strengthened with Externally Bonded FRP Wraps**. 12th World Conference on Earthquake Engineering, New Zealand, 2000, p.305–314.

KHALIFA, A.; LORENZIS, L. **FRP Composites for Shear Strengthening of RC Beams**. 3rd Inter. Conf. on Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, Canada, 2000, p.137–144.

KHALIFA, A.; TUMIALAN, G.; NANNI, A.; BELARBI, A. **Shear Strengthening of Continuous RC Beams Using Externally Bonded CFRP Sheets**. SP-188, American Concrete Institute, 4th International Symposium on Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-4), Baltimore, USA, 1999, p.995–1008.

KHALIFA, A.; GOLD, W.J.; NANNI, A.; AZIZ, M.I.A. **Contribution of Externally Bonded FRP to Shear Capacity of Flexural Members**. ASCE – Journal of Composites for Construction, Vol.2, N°4, 1998, p.195–203.

KLING, D.V. **Um Método para Simulação de Redes de Atividades Não-Deterministas com Recursos Escassos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

LEMAIRE, M. **Reliability and Mechanical Design**. Reliability Engineering and System Safety, Vol.55, 1997, p.163–170.

LIMA, E.C.P.; SAGRILO, L.V.S. **Confiabilidade Estrutural – COPPE/UFRJ**. Notas de Aula, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.

LOPES, M.T.A. **Reforço à Força Cortante em Vigas de Concreto Estrutural através da Colagem de Compósitos de Fibra de Carbono**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil, 2002.

LOPES, M.T.A.; BARBOSA, P. **Regiões de Dimensionamento para o Esforço Cortante Considerando os Novos Conceitos da Revisão da NBR 6118**. V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, Brasil, 2002.

LOPES, M.T.A.; EBOLI, C.R.; VELASCO, M.S.L.; VAZ, L.E. **Confiabilidade à Força Cortante de Seções Transversais de Vigas de Concreto Armado Reforçadas com Compósitos de Fibras de Carbono**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, Brasil, 2006, p. 897-913.

LOPES, M.T.A.; VELASCO, M.S.L.. **Estudo Teórico-Experimental do Reforço à Força Cortante de Vigas de Concreto Armado Utilizando Compósitos de Fibras de Carbono**. XXXII Jornadas Sul-americanas de Engenharia Estrutural, 2006, Campinas, Brasil.

LU, R.; LUO, Y.; CONTE, J.P. **Reliability Evaluation of Reinforced Concrete Beams**. Structural Safety, Vol.14, 1994, p.277–298.

OpenSees. Disponível em: <http://www.opensees.berkeley.edu>. Acesso em 20 de abril de 2005.

MacGREGOR, J.G. **Reinforced Concrete – Mechanics and Design**. Prentice Hall, 1988.

MACHADO, E.R.; FREITAS, M.S.R.; DINIZ, S.M.C. **Avaliação da Confiabilidade de Estruturas em Concreto Armado**. XXI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, Brasil, 2000.

MASTER BUILDERS TECHNOLOGIES. **Catálogo eletrônico de produtos**. Disponível em: <http://www.degussa-cc.com.br>. Acesso em 15 de março de 2004.

MASTER BUILDERS TECHNOLOGIES. **Fabricante de produtos para reforço com materiais compósitos**. Disponível em: <http://www.mbrace.com>. Acesso em 15 de março de 2004.

MADSEN, H.O., S. KRENK & N.C. LIND. **Methods of Structural Safety**. Prentice-Hall, 1986.

MELCHERS, R.E. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. John Wiley & Sons, 2002.

NEVES, R.A. **Desenvolvimento de Modelos Mecânico-Probabilísticos para Estruturas de Pavimentos de Edifícios**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Paulo, Brasil, 2004.

NOGUEIRA, C.G. **Um Modelo de Confiabilidade e Otimização Aplicado às Estruturas de Barras de Concreto Armado**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Paulo, Brasil, 2005.

NOWAK, A.S.; COLLINS, K.R. **Reliability of structures**. McGraw Hill Higher Education, 2000.

PLEVRIS, N.; TRIANTAFILLOU, T.C.; VENEZIANO, D. **Reliability of RC Members Strengthened with CFRP Laminates**. ASCE – Journal of Structural Engineering, Vol.121, N°7, 1995, p.1037–1044.

REAL, M.V.; FILHO,A.C. **Análise Probabilística de Estruturas de Concreto Armado**. Teoria e Prática na Engenharia Civil, N°1, 2000, p.37–46.

REAL, M.V.; FILHO,A.C.; PALIGA, C.M. **Estudo da Variabilidade da Resposta Estrutural de Vigas de Concreto Armado Reforçadas com Laminados de Fibra de Carbono**. IBRACON - 46° Congresso Brasileiro do Concreto, Vol.6, 2004, p.759–773.

RELIABILITY CONSULTING PROGRAMS (RCP GmbH). **COMREL & SYSREL Users Manual – DEMO Version**. 1998.

SAGRILO, L.V.S. **Confiabilidade Estrutural – COPPE/UFRJ**, Notas de Aula, Rio de Janeiro, 2004.

SANTOS, S.H.C.; EBOLI, C.R. **Avaliação da Confiabilidade Estrutural com base nas Normas NBR-6118 e NBR-8681**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, Brasil, 2006, p. 502-517.

SANTOS, S.H.C.; EBOLI, C.R. **Análise de um Pórtico de Concreto Armado Utilizando os Conceitos de Confiabilidade Estrutural**. IBRACON - 46° Congresso Brasileiro do Concreto, Vol.6, 2004, p.142–155.

SCHNEIDER, J. **Introduction to Safety and Reliability of Structures**. International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE), 1997.

SØRENSEN, J.D. **Structural Reliability Theory**. 2004. Disponível em: <http://www.civil.auc.dk/~i6cfrier/ls/>. Acesso em 10 de maio de 2006.

TÄLJSTEN, B. **Strengthening Concrete Beams for Shear with CFRP Sheets**. Construction and Building Materials, Vol.17, 2003, p.15–26.

TENG, J.G.; CHEN, J.F.; SMITH, S.T.; LAM, L. **FRP – Strengthened RC Structures**. Wiley, Great Britain, 2002, p. 103–134.

TRIANAFILLOU, T.C.; ANTONOPOULOS, P. **Design of concrete structures strengthened in shear with CFRP**. ASCE – Journal of Composites for Construction, 2000, p.198–205.

TRIANAFILLOU, T. C. **Shear Strengthening of Reinforced Concrete Beams Using Epoxy-Bonded FRP Composites**. ACI Structural Journal, Vol.95, N°2, 1998, p.107–115.

VAL, D.; BLJUGER, F.; YANKELEVSKY, D. **Reliability Evaluation in Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures**. Structural Safety, Vol.19, 1997, p.203–217.

VROUWENVELDER, T. **The JCSS Probabilistic Model Code**. Structural Safety, Vol.19, 1997, p.245–251.

Anexo A

Rotinas para se Obter a Parcela da Força Cortante Resistida pelo FRP

A.1. Introdução

Neste anexo são apresentadas rotinas teóricas, utilizadas para comparação teórico-experimental, e rotinas de cálculo, utilizadas para dimensionamento. As duas rotinas foram implementadas em MathCad e utilizadas no Capítulo 2. Nos itens, a seguir, onde é fornecido apenas uma rotina adota-se para comparação teórico-experimental $\gamma_f = 1$ e $f'_c = f_c$.

A.2. Rotinas elaboradas segundo TRIANTAFILLOU e ANTONOPOULOS (2000)

A.2.1. Rotina Teórica

$$\begin{aligned}
 E_{fG} &\leftarrow \frac{E_f}{\text{GPa}} \\
 \rho_f &\leftarrow \frac{2t_f w_f}{b_w s_f} \\
 \varepsilon_{fe_r} &\leftarrow 0.17 \left[\frac{3\sqrt{f_{cm}^2}}{E_{fG} \rho_f} \right]^{0.30} \varepsilon_{fu} \\
 \varepsilon_{fe_b} &\leftarrow 0.65 \left[\frac{3\sqrt{f_{cm}^2}}{E_{fG} \rho_f} \right]^{0.56} 10^{-3} \\
 V_{f_Triantafillou} &:= \begin{cases} \varepsilon_{fe_r} & \text{if execução} = "W" \\ \min(\varepsilon_{fe_r}, \varepsilon_{fe_b}) & \text{otherwise} \end{cases} \\
 f_{fe} &\leftarrow \varepsilon_{fe} E_f \\
 V_f &\leftarrow 0.9 \varepsilon_{fe} E_f \rho_f b_w d (1 + \cot \beta) \sin \beta \\
 \text{Ruptura} &\leftarrow \begin{cases} \text{"Ruptura do reforço"} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_r} \\ \text{"Descolamento"} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_b} \end{cases} \\
 &\left(\begin{array}{c} \text{Ruptura} \\ \varepsilon_{fe} \\ f_{fe} \\ V_f \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Legenda do tipo de execução:

- W – se envolvimento completo da seção transversal da viga;
- U – se envolvimento em forma de U;
- S – se colado apenas nos lados da viga.

Quando o envolvimento é executado em forma de U com adição de um sistema de ancoragem, legenda UA, é considerado para utilização das rotinas o tipo de execução W.

A.2.2. Rotina de Cálculo

$$\begin{aligned}
 E_{fG} &\leftarrow \frac{E_f}{\text{GPa}} \\
 \rho_f &\leftarrow \frac{2t_f w_f}{b_w s_f} \\
 \varepsilon_{fe_r} &\leftarrow 0.17 \left[\frac{\sqrt[3]{f_{cm}^2}}{E_{fG} \rho_f} \right]^{0.30} \varepsilon_{fu} \\
 \varepsilon_{fe_b} &\leftarrow 0.65 \left[\frac{\sqrt[3]{f_{cm}^2}}{E_{fG} \rho_f} \right]^{0.56} 10^{-3} \\
 \varepsilon_{fe} &\leftarrow \begin{cases} \varepsilon_{fe_r} & \text{if execução} = \text{"W"} \\ \min(\varepsilon_{fe_r}, \varepsilon_{fe_b}) & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \varepsilon_{fke} &\leftarrow \min(\alpha \varepsilon_{fe}, \varepsilon_{\max}) \\
 \gamma_f &\leftarrow \begin{cases} \gamma_{ff} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_r} \\ \gamma_{fb} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_b} \\ \gamma_{fl} & \text{if } \varepsilon_{fke} = \varepsilon_{\max} \end{cases} \\
 f_{fe} &\leftarrow \varepsilon_{fe} E_f \\
 V_{fd} &\leftarrow 0.9 \frac{\varepsilon_{fke}}{\gamma_f} E_f \rho_f b_w d (1 + \cot \beta) \sin \beta \\
 V_{fde} &\leftarrow \begin{cases} V_{fd} & \text{if } V_{fd} \leq V_{Rd,\max} - (V_{cd} + V_{swd}) \\ V_{Rd,\max} - (V_{cd} + V_{swd}) & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{Ruptura} &\leftarrow \begin{cases} \text{"Ruptura do reforço"} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_r} \\ \text{"Descolamento"} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_b} \\ \text{"Defomação excessiva"} & \text{if } \varepsilon_{fke} = \varepsilon_{\max} \\ \text{"Esmagamento"} & \text{if } V_{fde} = V_{Rd,\max} - (V_{cd} + V_{swd}) \end{cases} \\
 \left(\begin{array}{l} \text{Ruptura} \\ \varepsilon_{fe} \\ f_{fe} \\ V_{fd} \\ V_{fde} \end{array} \right) & \\
 \end{aligned}$$

$$\text{Verificações} := \begin{pmatrix} \text{Rigidez_axial} \\ s_f \end{pmatrix}$$

$$\text{Rigidez_axial} \leftarrow \begin{cases} \text{"OK"} & \text{if } E_{fG} \rho_f \leq 0.018 \sqrt[3]{f_{cm}^2} \\ \text{"acima do limite"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$s_f \leftarrow \begin{cases} \text{"OK"} & \text{if } s_f = w_f \\ \text{"OK"} & \text{if } s_f \neq w_f \\ & \text{"OK"} \text{ if } s_f \leq 0.8d \\ & \text{"acima do limite"} \text{ otherwise} \end{cases}$$

A.3. Rotina elaborada segundo KHALIFA e NANNI (2002)

$$V_{fd_khalifa} := \begin{pmatrix} E_{fG} \\ \rho_f \\ d_f \\ L_e \\ w_{fe} \\ A_f \\ R_r \\ R_b \\ R_l \\ R \\ f_{fe} \\ \varepsilon_{fe} \\ V_{fd} \\ V_{fde} \\ \text{Ruptura} \\ \varepsilon_{fe} \\ f_{fe} \\ V_{fd} \\ V_{fde} \end{pmatrix}$$

$$E_{fG} \leftarrow \frac{E_f}{\text{GPa}}$$

$$\rho_f \leftarrow \frac{2t_f w_f}{b_w s_f}$$

$$d_f \leftarrow \begin{cases} d & \text{if } t_s = 0 \\ d - t_s & \text{if } t_s \neq 0 \end{cases}$$

$$L_e \leftarrow 75 \text{ mm}$$

$$w_{fe} \leftarrow \begin{cases} w_f & \text{if execução} = \text{"W"} \\ d_f - L_e & \text{if execução} = \text{"U"} \\ d_f - 2L_e & \text{if execução} = \text{"S"} \end{cases}$$

$$A_f \leftarrow 2t_f w_f$$

$$R_r \leftarrow \begin{cases} 0.5622 (\rho_f E_{fG})^2 - 1.2188 (\rho_f E_{fG}) + 0.778 & \text{if } \rho_f E_{fG} \leq 0.7 \text{ GPa} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$R_b \leftarrow \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{f_c^2} w_{fe}}{\varepsilon_{fu} d_f} \{ [738.93 - 4.06 (t_f E_{fG})] 10^{-6} \} & \text{if } 20 \text{ mm GPa} \leq t_f E_{fG} \leq 90 \text{ mm GPa} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$R_l \leftarrow 0.006 / \varepsilon_{fu}$$

$$R \leftarrow \begin{cases} \min(R_r, R_l) & \text{if execução} = \text{"W"} \\ \min(R_r, R_b, R_l) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{fe} \leftarrow R f_f$$

$$\varepsilon_{fe} \leftarrow f_{fe} / E_f$$

$$V_{fd} \leftarrow \frac{f_{fe} A_f 0.9 d_f (1 + \cot \beta) \sin \beta}{\gamma_f s_f}$$

$$V_{fde} \leftarrow \begin{cases} V_{fd} & \text{if } V_{fd} \leq V_{Rd,max} - (V_{cd} + V_{swd}) \\ V_{Rd,max} - (V_{cd} + V_{swd}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Ruptura} \leftarrow \begin{cases} \text{"Ruptura do reforço"} & \text{if } R = R_r \\ \text{"Descolamento"} & \text{if } R = R_b \\ \text{"Deformação excessiva"} & \text{if } R = R_l \\ \text{"Esmagamento"} & \text{if } V_{fde} = V_{Rd,max} - (V_{cd} + V_{swd}) \end{cases}$$

$$\text{Verificação} := \left(\begin{array}{l} s_f \leftarrow \begin{cases} \text{"OK"} \text{ if } s_f = w_f \\ \text{if } s_f \neq w_f \\ \text{"OK"} \text{ if } s_f \leq w_f + d / 4 \\ \text{"acima do limite"} \text{ otherwise} \end{cases} \\ (s_f) \end{array} \right.$$

sendo:

$$V_{Rd,max} = 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} 0,9d b_w \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot \theta^2} \quad (\text{A.1})$$

$$V_{cd} = 0,18 k^3 \sqrt{100 \rho_l f_{ck}} b_w d \quad (\text{A.2})$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 \quad (\text{A.3})$$

$$\rho_l = \frac{A_s}{b_w d} \leq 0,02 \quad (\text{A.4})$$

$$V_{swd} = \frac{A_{sw}}{s} f_{ywd} 0,9d (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha \quad (\text{A.5})$$

A.4. Rotina elaborada segundo ADHIKARY et alii (2003)

$$V_f_Adhikary := \left(\begin{array}{l} E_{fG} \leftarrow \frac{E_f}{\text{GPa}} \\ \rho_f \leftarrow \frac{2t_f w_f}{b_w s_f} \\ \varepsilon_{fe1} \leftarrow \begin{cases} \frac{0.038 \sqrt[3]{f'_c}}{\sqrt{\rho_f E_{fG}}} \varepsilon_{fu} \text{ if } 0.25 \text{ GPa} < \rho_f E_{fM} \leq 1.0 \text{ GPa} \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \\ \varepsilon_{fe2} \leftarrow \begin{cases} \frac{0.043 \sqrt[3]{f'_c}^2}{\sqrt{\rho_f E_{fG}}} \ln \left(100 \frac{l_a}{b_w} \right) \varepsilon_{fu} \text{ if } 0 < \frac{l_a}{b_w} \leq 0.5 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \\ \varepsilon_{fe} \leftarrow \begin{cases} \varepsilon_{fe1} + \varepsilon_{fe2} \text{ if execução} = \text{"W"} \\ \varepsilon_{fe1} \text{ otherwise} \end{cases} \\ f_{fe} \leftarrow \varepsilon_{fe} E_f \\ V_f \leftarrow \varepsilon_{fe} E_f \rho_f b_w d (1 + \cot \beta) \sin \beta \\ \text{Ruptura} \leftarrow \begin{cases} \text{"Ruptura do reforço"} \text{ if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe1} + \varepsilon_{fe2} \\ \text{"Descolamento"} \text{ if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe1} \end{cases} \\ \left(\begin{array}{l} \text{Ruptura} \\ \varepsilon_{fe} \\ f_{fe} \\ V_f \end{array} \right) \end{array} \right.$$

A.5. Rotinas elaboradas segundo CHEN e TENG (2003 a, b)

A.5.1. Rotina Teórica

$$\begin{aligned}
 & z_t \leftarrow d_{ft} \\
 & z_b \leftarrow 0.9d - h + d_{fb} \\
 & h_{fe} \leftarrow z_b - z_t \\
 & s_{fe} \leftarrow \begin{cases} s_f & \text{if } s_f \neq w_f \\ \frac{w_f}{\sin \beta} & \text{if } s_f = w_f \end{cases} \\
 & rws \leftarrow \frac{w_f}{s_{fe} \sin \beta} \\
 & L_e \leftarrow \sqrt{\frac{E_f t_f}{\sqrt{f'_c}}} \\
 & L_{max} \leftarrow \begin{cases} \frac{h_{fe}}{\sin \beta} & \text{if execução = "U"} \\ \frac{h_{fe}}{2 \sin \beta} & \text{if execução = "S"} \end{cases} \\
 & \lambda \leftarrow \frac{L_{max}}{L_e} \\
 & \beta_L \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \geq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi \lambda}{2}\right) & \text{if } \lambda < 1 \end{cases} \\
 & \beta_w \leftarrow \sqrt{\frac{2 - rws}{1 + rws}} \\
 & \sigma_{fmax_r} \leftarrow f_f \\
 & \sigma_{fmax_b} \leftarrow 0.427 \beta_w \beta_L \sqrt{\frac{E_f}{t_f} \sqrt{f'_c}} \\
 & \sigma_{fmax} \leftarrow \begin{cases} \sigma_{fmax_r} & \text{if execução = "W"} \\ \min(\sigma_{fmax_r}, \sigma_{fmax_b}) & \text{otherwise} \end{cases} \\
 & D_f \leftarrow \begin{cases} \text{if } \sigma_{fmax} = \sigma_{fmax_r} \\ \zeta \leftarrow \frac{z_t}{z_b} \\ \frac{1 + \zeta}{2} \\ \text{if } \sigma_{fmax} = \sigma_{fmax_b} \\ \frac{2}{\pi \lambda} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi \lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi \lambda}{2}\right)} & \text{if } \lambda \leq 1 \\ 1 - \frac{\pi - 2}{\pi \lambda} & \text{if } \lambda > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$V_f_Chen :=$

$$V_f_Chen := \left(\begin{array}{l} f_e \leftarrow D_f \sigma_{fmax} \\ \varepsilon_{fe} \leftarrow \frac{f_{fe}}{E_f} \\ V_f \leftarrow 2f_{fe} t_f rws h_{fe} (\cot \theta + \cot \beta) \sin \beta^2 \\ \text{Ruptura} \leftarrow \begin{cases} \text{"Ruptura do reforço"} & \text{if } \sigma_{fmax} = \sigma_{fmax_r} \\ \text{"Descolamento"} & \text{if } \sigma_{fmax} = \sigma_{fmax_b} \end{cases} \\ \left(\begin{array}{l} \text{Ruptura} \\ \varepsilon_{fe} \\ f_{fe} \\ V_f \end{array} \right) \end{array} \right)$$

A.5.2. Rotina de Cálculo

$$V_{fd_Chen} := \left(\begin{array}{l} z_t \leftarrow d_{ft} \\ z_b \leftarrow 0.9d - h + d_{fb} \\ h_{fe} \leftarrow z_b - z_t \\ s_{fe} \leftarrow \begin{cases} s_f & \text{if } s_f \neq w_f \\ \frac{w_f}{\sin \beta} & \text{if } s_f = w_f \end{cases} \\ rws \leftarrow \frac{w_f}{s_{fe} \sin \beta} \\ L_e \leftarrow \sqrt{\frac{E_f t_f}{f'_c}} \\ L_{max} \leftarrow \begin{cases} \frac{h_{fe}}{\sin \beta} & \text{if execução = "U"} \\ \frac{h_{fe}}{2 \sin \beta} & \text{if execução = "S"} \end{cases} \\ \lambda \leftarrow \frac{L_{max}}{L_e} \\ \beta_L \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \geq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi \lambda}{2}\right) & \text{if } \lambda < 1 \end{cases} \\ \beta_w \leftarrow \sqrt{\frac{2 - rws}{1 + rws}} \\ \sigma_{fmax_r} \leftarrow \begin{cases} 0.8 \frac{f_f}{\gamma_{ff}} & \text{if } \frac{f_f}{E_f} \leq \varepsilon_{fu} \\ 0.8 \frac{\varepsilon_{fu} E_f}{\gamma_{ff}} & \text{if } \frac{f_f}{E_f} > \varepsilon_{fu} \end{cases} \\ \sigma_{fmax_b} \leftarrow \frac{0.315}{\gamma_{fb}} \beta_w \beta_L \sqrt{\frac{E_f}{t_f} f'_c} \\ \sigma_{fmax} \leftarrow \begin{cases} \sigma_{fmax_r} & \text{if execução = "W"} \\ \min(\sigma_{fmax_r}, \sigma_{fmax_b}) & \text{otherwise} \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 V_{fd_Chen} := & \left(\begin{array}{l}
 \text{if } \sigma_{fmax} = \sigma_{fmax_r} \\
 \left| \begin{array}{l}
 \zeta \leftarrow \frac{z_t}{z_b} \\
 \frac{1 + \zeta}{2} \\
 \text{if } \sigma_{fmax} = \sigma_{fmax_r} \\
 \frac{2}{\pi \lambda} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \lambda\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \lambda\right)} \text{ if } \lambda \leq 1 \\
 1 - \frac{\pi - 2}{\pi \lambda} \text{ if } \lambda > 1
 \end{array} \right. \\
 D_f \leftarrow \\
 f_{fe} \leftarrow D_f \sigma_{fmax} \\
 \varepsilon_{fe} \leftarrow \frac{f_{fe}}{E_f} \\
 V_{fd} \leftarrow 2 f_{fe} t_f rws h_{fe} (\cot \theta + \cot \beta) \sin \beta^2 \\
 \text{Ruptura} \leftarrow \left(\begin{array}{l}
 \text{"Ruptura do reforço"} \text{ if } \sigma_{fmax} = \sigma_{fmax_r} \\
 \text{"Descolamento"} \text{ if } \sigma_{fmax} = \sigma_{fmax_b}
 \end{array} \right) \\
 \left(\begin{array}{l}
 \text{Ruptura} \\
 \varepsilon_{fe} \\
 f_{fe} \\
 V_{fd}
 \end{array} \right)
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Verificação} := & \left(\begin{array}{l}
 s_f \leftarrow \left(\begin{array}{l}
 \text{"OK"} \text{ if } s_f = w_f \\
 \text{if } s_f \neq w_f \\
 \left| \begin{array}{l}
 \text{"OK"} \text{ if } s_f \leq \frac{h_{fe} (\sin \beta + \cos \beta)}{2} \\
 \text{"acima do limite"} \text{ otherwise}
 \end{array} \right. \\
 \text{"OK"} \text{ if } s_f = w_f \\
 \text{if } s_f \neq w_f \\
 \left| \begin{array}{l}
 \text{"OK"} \text{ if } s_f \leq \frac{h_{fe} (\sin \beta + \cos \beta)}{2} \\
 \text{"acima do limite"} \text{ otherwise}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right) \\
 (s_f)
 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

A.6. Rotina elaborada segundo o Bulletin 14 da fib (2001)

$$\begin{array}{l}
 E_{fG} \leftarrow \frac{E_f}{\text{GPa}} \\
 \rho_f \leftarrow \frac{2t_f w_f}{b_w s_f} \\
 \varepsilon_{fe_r} \leftarrow 0.17 \left[\frac{\sqrt[3]{f_{cm}^2}}{E_{fG} \rho_f} \right]^{0.30} \varepsilon_{fu} \\
 \varepsilon_{fe_b} \leftarrow 0.65 \left[\frac{\sqrt[3]{f_{cm}^2}}{E_{fG} \rho_f} \right]^{0.56} 10^{-3} \\
 \varepsilon_{fe} \leftarrow \begin{cases} \varepsilon_{fe_r} & \text{if execução} = "W" \\ \min(\varepsilon_{fe_r}, \varepsilon_{fe_b}) & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \gamma_f \leftarrow \begin{cases} \gamma_{ff} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_r} \\ \gamma_{fb} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_b} \end{cases} \\
 \varepsilon_{fke} \leftarrow k \varepsilon_{fe} \\
 V_{fd_fib} := \varepsilon_{fde} \leftarrow \frac{\varepsilon_{fke}}{\gamma_f} \\
 f_{fe} \leftarrow \varepsilon_{fe} E_f \\
 V_{fd} \leftarrow 0.9 \varepsilon_{fde} E_f \rho_f b_w d (1 + \cot \beta) \sin \beta \\
 V_{fde} \leftarrow \begin{cases} V_{fd} & \text{if } V_{fd} \leq V_{Rd,max} - (V_{cd} + V_{swd}) \\ V_{Rd,max} - (V_{cd} + V_{swd}) & \text{otherwise} \end{cases} \\
 Ruptura \leftarrow \begin{cases} "Ruptura do reforço" & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_r} \\ "Descolamento" & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_b} \\ "Esmagamento" & \text{if } V_{fde} = V_{Rd,max} - (V_{cd} + V_{swd}) \end{cases} \\
 \left(\begin{array}{l} \text{Ruptura} \\ \varepsilon_{fe} \\ \varepsilon_{fde} \\ f_{fe} \\ V_{fd} \\ V_{fde} \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Vefiricação} := s_f \leftarrow \begin{cases} "OK" & \text{if } s_f = w_f \\ \text{if } s_f \neq w_f \\ \text{if } t_s = 0 \\ \quad "OK" & \text{if } s_f \leq 0.9d - \frac{w_f}{2} \\ \quad "acima do limite" & \text{otherwise} \\ \text{if } t_s \neq 0 \\ \quad "OK" & \text{if } s_f \leq 0.9d - \frac{w_f}{2} \\ \quad "acima do limite" & \text{otherwise} \end{cases} \\
 (s_f)
 \end{array}$$

A.7. Rotina elaborada segundo o ACI 440 (2001)

$$\begin{aligned}
 A_f &\leftarrow 2t_f w_f \\
 L_e &\leftarrow \frac{23300}{(t_f E_f)^{0.58}} \\
 k_1 &\leftarrow 3 \sqrt{\left(\frac{f'_c}{27}\right)^2} \\
 k_2 &\leftarrow \begin{cases} \frac{d_f - L_e}{d_f} & \text{if execução = "U"} \\ \frac{d_f - 2L_e}{d_f} & \text{if execução = "S"} \end{cases} \\
 k_{vv} &\leftarrow \frac{k_1 k_2 L_e}{11900 \varepsilon_{fu}} \\
 k_v &\leftarrow \begin{cases} k_{vv} & \text{if } k_{vv} \leq 0.75 \\ 0.75 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \varepsilon_{fe_r} &\leftarrow \begin{cases} 0.004 & \text{if } 0.004 \leq 0.75 \varepsilon_{fu} \\ 0.75 \varepsilon_{fu} & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \varepsilon_{fe_b} &\leftarrow \begin{cases} k_v \varepsilon_{fu} & \text{if } k_v \varepsilon_{fu} \leq 0.004 \\ 0.004 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \varepsilon_{fe} &\leftarrow \begin{cases} \varepsilon_{fe_r} & \text{if execução = "W"} \\ \varepsilon_{fe_b} & \text{otherwise} \end{cases} \\
 f_{fe} &\leftarrow \varepsilon_{fe} E_f \\
 V_f &\leftarrow A_f \varepsilon_{fe} E_f (\sin \beta + \cos \beta) \frac{d_f}{s_f} \\
 V_{fe} &\leftarrow \begin{cases} V_f & \text{if } V_f \leq 0.66 \sqrt{f'_c} b_w d - V_{sw} \\ 0.66 \sqrt{f'_c} b_w d - V_{sw} & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \phi V_f &\leftarrow \psi_f V_{fe} \\
 \text{Ruptura} &\leftarrow \begin{cases} \text{"Ruptura do reforço"} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_r} \\ \text{"Descolamento"} & \text{if } \varepsilon_{fe} = \varepsilon_{fe_b} \\ \text{"Esmagamento"} & \text{if } V_{fe} = 0.66 \sqrt{f'_c} b_w d - V_{sw} \end{cases} \\
 \left(\begin{array}{l} \text{Ruptura} \\ \varepsilon_{fe} \\ f_{fe} \\ V_f \\ \phi V_f \end{array} \right) & \\
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Verificação} &:= \left(s_f \leftarrow \begin{cases} \text{"OK"} & \text{if } s_f = w_f \\ \text{"OK"} & \text{if } s_f \leq w_f + d/4 \\ \text{"acima do limite"} & \text{otherwise} \end{cases} \right) \\
 (s_f) & \\
 \end{aligned}$$

Anexo B

Revisão Bibliográfica dos Programas Experimentais

B.1. Introdução

Neste anexo são apresentadas as revisões bibliográficas dos programas experimentais, encontrados na literatura, de vigas reforçadas à força cortante com a utilização de CFRP.

B.2. Programa Experimental de CHAALLAL et alii (1998)

Este programa consistiu de oito vigas de concreto armado bi-apoiadas de seção transversal retangular.

Os parâmetros variáveis neste ensaio foram:

- *Taxa geométrica da armadura transversal*, por meio da utilização de diferentes espaçamentos dos estribos;
- *Configuração do reforço*, quanto sua continuidade e orientação das fibras principais.

As vigas foram agrupadas em três séries. As duas vigas da primeira série, designada de FS, estavam adequadamente armadas à força cortante, não necessitando de reforço. As demais séries, US e RS, continham a mesma armadura transversal, sendo esta deficiente. As duas vigas de série US não receberam reforço, utilizadas como vigas de referência, enquanto que as quatro vigas da série RS foram reforçadas com uma determinada quantidade de CFRP para se obter a mesma resistência à força cortante encontrada nas vigas da série FS.

As vigas da série RS foram divididas em dois grupos, designados de RS90 e RS135, com duas vigas em cada grupo. Estas foram agrupadas de acordo com o valor de β e s_f adotados.

A lâmina de compósito de fibras de carbono utilizada como reforço foi fornecida pela SIKA Inc.

O carregamento aplicado foi de forma concentrada em dois pontos nos terços do vão.

O ganho de capacidade resistente à força cortante das vigas reforçadas variou de 64% a 87%, e os autores deste programa concluíram que:

- O reforço colado nos lados da viga com $\beta = 45^\circ$ apresenta melhor desempenho, em termos de propagação de fissuras, rigidez e resistência à força cortante. Entretanto, a adoção deste tipo de reforço pode levar ao colapso prematura da viga devido ao descolamento do reforço.

B.3. Programa Experimental de KHALIFA et alii (1999)

Este programa foi composto de nove vigas contínuas (com dois vãos), de concreto armado, todas com seção transversal retangular.

Os parâmetros variáveis neste ensaio foram:

- *Resistência à compressão do concreto;*
- *Taxa de armadura longitudinal e taxa de armadura transversal;*
- *Configuração do reforço*, incluindo: quanto ao seu envolvimento; sua continuidade e a orientação das fibras principais.

As vigas foram agrupadas em três séries, denominadas de CW, CO e CF, de acordo com as taxas das armaduras internas, sendo longitudinal ou transversal. A série CW foi composta de duas vigas e eram as únicas que continham estribos no comprimento de interesse para o ensaio. A série CO continha três vigas com armadura longitudinal igual à existente nas vigas da série anterior. A série CF foi composta de quatro vigas com taxa de armadura longitudinal diferente das demais vigas.

As vigas CW1, CO1 e CF1 não receberam reforço e o carregamento foi executado em dois pontos por cargas concentradas aplicadas no meio de cada vão.

Para estas vigas ensaiadas o ganho de capacidade resistente à força cortante variou de 22% a 135%. Todas as vigas reforçadas da série CF romperam por flexão. Os autores deste programa concluíram que:

- O reforço com CFRP pode ser utilizado para aumentar a capacidade resistente à força cortante de vigas tanto em regiões de momento positivo quanto em regiões de momento negativo;
- A contribuição do CFRP à força cortante é maior para vigas que não contêm armadura transversal do que para as que contêm.

B.4. Programa Experimental de KHALIFA e NANNI (2000)

Estes autores ensaiaram seis vigas de concreto armado de seção transversal T.

O parâmetro variável neste ensaio foi:

- *Configuração do reforço*, quanto ao seu envolvimento, incluindo a adição de um sistema de ancoragem do CFRP em uma viga; quanto a sua continuidade e quanto à orientação das fibras principais.

Cada viga foi reforçada com uma configuração de reforço diferente, conforme especificado na Tabela C.1, com exceção da viga BT1 que não recebeu reforço, servindo como viga de referência. As vigas foram bi-apoiadas e receberam o carregamento em dois pontos.

Foi utilizado para o reforço o tecido unidirecional de fibras de carbono Wabo®MBrace CF-130 (Master Builders Technologies, Inc).

O ganho de capacidade resistente à força cortante para estas vigas variou de 35% a 145%, e os autores deste programa concluíram que:

- A eficiência do reforço com CFRP colado externamente pode ser significativamente aumentada se for efetuado um adequado sistema de ancoragem;
- O sistema de ancoragem utilizado é recomendado;
- Se a ruptura por descolamento do CFRP não é prevenida, onde a quantidade de reforço é ótima, aumentá-la pode não significar aumento de resistência, assim, a aplicação de estribos de CFRP pode ser tão eficiente quanto a aplicação do reforço de forma contínua;
- Nenhuma contribuição foi observada para acréscimo de resistência devido à utilização de uma segunda camada de CFRP com $\beta = 0^\circ$.

B.5. Programa Experimental de KHALIFA e NANNI (2002)

Estes autores ensaiaram 12 vigas de concreto armado bi-apoiadas de seção transversal retangular.

Os parâmetros variáveis neste ensaio foram:

- *Relação a/d* (onde a é a distância do ponto de aplicação da carga concentrada ao meio do apoio);
- *Resistência à compressão do concreto*;
- *Existência de armadura transversal de aço*;
- *Configuração do reforço*, incluindo: quanto ao seu envolvimento; sua

continuidade e a orientação das fibras principais.

As vigas foram agrupadas em duas séries principais, designadas de SW e SO dependendo da presença de armadura transversal ou não. A série SW foi composta de quatro vigas, metade com relação $a/d = 3$, nomeadas de SW3, e metade com $a/d = 4$, nomeadas de SW4. Nesta série as vigas continham estribos. A série SO continha oito vigas, cinco com relação $a/d = 3$, designadas de SO3 e três com $a/d = 4$, chamadas de SO4. Nesta série as vigas não continham estribos, no trecho ensaiado.

A primeira viga de cada grupo não recebeu reforço, servindo como viga de referência. O carregamento das vigas foi em dois pontos.

O tecido de fibras de carbono unidirecional utilizado no reforço foi o Wabo®MBrace CF-130 (Master Builder Technologies, Inc).

Para estas vigas ensaiadas o ganho de capacidade resistente à força cortante variou de 40% a 138%, e os autores deste programa concluíram que:

- A contribuição do CFRP à força cortante é influenciada pela relação a/d , e parece aumentar com o aumento desta relação;
- Acréscimo na quantidade de CFRP pode não resultar em proporcional aumento de resistência à força cortante;
- A adição de uma segunda camada de reforço com $\beta = 0^\circ$ aumenta a capacidade resistente à força cortante devido à restrição horizontal provocada por ela.

B.6. Programa Experimental de DENIAUD e CHENG (2001)

Neste programa, quatro vigas de concreto armado de seção transversal T, bi-apoiadas, com o carregamento aplicado em dois pontos equidistantes foram ensaiadas. Os dois trechos da viga que continham força cortante foram ensaiados separadamente, então, no total, foram realizados oito testes.

Os parâmetros variáveis neste ensaio foram:

- *Tipo de FRP utilizado;*
- *Existência de armadura transversal de aço, assim como o espaçamento utilizado entre esta armadura;*
- *Configuração do reforço, quanto à orientação das fibras principais.*

Três tipos de tecidos foram utilizados nos reforços das vigas: tecidos de fibras de carbono uniaxial (Replark 20 – Mitsubishi); tecidos de fibras de vidro uniaxial e tecidos de fibras de vidro triaxial. Em todos os casos, o reforço foi

estendido por baixo da mesa da seção transversal da viga, a fim de proporcionar uma ancoragem.

Como em cada viga foram feitos dois testes, um para cada trecho que continha força cortante, reforçou-se com estribos externos o trecho que não seria testado no momento.

Os testes foram agrupados em três séries, apenas na primeira série as vigas não continham armadura transversal interna, na segunda e terceira séries o espaçamento entre essas armadura eram $s = 400 \text{ mm}$ e $s = 200 \text{ mm}$ respectivamente. A primeira viga de cada série não recebeu reforço.

As quatro barras longitudinais que constituíam a armadura de tração (barras de alta resistência – Dywidag) foram estendidas 150 mm a partir dos extremos da viga e ancoradas em chapas metálicas de 50 mm de espessura.

A viga reforçada com CFRP, T6S2-C90, rompeu repentinamente quando o reforço descolou, para uma carga menor do que a carga da viga de referência. A partir de uma inspeção na viga observou-se que na região da fissura formada devido à força cortante os estribos internos estavam rompidos. Estes estribos alcançaram a tensão de escoamento antes do descolamento do reforço aplicado nesta região. Os autores deste programa acreditam que no instante que o reforço descolou a energia liberada para os estribos internos foi tão elevada que a viga escorregou ao longo da fissura, ocasionando a ruptura dos estribos internos.

O ganho de capacidade resistente à força cortante das vigas reforçadas variou de 45% a 94%. A viga T6S2-C90 foi descartada pela razão exposta acima. Os autores deste programa concluíram que:

- A efetividade do FRP é menor quando as vigas são armadas internamente à força cortante;
- Seções planas não permanecem planas no trecho da força cortante depois que um certo nível de carga é alcançado, mas a presença do FRP colado externamente retarda a perda do comportamento de seção plana.

B.7. Programa Experimental de ADHIKARY et alii (2003)

Estes autores ensaiaram nove vigas de concreto armado com seção transversal quadrada, em quatro vigas o reforço foi executado com compósito de fibras de aramida.

O parâmetro variável neste programa foi:

- *Configuração do reforço*, quanto ao seu envolvimento e comprimento de

ancoragem.

A viga designada de B-1 não recebeu reforço, e as quatro vigas da série VC receberam reforço de compósito de fibras de carbono. As arestas vivas das vigas foram arredondadas de 100mm de diâmetro.

O carregamento foi aplicado em dois pontos e as vigas eram simplesmente apoiadas, sem armadura transversal.

O ganho de capacidade resistente à força cortante das vigas reforçadas variou de 47% a 123%, e os autores deste programa concluíram que:

- O reforço executado com ancoragem adequada é muito mais eficiente que o reforço executado apenas envolvendo em forma de U a seção transversal da viga. A adição da ancoragem pode ser uma maneira eficiente de retardar ou até mesmo evitar o descolamento do mesmo.

B.8. Programa Experimental de BEBER (2003)

Este programa foi composto de 44 vigas de concreto armado, com seção transversal retangular, 14 vigas foram reforçadas à flexão e 30 à força cortante com a utilização de CFRP.

Os parâmetros variáveis neste ensaio foram:

- *Configuração do reforço*, quanto ao seu envolvimento, sua continuidade e orientação das fibras principais;
- *Material utilizado para o reforço*, foram empregados dois tipos de materiais diferentes. Em quatro vigas foi utilizado o compósito pré-fabricado, laminado (CFK 200/2000 – S&P Reinforcements – MBrace), no restante das vigas aplicou-se o sistema curado in situ, tecido unidirecional (Replark 20 – Mitsubishi). Isto variou as propriedades do reforço.

As vigas V8_A e V8_B não receberam reforço e serviram como vigas de referência, as demais 28 vigas foram separadas em 12 grupos de acordo com as diferentes configurações de reforço utilizadas.

Nas vigas V10_A, V10_B, V17_A, V19_A e V19_B o reforço foi executado envolvendo a seção transversal da viga em forma de “L”. Para avaliação teórica deste tipo de execução do reforço (em “L”) o autor considerou a mesma formulação utilizada quando o reforço é executado envolvendo em forma de “U” a seção transversal da viga.

O carregamento foi aplicado de forma concentrada em dois pontos eqüidistantes, sendo a viga bi-apoiada. Não foi utilizada armadura transversal de aço.

O ganho de capacidade resistente à força cortante das vigas reforçadas variou de 61% a 255%, e o autor deste programa concluiu que:

- O descolamento do reforço caracterizou-se como o modo de colapso da viga mais freqüente. As vigas que tiveram o reforço executado envolvendo completamente sua seção transversal (ancoragem suficiente) entraram em colapso devido à ruptura do CFRP. Existiram situações intermediárias, em que houve uma combinação destes dois modos de colapso;
- No caso particular das vigas reforçadas com faixas orientadas à 45°, a solução de ancoragem tipo “L” representou uma alternativa eficiente na elevação da resistência, porém, a execução destes reforços demonstrou ser bastante complexa;
- Os reforços contínuos necessitaram maiores quantidades de reforço e não proporcionaram incrementos de resistência na mesma proporção;
- O desempenho das vigas reforçadas com os laminados foi limitado, o único tipo de execução do reforço possível é colando-o somente nas laterais da viga, assim o modo de colapso da viga foi controlado pelo descolamento do reforço.

B.9. Programa Experimental de DIAGANA et alii (2003)

Neste programa foram ensaiadas dez vigas de concreto armado, com seção transversal retangular.

O parâmetro variável neste ensaio foi:

- *Configuração do reforço*, quanto ao seu envolvimento, sua continuidade e orientação das fibras principais.

O tecido de fibras de carbono utilizado no reforço foi o TFC® da Freyssinet, bi-direcional, com 70% das fibras na direção principal (utilizada no teste) e 30% na outra direção.

As vigas foram agrupadas em duas séries, a primeira foi chamada de PU, onde o reforço foi executado envolvendo em forma de U a seção transversal da viga, e a segunda série foi designada de PC devido ao envolvimento completo da seção transversal pelo reforço. Duas vigas não foram reforçadas (P_0 e P_{0-bis}).

O carregamento foi aplicado em um ponto, sendo as vigas simplesmente apoiadas.

O ganho de capacidade resistente à força cortante das vigas reforçadas variou de 18% a 61%, e os autores deste programa concluíram que:

- A efetividade do reforço varia em função do tipo de envolvimento, espaçamento e orientação do mesmo, a configuração que apresentou melhor resultado foi a da viga PC₁, onde o reforço foi executado envolvendo completamente a seção transversal da viga, com o menor espaçamento e $\beta = 90^\circ$;
- O envolvimento completo da seção transversal da viga pelo reforço proporciona maior ganho de capacidade resistente para vigas com $\beta = 90^\circ$, percebendo-se a importância do comprimento de ancoragem para a efetividade do reforço;
- Para o caso de $\beta = 45^\circ$ foi observado que o envolvimento da seção transversal em forma de U é mais eficiente, pois utilizando o envolvimento completo tem-se o aparecimento de uma flexão local que provoca uma sobrecarga nos bordos do reforço na região de compressão da viga.

B.10. Programa Experimental de CAROLIN e TÄLJSTEN (2005)

Estes autores ensaiaram 20 vigas de concreto armado, com seção transversal retangular. Quatro vigas foram ensaiadas em duas etapas, a primeira etapa sem reforço, servindo como viga de referência, e a segunda etapa reforçada com CFRP, proporcionando a realização de ensaio em viga pré-fissurada.

O sistema utilizado para reforço à força cortante foi o BPE® Composite de fibras de carbono unidirecionais.

As vigas foram divididas em dois tipos, o Tipo A foi designado para vigas que não receberam armadura transversal e o Tipo B foi composto de vigas que continham armadura transversal de aço. As vigas do Tipo B receberam um reforço à flexão adicional para assegurar que a ruptura ocorresse por algum mecanismo relacionado à força cortante.

Os parâmetros variáveis neste ensaio foram:

- *Existência de armadura transversal de aço;*
- *Configuração do reforço*, incluindo: quanto ao seu envolvimento e a orientação das fibras principais;

- *Tipo de aplicação de carga*, podendo ser carga cíclica ou não, assim como, aplicação do reforço em viga pré-fissurada ou não.

A resistência à compressão do concreto não foi considerada como parâmetro variável, no entanto, variou de $f_c = 36,8MPa$ a $f_c = 56,8MPa$. Todas as vigas foram levadas à ruptura a partir de um carregamento controlado pela deformação.

A designação das vigas foi dada da seguinte forma: o primeiro número significa o peso do compósito, sendo 1, 2 e 3 para $125 g / m^2$, $200 g / m^2$ e $300 g / m^2$ respectivamente; o segundo número denomina o ângulo de inclinação das fibras principais do reforço; as letras maiúsculas descrevem o diferencial contido na viga ensaiada, sendo: W para envolvimento completo do reforço, R para viga pré-fissurada e F para viga carregada ciclicamente depois de executado o reforço; a letra minúscula representa a primeira ou segunda viga ensaiadas de mesma espécie.

A viga nomeada de R2 passou a se chamar 245Ra depois de reforçada, assim como a viga R3 passou a ser 245Rb, a R4 passou a ser 245RF e a viga R5 passou a se chamar 290WR depois de receber o reforço.

A viga 290W rompeu por flexão, então as vigas 290WR e 245W foram reforçadas à flexão com a utilização de lâmina de CFRP calada em todo o comprimento do lado tracionado das vigas. Esta lâmina apresentavam as seguintes propriedades: $f_f > 2800MPa$, $E_f = 210GPa$ e $\varepsilon_{fu} > 1,3\%$.

O carregamento foi aplicado em dois pontos equidistantes, sendo as vigas simplesmente apoiadas. As vigas 145F, 245F, 245RF e 345F foram submetidas a 10^6 ciclos de carga antes da carga de ruptura, este carregamento foi aplicado por dez dias com uma frequência de $1,2 H_z$.

Para estas vigas ensaiadas o ganho de capacidade resistente à força cortante das vigas reforçadas variou de 26% a 225%, e os autores deste programa concluíram que:

- As vigas de concreto armado reforçadas podem ter o seu modo de ruptura modificado devido a algum mecanismo relacionado à força cortante para ruptura devido à flexão;
- Devido à anisotropia dos CFRP a efetividade do reforço depende de escolher corretamente a orientação das fibras principais do mesmo em relação à fissura de cortante, o esquema de reforço com $\beta = 0^\circ$ não contribui significativamente para a capacidade resistente, e o pequeno

aumento apresentado parece ser decorrente do aumento na parcela do concreto V_c ;

- Vigas pré-fissuradas podem ser reforçadas, e apresentam ganho em sua capacidade resistente;
- Para vigas que contêm armadura transversal e necessitam de elevado efeito do reforço à força cortante é preciso executar um reforço à flexão;
- Para as vigas que não foram pré-fissuradas, as fibras do compósito não se deformam até que seja alcançada a carga de fissuração da viga de referência, para as demais vigas as fibras são deformadas desde o início do ensaio. As fibras do compósito das extremidades da seção transversal das vigas completamente envolvidas pelo reforço não se deformam até que o reforço descole. Para todos os casos as fibras do compósito que mais se deformam são as posicionadas no meio da altura da viga.

Anexo C

Parâmetros Utilizados nos Programas Experimentais

C.1. Introdução

Neste anexo é apresentada uma tabela contendo os dados geométricos das vigas de concreto armado, dos reforços com compósito de fibras de carbono e as propriedades dos materiais (concreto, aço e CFRP) utilizados nos diversos programas experimentais relatados no Anexo B.

Os dados contidos nesta tabela foram utilizados nos cálculos da parcela da força cortante resistida pelo FRP V_f (rotinas apresentadas no Anexo A).

C.2. Parâmetros Geométricos e Mecânicos dos Programas Experimentais

O valor da altura efetiva do FRP não foi fornecido, pois obtém-se através dos valores de d , d_{ft} e d_{fb} , conforme mostra a Figura C.1.

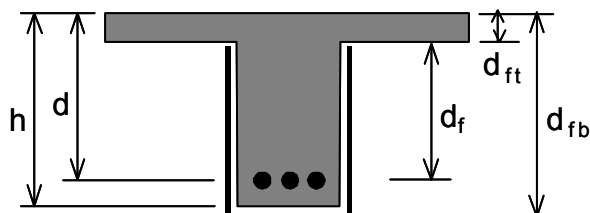


Figura C.1 – Altura efetiva do FRP.

As legendas dos modos de ruptura observados experimentalmente são:

- EB – esmagamento das bielas;
- TD – tração diagonal;
- R – ruptura do reforço;
- D – descolamento do reforço;
- DR – descolamento e ruptura do reforço ocorrendo ao mesmo tempo;
- D+R – descolamento do reforço seguido de sua ruptura;
- F – Flexão.

As vigas dos programas experimentais reforçadas com AFRP ou GFRP não foram incluídas nesta tabela.

Tabela C.1 – Parâmetros Geométricos e Mecânicos dos Programas Experimentais.

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	I_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
CH (FS1)	150	220	2,5	R	35	3x15	6@ 50	400	400	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	EB	110,0	*
CH (FS2)	150	220	2,5	R	35	3x15	6@ 50	400	400	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	EB	108,0	*
CH (US1)	150	220	2,5	R	35	3x15	6@ 200	400	400	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	55,0	*
CH (US2)	150	220	2,5	R	35	3x15	6@ 200	400	400	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	51,5	*
CH (RS90-1)	150	220	2,5	R	35	3x15	6@ 200	400	400	200	0	250	1,000	50	100	2400	150	90	0	S	R	87,5	0,67
CH (RS90-2)	150	220	2,5	R	35	3x15	6@ 200	400	400	200	0	250	1,000	50	100	2400	150	90	0	S	D	95,0	0,67
CH (RS135-1)	150	220	2,5	R	35	3x15	6@ 200	400	400	200	0	250	1,000	50	150	2400	150	45	0	S	D	94,0	0,44
CH (RS135-2)	150	220	2,5	R	35	3x15	6@ 200	400	400	200	0	250	1,000	50	150	2400	150	45	0	S	D	99,5	0,44
KH1 (CW1)	150	254	3,6	R	27,5	2x32	10@ 125	460	350	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	175,0	*
KH1 (CW2)	150	254	3,6	R	27,5	2x32	10@ 125	460	350	200	0	305	0,165	915	915	3500	228	90 / 0	0	U / S	EB	214,0	NU
KH1 (CO1)	150	254	3,6	R	20,5	2x32	*	460	350	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	EB	48,0	*
KH1 (CO2)	150	254	3,6	R	20,5	2x32	*	460	350	200	0	305	0,165	50	125	3500	228	90	0	U	D	88,0	0,09
KH1 (CO3)	150	254	3,6	R	20,5	2x32	*	460	350	200	0	305	0,165	915	915	3500	228	90	0	U	D	113,0	0,22

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	l_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
KH1 (CF1)	150	254	3,6	R	27,5	2x16	*	430	350	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	EB	93,0	*
KH1 (CF2)	150	254	3,6	R	27,5	2x16	*	430	350	200	0	305	0,165	915	915	3500	228	90	0	U	F	119,5	NU
KH1 (CF3)	150	254	3,6	R	27,5	2x16	*	430	350	200	0	305	0,165	915	915	3500	228	90 / 0	0	U / S	F	131,0	NU
KH1 (CF4)	150	254	3,6	R	27,5	2x16	*	430	350	200	0	305	0,165	915	915	3500	228	90	75	W	F	140,0	NU
KH2 (BT1)	150	354	3	T	35	2x28	*	470	*	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	EB	90,0	*
KH2 (BT2)	150	354	3	T	35	2x28	*	470	*	200	100	405	0,165	1070	1070	3790	228	90	0	U	D	155,0	0,22
KH2 (BT3)	150	354	3	T	35	2x28	*	470	*	200	100	405	0,165	1070	1070	3790	228	90 / 0	0	U / S	D	157,5	NU
KH2 (BT4)	150	354	3	T	35	2x28	*	470	*	200	100	405	0,165	50	125	3790	228	90	0	U	D	162,5	0,09
KH2 (BT5)	150	354	3	T	35	2x28	*	470	*	200	100	405	0,165	50	125	3790	228	90	0	S	D	121,5	0,09
KH2 (BT6)	150	354	3	T	35	2x28	*	470	*	200	100	405	0,165	1070	1070	3790	228	90	50	UA	F	221,0	NU
KH3 (SW3-1)	150	254	3	R	19,3	2x32	10@ 125	460	350	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	126,5	*
KH3 (SW3-2)	150	254	3	R	19,3	2x32	10@ 125	460	350	200	0	305	0,165	760	760	3790	228	90 / 0	0	U / S	EB	177,0	NU
KH3 (SW4-1)	150	254	4	R	19,3	2x32	10@ 125	460	350	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	100,0	*

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	l_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
KH3 (SW4-2)	150	254	4	R	19,3	2x32	10@ 125	460	350	200	0	305	0,165	1020	1020	3790	228	90 / 0	0	U / S	EB	180,5	NU
KH3 (SO3-1)	150	254	3	R	27,5	2x32	*	460	*	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	77,0	*
KH3 (SO3-2)	150	254	3	R	27,5	2x32	*	460	*	200	0	305	0,165	50	125	3790	228	90	0	U	D	131,0	0,09
KH3 (SO3-3)	150	254	3	R	27,5	2x32	*	460	*	200	0	305	0,165	75	125	3790	228	90	0	U	D	133,5	0,13
KH3 (SO3-4)	150	254	3	R	27,5	2x32	*	460	*	200	0	305	0,165	760	760	3790	228	90	0	U	D	144,5	0,22
KH3 (SO3-5)	150	254	3	R	27,5	2x32	*	460	*	200	0	305	0,165	760	760	3790	228	90 / 0	0	U / S	EB	169,5	NU
KH3 (SO4-1)	150	254	4	R	27,5	2x32	*	460	*	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	65,0	*
KH3 (SO4-2)	150	254	4	R	27,5	2x32	*	460	*	200	0	305	0,165	50	125	3790	228	90	0	U	D	127,5	0,09
KH3 (SO4-3)	150	254	4	R	27,5	2x32	*	460	*	200	0	305	0,165	1020	1020	3790	228	90	0	U	EB	155,0	NU
DE (T6NS)	140	540	2,9	T	44,1	4x26	*	NF	520	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	110,1	*
DE (T6NS -C45)	140	540	2,9	T	44,1	4x26	*	NF	520	200	150	600	0,11	50	100	3400	230	45	0	U	D	213,6	0,08
DE (T6S4)	140	540	2,9	T	44,1	4x26	6@ 400	NF	520	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	187,6	NU
DE (T6S4 -C90)	140	540	2,9	T	44,1	4x26	6@ 400	NF	520	200	150	600	0,11	50	100	3400	230	90	0	U	D	272,8	0,08

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	l_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
DE (T6S2)	140	540	2,9	T	44,1	4x26	6@ 200	NF	520	200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	356,9	*
DE T6S2- C90)	140	540	2,9	T	44,1	4x26	6@ 200	NF	520	200	150	600	0,11	50	100	3400	230	90	0	U	D	309,8	NU
AD (B-1)	300	245	4	Q	38	4x32	*	395	*	196	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	112,0	*
AD (C-1)	300	245	4	Q	37,2	4x32	*	395	*	196	50	300	0,167	1000	1000	3400	230	90	0	U	D	165,0	0,11
AD (C-2)	300	245	4	Q	41	4x32	*	395	*	196	0	300	0,167	1000	1000	3400	230	90	80	UA	EB	228,5	NU
AD (C-3)	300	245	4	Q	41,1	4x32	*	395	*	196	0	300	0,167	1000	1000	3400	230	90	110	UA	EB	237,5	NU
AD (C-4)	300	245	4	Q	42,4	4x32	*	395	*	196	0	300	0,167	1000	1000	3400	230	90	150	W	F	250,0	NU
BE (V8_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	57,35	*
BE (V8_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	56,49	*
BE (V9_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	S	D	98,1	0,07
BE (V9_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	S	D	104,3	0,07
BE (V21_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	S	D	115,2	0,07
BE (V10_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	L	DR	107,5	NU

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	I_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
BE (V10_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	L	DR	106,0	NU
BE (V17_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	L	DR	102,8	NU
BE (V11_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	U	DR	98,4	0,07
BE (V11_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	U	DR	124,8	0,07
BE (V17_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	0	U	DR	92,9	0,07
BE (V12_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	75	W	R	116,4	0,07
BE (V18_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	75	W	R	127,3	0,07
BE (V20_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	100	3400	230	90	75	W	R	140,1	0,07
BE (V12_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	141,4	3400	230	45	0	S	D	101,6	0,05
BE (V14_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	141,4	3400	230	45	0	S	D	91,6	0,05
BE (V19_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	141,4	3400	230	45	0	L	DR	118,4	NU
BE (V19_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	50	141,4	3400	230	45	0	L	DR	115,1	NU
BE (V13_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	655	655	3400	230	90	0	S	D	122,0	0,15

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	I_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
BE (V13_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	655	655	3400	230	90	0	S	D	125,7	0,15
BE (V15_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	655	655	3400	230	90	0	U	D	138,4	0,15
BE (V16_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	655	655	3400	230	90	0	U	D	112,4	0,15
BE (V16_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	655	655	3400	230	90	75	W	F	183,9	NU
BE (V18_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	655	655	3400	230	90	75	W	F	202,4	NU
BE (V14_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	655	655	3400	230	45	0	S	D	128,4	0,15
BE (V15_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	0,111	655	655	3400	230	45	0	S	D	120,6	0,15
BE (V20_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	1,4	50	100	2500	205	90	0	S	D	142,9	0,93
BE (V22_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	1,4	50	100	2500	205	90	0	S	D	112,5	0,93
BE (V21_B)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	1,4	50	141,4	2500	205	45	0	S	D	135,7	0,66
BE (V22_A)	150	253	2,9	R	32,8	6x16	*	625	*	NF	0	300	1,4	50	141,4	2500	205	45	0	S	D	125,6	0,66
DI1 (P0)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	110,0	*
DI (PO-bis)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	110,0	*
DI (PU1)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	0	450	0,43	40	200	1400	105	90	0	U	D	142,5	0,13

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	I_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
DI (PU2)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	0	450	0,43	40	250	1400	105	90	0	U	D	130	0,11
DI (PU3)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	0	450	0,43	40	300	1400	105	45	0	U	D	154,5	0,09
DI (PU4)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	0	450	0,43	40	350	1400	105	45	0	U	D	150,0	0,08
DI (PC1)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	0	450	0,43	40	200	1400	105	90	65	W	R	177,5	0,13
DI (PC2)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	0	450	0,43	40	250	1400	105	90	65	W	R	155,0	0,11
DI (PC3)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	0	450	0,43	40	300	1400	105	45	65	W	R	145,5	0,09
DI (PC4)	130	410	2,2	R	40	2x16 2x14	6@ 300	550	240	210	0	450	0,43	40	350	1400	105	45	65	W	R	132,0	0,08
CA (R1)	180	460	2,7	R	52	12x16	*	515	515	210	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	126,0	*
CA (R2)	180	460	2,7	R	53,6	12x16	*	515	515	210	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	124,0	*
CA (R3)	180	460	2,7	R	37,6	12x16	*	515	515	210	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	103,0	*
CA (R4)	180	460	2,7	R	42,4	12x16	*	515	515	210	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	119,0	*
CA (R5)	180	460	2,7	R	36,8	12x16	*	515	515	210	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	TD	125,0	*
CA (145)	180	460	2,7	R	53,6	12x16	*	515	515	210	0	500	0,07	1250	1250	4500	234	45	0	S	R	247,0	0,08

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	I_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
CA (145F)	180	460	2,7	R	39,2	12x16	*	515	515	210	0	500	0,07	1250	1250	4500	234	45	0	S	R	338,0	NU
CA (20)	180	460	2,7	R	47,2	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	0	0	S	TD	154,0	NU
CA (245a)	180	460	2,7	R	56,8	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	45	0	S	DR	257,0	0,12
CA (245b)	180	460	2,7	R	42,4	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	45	0	S	DR	305,0	0,12
CA (245W)	180	460	2,7	R	36,8	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	45	90	W	D+R	338,0	0,12
CA (245F)	180	460	2,7	R	39,2	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	45	0	S	DR	319,0	NU
CA (245Ra)	180	460	2,7	R	53,6	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	45	0	S	DR	306,0	0,12
CA (245Rb)	180	460	2,7	R	37,6	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	45	0	S	DR	251,0	0,12
CA (245RF)	180	460	2,7	R	42,4	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	45	0	S	DR	291,0	NU
CA (290a)	180	460	2,7	R	47,2	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	90	0	S	D	256,0	0,12
CA (290b)	180	460	2,7	R	41,6	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	90	0	S	D	298,0	0,12
CA (290W)	180	460	2,7	R	41,6	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	90	90	W	F	367,0	NU
CA (290WR)	180	460	2,7	R	36,8	12x16	*	515	515	210	0	500	0,11	1250	1250	4500	234	90	90	W	D+R	388,0	0,12

Viga	b_w mm	d mm	$\frac{a}{d}$	Seção	f_c MPa	A_s	A_{sw}	f_y MPa	f_{yw} MPa	E_s GPa	d_{ft} mm	d_{fb} mm	t_f mm	w_f mm	s_f mm	f_f MPa	E_f GPa	β °	l_a mm	Execução	Ruptura	V_{exp} kN	ρ_f %
CA (345)	180	460	2,7	R	56,8	12x16	*	515	515	210	0	500	0,17	1250	1250	4500	234	45	0	S	D	334,0	0,19
CA (345F)	180	460	2,7	R	43,2	12x16	*	515	515	210	0	500	0,17	1250	1250	4500	234	45	0	S	D	344,0	NU
CA (R)	180	460	2,2	R	36	12x16	6@ 200	515	515	210	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	EB	237,0	*
CA (290)	180	460	2,2	R	36,8	12x16	6@ 200	515	515	210	0	500	0,11	1000	1000	4500	234	90	0	S	D	298,0	0,12
CA (390)	180	460	2,2	R	36,8	12x16	6@ 200	515	515	210	0	500	0,17	1000	1000	4500	234	90	0	S	D	298,0	0,19

Legendas de “Viga”, de acordo com o programa experimental que ela pertence: **CH(...)** – CHAALLAL et alii (1998); **KH1(...)** – KHALIFA e NANNI (1999); **KH2(...)** – KHALIFA e NANNI (2000); **KH3(...)** – KHALIFA e NANNI (2002); **DE(...)** – DENIAUD e CHENG (2001); **AD(...)** – ADHIKARY et alii (2003); **BE(...)** – BEBER (2003); **DI(...)** – DIAGANA et alii (2003); **CA(...)** – CAROLIN e TÄLJSTEN (2005).

Demais legendas: NF – dado não fornecido no programa experimental, NU – viga não utilizada na comparação teórico-experimental.

Anexo D

Resumo sobre Teoria da Probabilidade

D.1. Introdução

Neste anexo são apresentados, em linhas gerais, alguns conceitos de teoria da probabilidade.

D.2. Função Densidade de Probabilidades (PDF) e Função de Distribuição Cumulativa (CDF)

A função densidade de probabilidades é uma função matemática contínua que tem como objetivo descrever os resultados obtidos em experimentos aleatórios, ou seja, representar estatisticamente este experimento.

Assumindo que uma determinada variável aleatória X tenha um valor x e adotando um intervalo de $\left(x - \frac{dx}{2}\right)$ até $\left(x + \frac{dx}{2}\right)$, a probabilidade dos resultados dos experimentos ficarem contidos neste intervalo é $f_X(x) dx$, onde $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidades. A probabilidade da variável X assumir valores, por exemplo, entre a e b é obtida por:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (D.1)$$

Para que uma função matemática $f_X(x)$ seja considerada uma PDF (Figura D.1a) as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$f_X(x) \geq 0 \quad (D.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (D.3)$$

$$\int_a^b f_X(x) dx = P(a \leq X \leq b) \quad (D.4)$$

A função de distribuição cumulativa é definida como a integral da função densidade de probabilidades:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \quad (D.5)$$

onde $F_X(a)$ representa a probabilidade da variável aleatória X assumir valores menores ou iguais a a . Uma CDF (Figura D.1b) deve satisfazer as seguintes condições:

$$F_X(-\infty) = 0 \quad (D.6)$$

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (D.7)$$

$$F_X(\infty) = 1 \quad (D.8)$$

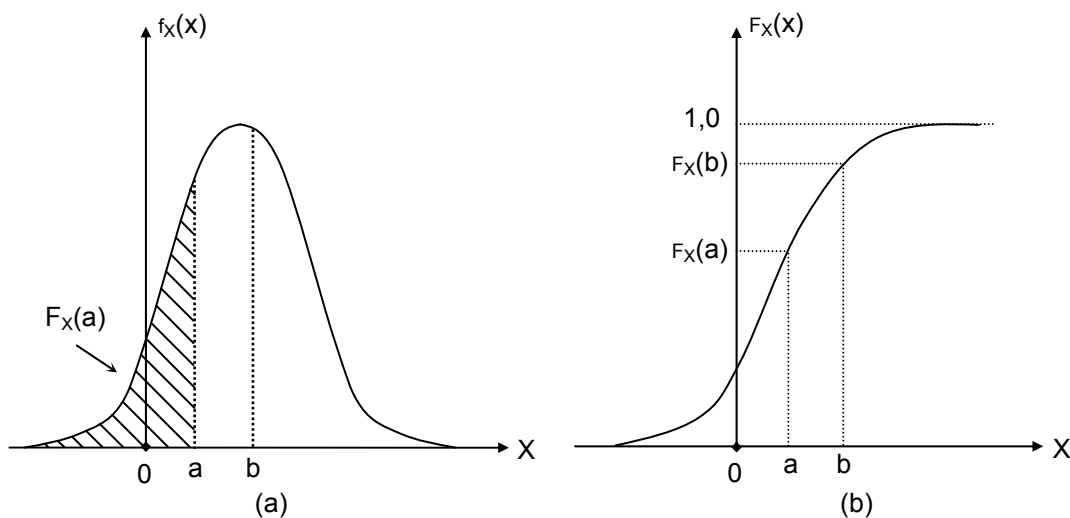


Figura D.1 – (a) Função Densidade de Probabilidades (PDF) e (b) Função de Distribuição Cumulativa (CDF).

Quando mais de uma variável aleatória são associadas a um experimento, por exemplo, duas variáveis aleatórias, a função densidade de probabilidades conjunta é requerida, esta deve satisfazer as seguintes condições:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq 0 \quad (D.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = 1 \quad (D.10)$$

$$\int_a^b \int_c^d f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = P(a \leq X_1 \leq b, c \leq X_2 \leq d) \quad (D.11)$$

e a função de distribuição cumulativa conjunta é expressa por:

$$F_{X_1, X_2}(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (D.12)$$

Quando a PDF de uma variável aleatória é obtida a partir da função de densidade de probabilidades conjunta é chamada função densidade de probabilidades marginal, sendo:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 \quad (D.13)$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 \quad (D.14)$$

Se duas variáveis aleatórias são independentes entre si, a função de densidade de probabilidades conjunta é obtida pelo produto da PDF de cada variável, conforme a seguir:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \quad (D.15)$$

D.3. Propriedades Estatísticas de Variáveis Aleatórias Contínuas

O valor esperado ou o valor médio de uma variável aleatória é obtido por:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \quad (D.16)$$

e o valor médio quadrático desta variável é definido como:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \quad (D.17)$$

O termo que mede a dispersão dos valores da variável aleatória em torno da média é chamado de variância, representado por $Var(X)$ ou σ_X^2 , e calculado pela seguinte equação:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx \quad (D.18)$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 \quad (D.19)$$

O desvio padrão da variável aleatória é obtido pela raiz quadrada da variância:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \quad (D.20)$$

e o coeficiente de variação desta variável é obtido a partir da razão entre o desvio padrão e a média:

$$\text{CoV} = \delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (\text{D.21})$$

O coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 é definido por:

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \quad (\text{D.22})$$

onde σ_{X_1} e σ_{X_2} são os desvios padrões de X_1 e X_2 , respectivamente, e $\text{cov}(X_1, X_2)$ representa a covariância entre estas variáveis, sendo obtida por:

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] = E(X_1 X_2) - \mu_{X_1} \mu_{X_2} \quad (\text{D.23})$$

$E(X_1 X_2)$ é o valor esperado do produto $X_1 X_2$:

$$E(X_1 X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{D.24})$$

Quando X_1 e X_2 são independentes o coeficiente de correlação torna-se nulo, pois neste caso tem-se:

$$E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) = \mu_{X_1} \mu_{X_2} \quad (\text{D.25})$$

Para um experimento que englobe n variáveis aleatórias, a matriz de correlação entre elas é definida por:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{X_1, X_1} & \rho_{X_1, X_2} & \cdots & \rho_{X_1, X_n} \\ \rho_{X_2, X_1} & \rho_{X_2, X_2} & \cdots & \rho_{X_2, X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_n, X_1} & \rho_{X_n, X_2} & \cdots & \rho_{X_n, X_n} \end{bmatrix} \quad (\text{D.26})$$

D.4. Distribuições de Probabilidades

D.4.1. Distribuição Normal ou Gaussiana

Essa distribuição é a mais usada, e tem sua função densidade de probabilidades definida conforme a seguir:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \quad (\text{D.27})$$

os parâmetros são a média μ_X e o desvio padrão σ_X da variável aleatória.

Introduzindo uma variável auxiliar, denominada de variável reduzida y , pode-se reescrever a equação D.27:

$$f_Y(y) = \phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] \quad (\text{D.28})$$

sendo a variável reduzida determinada por:

$$\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (\text{D.29})$$

onde $\mu_Y = 0$ e $\sigma_Y = 1$.

Esta transformação resulta em uma nova variável aleatória Y com PDF normal padrão, conhecida como $\phi(y)$. A CDF chamada, neste caso, de função de distribuição cumulativa normal padrão ou simplesmente $\Phi(y)$ é usualmente tabelada e pode ser obtida por:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy \quad (\text{D.30})$$

A função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória normal é obtida a partir de:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (\text{D.31})$$

D.4.1.1. Soma ou Diferença de Variáveis Aleatórias Normais

Quando uma variável aleatória Z é definida pela soma de variáveis normais independentes, por exemplo X_1 e X_2 , esta também é uma variável aleatória normal:

$$Z = X_1 + X_2 \quad (\text{D.32})$$

a média desta variável é definida por:

$$E(Z) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \quad (\text{D.33})$$

$$\mu_Z = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} \quad (\text{D.34})$$

e o desvio padrão da mesma é obtido através de:

$$E[(Z - \mu_Z)^2] = \sigma_Z^2 = E[(X_1 + X_2 - \mu_{X_1} - \mu_{X_2})^2] \quad (\text{D.35})$$

$$\sigma_Z^2 = E[(X_1 - \mu_{X_1})^2 + (X_2 - \mu_{X_2})^2 + 2(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] \quad (\text{D.36})$$

sendo X_1 e X_2 variáveis aleatórias normais independentes, tem-se:

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2} \quad (\text{D.37})$$

D.4.2. Outras Distribuições

A seguir, é apresentada uma tabela contendo a PDF, CDF, μ_X e σ_X de algumas distribuições de probabilidades mais utilizadas.

Tabela D.1 – Caracterização de Algumas Distribuição de Probabilidades.

Distribuição	PDF - $f_X(x)$	CDF - $F_X(x)$	Média - μ_X	Desvio Padrão - σ_X
Normal	$\frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$	$\Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$	μ_X	σ_X
Lognormal	$\frac{1}{x\xi\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\xi}\right)^2\right]$	$\Phi\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\xi}\right)$	$\exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\xi^2\right)$	$\mu_X \sqrt{\exp(\xi^2) - 1}$
Rayleigh	$\frac{x - \tau}{\sigma_R^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \tau}{\sigma_R}\right)^2\right]$	$1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \tau}{\sigma_R}\right)^2\right]$	$\tau + \sigma_R \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\sigma_R \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$
Uniforme	$\frac{1}{b - a}$	$\frac{x - a}{b - a}$	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{b - a}{\sqrt{12}}$
Tipo I Máx (Gumbel)	$\alpha \exp\{-\alpha(x - u) - \exp[-\alpha(x - u)]\}$	$\exp\{-\exp[-\alpha(x - u)]\}$	$u + \frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$
Tipo I Mínimo	$\alpha \exp\{\alpha(x - u) - \exp[\alpha(x - u)]\}$	$1 - \exp\{-\exp[\alpha(x - u)]\}$	$u - \frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$
Tipo II Máximo	$\frac{k}{v} \left(\frac{v}{x}\right)^{k+1} \exp\left[-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right]$	$\exp\left[-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right]$	$v\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)$	$v \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right]^{0.5}$
Tipo III Mín (Weibull)	$\frac{k}{v} \left(\frac{x}{v}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right]$	$1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right]$	$v\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$v \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^{0.5}$

O parâmetro k , contido nas distribuições Tipo II Máximo e Tipo III Mínimo (Weibull), é obtido por:

$$k = CoV^{-1,09} \quad (D.38)$$

e $\Gamma(\cdot)$ representa a função Gamma, calculada através da seguinte integral:

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} \exp(-x) x^{k-1} dx \quad (D.39)$$

D.4.2.1. Função Densidade de Probabilidades Bidimensional Normal

A função densidade de probabilidades conjunta de duas variáveis aleatórias normais é definida por:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{h^2 + k^2 - 2\rho hk}{1-\rho^2}\right)\right] \quad (D.40)$$

onde $h = (x_1 - \mu_{X_1})/\sigma_{X_1}$, $k = (x_2 - \mu_{X_2})/\sigma_{X_2}$ e ρ representa o coeficiente de correlação entre as variáveis.

No caso das variáveis aleatórias serem normais padrão a equação D.40 pode ser reescrita:

$$\varphi(x_1, x_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{1-\rho^2}\right)\right] \quad (D.41)$$

esta é a função densidade de probabilidades bidimensional normal padrão.

D.4.2.2. Função Densidade de Probabilidades M-Dimensional Normal Padrão

A função densidade de probabilidades conjunta de m variáveis aleatórias normais padrão é definida por:

$$\varphi_m(X; \rho) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{|\rho|}} \exp\left(-\frac{1}{2} X^T \rho^{-1} X\right) \quad (D.42)$$

onde X é o vetor das variáveis aleatórias normais padrão e ρ é o vetor dos coeficientes de correlação entre as variáveis.

D.4.3. Distribuições Normais Equivalentes

Se uma variável aleatória tem uma distribuição de probabilidades que não é normal, uma distribuição normal equivalente num ponto x^* deve ser obtida, para isso iguala-se as funções densidade de probabilidades (PDF) e de

distribuição cumulativa (CDF) dessa variável a de uma normal, no determinado ponto x^* , conforme a seguir:

$$f_X(x^*) = \frac{1}{\sigma_X^N} \phi\left(\frac{x^* - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) \quad (D.43)$$

$$F_X(x^*) = \Phi\left(\frac{x^* - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) \quad (D.44)$$

$\phi(\)$ e $\Phi(\)$ significam, respectivamente, a PDF e a CDF normais padrão.

Assim, obtém-se a média e o desvio padrão da variável aleatória normal equivalente no ponto x^* através da resolução do sistema de equações apresentado anteriormente:

$$\sigma_X^N = \frac{\phi\left\{\Phi^{-1}\left[F_X(x^*)\right]\right\}}{f_X(x^*)} \quad (D.45)$$

$$\mu_X^N = x^* - \sigma_X^N \Phi^{-1}\left[F_X(x^*)\right] \quad (D.46)$$

onde $\Phi^{-1}(p)$ fornece o valor da variável reduzida cuja probabilidade de ocorrerem valores menores ou iguais a ela seja igual a p , pois $\Phi^{-1}(\)$ representa a inversa da CDF normal padrão.

D.4.4. Coeficientes de Correlações Equivalentes

Se variáveis aleatórias não normais são correlacionadas é necessário obter os coeficientes de correlações equivalentes, ou seja, os coeficientes de correlações entre as variáveis originais devem ser corrigidos para coeficientes de correlações entre variáveis normais equivalentes, sendo:

$$\rho_{X_{ij}}^E = F\rho_{X_{ij}} \quad (D.47)$$

onde F depende de $\rho_{X_{ij}}$ e dos coeficientes de variação CoV das variáveis aleatórias originais, não normais.

OpenSees (2001) fornece expressões analíticas para o coeficiente de correlação equivalente $\rho_{X_{ij}}^E$ para um grande número de distribuições de probabilidades, transcritas a seguir:

Tabela D.2 – Coeficientes de Correlações Equivalentes.

Variável Aleatória (i) Normal correlacionada com Variável Aleatória (j) ...	
Normal	$\rho_{X_{ij}}^E = \rho_{X_{ij}}$
Lognormal	$\rho_{X_{ij}}^E = \frac{CoV_i}{\sqrt{\ln(1 + CoV_i^2)}} \rho_{X_{ij}}$
Rayleigh	$\rho_{X_{ij}}^E = 1,014 \rho_{X_{ij}}$
Uniforme	$\rho_{X_{ij}}^E = 1,023 \rho_{X_{ij}}$
Tipo I Máx (Gumbel)	$\rho_{X_{ij}}^E = 1,031 \rho_{X_{ij}}$
Tipo I Mínimo	$\rho_{X_{ij}}^E = 1,031 \rho_{X_{ij}}$
Tipo II Máximo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,030 + 0,364 CoV_j^2 + 0,238 CoV_j) \rho_{X_{ij}}$
Tipo III Mín (Weibull)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,031 + 0,328 CoV_j^2 - 0,195 CoV_j) \rho_{X_{ij}}$
Variável Aleatória (i) Lognormal correlacionada com Variável Aleatória (j) ...	
Normal	$\rho_{X_{ij}}^E = \frac{CoV_j}{\sqrt{\ln(1 + CoV_j^2)}} \rho_{X_{ij}}$
Lognormal	$\rho_{X_{ij}}^E = \frac{\ln(1 + \rho_{X_{ij}} CoV_i CoV_j)}{\rho_{X_{ij}} \sqrt{\ln(1 + CoV_i^2) \ln(1 + CoV_j^2)}} \rho_{X_{ij}}$
Rayleigh	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,011 + (0,231 CoV_i - 0,130 \rho_{X_{ij}} + 0,014) CoV_i + (0,001 + 0,004 \rho_{X_{ij}}) \rho_{X_{ij}}) \rho_{X_{ij}}$
Uniforme	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,019 + 0,014 CoV_i + 0,010 (\rho_{X_{ij}})^2 + 0,249 CoV_i^2) \rho_{X_{ij}}$
Tipo I Máx (Gumbel)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,029 + (0,014 - 0,197 \rho_{X_{ij}} + 0,233 CoV_i) CoV_i + (0,001 + 0,004 \rho_{X_{ij}}) \rho_{X_{ij}}) \rho_{X_{ij}}$
Tipo I Mínimo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,029 - 0,001 \rho_{X_{ij}} + 0,014 CoV_i + 0,004 (\rho_{X_{ij}})^2 + 0,233 CoV_i^2 + 0,197 \rho_{X_{ij}} CoV_i) \rho_{X_{ij}}$
Tipo II Máximo	$temp = 1,026 + 0,082 \rho_{X_{ij}} - 0,019 CoV_i + 0,222 CoV_j + 0,018 (\rho_{X_{ij}})^2 + 0,288 CoV_i^2 + 0,379 CoV_j^2$ $\rho_{X_{ij}}^E = temp - 0,441 \rho_{X_{ij}} CoV_i + 0,126 CoV_i CoV_j - 0,277 \rho_{X_{ij}} CoV_j$
Tipo III Mín (Weibull)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,031 + (0,052 + 0,005 \rho_{X_{ij}} + 0,220 CoV_j) CoV_j + (0,052 + 0,002 \rho_{X_{ij}}) \rho_{X_{ij}} + (0,350 CoV_i - 0,174 \rho_{X_{ij}} + 0,009 CoV_j - 0,210) CoV_i) \rho_{X_{ij}}$

Variável Aleatória (i) Rayleigh correlacionada com Variável Aleatória (j) ...	
Normal	$\rho_{X_{ij}}^E = 1,014\rho_{X_{ij}}$
Lognormal	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,011 + (0,231 \text{ CoV}_j - 0,130\rho_{X_{ij}} + 0,014)\text{CoV}_j + (0,001 + 0,004\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$
Rayleigh	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,028 - 0,029\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$
Uniforme	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,038 - 0,008(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Máx (Gumbel)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,046 + (-0,045 + 0,006\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Mínimo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,046 + 0,045\rho_{X_{ij}} + 0,006(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo II Máximo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,036 - 0,038\rho_{X_{ij}} + 0,266 \text{ CoV}_j + 0,028(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,383\text{CoV}_j^2 - 0,229\rho_{X_{ij}} \text{ CoV}_j)\rho_{X_{ij}}$
Tipo III Mín (Weibull)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,047 + (0,353 \text{ CoV}_j - 0,136\rho_{X_{ij}} - 0,212) \text{ CoV}_j + 0,042\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$

Variável Aleatória (i) Uniforme correlacionada com Variável Aleatória (j) ...	
Normal	$\rho_{X_{ij}}^E = 1,023\rho_{X_{ij}}$
Lognormal	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,019 + 0,014 \text{ CoV}_j + 0,010(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,249 \text{ CoV}_j^2)\rho_{X_{ij}}$
Rayleigh	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,038 - 0,008(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Uniforme	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,047 - 0,047(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Máx (Gumbel)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,055 + 0,015(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Mínimo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,055 + 0,015(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo II Máximo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,033 + 0,305 \text{ CoV}_j + 0,074(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,405 \text{ CoV}_j^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo III Mín (Weibull)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,061 - 0,237 \text{ CoV}_j - 0,005(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,379 \text{ CoV}_j^2)\rho_{X_{ij}}$

Variável Aleatória (i) Tipo I Máx (Gumbel) correlacionada com Variável Aleatória (j) ...	
Normal	$\rho_{X_{ij}}^E = 1,031\rho_{X_{ij}}$
Lognormal	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,029 + (0,014 - 0,197\rho_{X_{ij}} + 0,233 \text{ CoV}_j) \text{ CoV}_j + (0,001 + 0,004\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$
Rayleigh	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,046 + (-0,045 + 0,006\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$
Uniforme	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,055 + 0,015(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$

Tipo I Máx (Gumbel)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,064 + (0,005\rho_{X_{ij}} - 0,069)\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Mínimo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,064 + 0,069\rho_{X_{ij}} + 0,005(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo II Máximo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,056 - 0,060\rho_{X_{ij}} + 0,263\text{CoV}_j + 0,020(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,383\text{CoV}_j^2 - 0,332\rho_{X_{ij}}\text{CoV}_j)\rho_{X_{ij}}$
Tipo III Mín (Weibull)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,064 + (0,356\text{CoV}_j - 0,211\rho_{X_{ij}} - 0,210)\text{CoV}_j + (0,065 + 0,003\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$

Variável Aleatória (i) **Tipo I Mínimo** correlacionada com Variável Aleatória (j) ...

Normal	$\rho_{X_{ij}}^E = 1,031\rho_{X_{ij}}$
Lognormal	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,029 - 0,001\rho_{X_{ij}} + 0,014\text{CoV}_j + 0,004(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,233\text{CoV}_j^2 + 0,197\rho_{X_{ij}}\text{CoV}_j)\rho_{X_{ij}}$
Rayleigh	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,046 + 0,045\rho_{X_{ij}} + 0,006(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Uniforme	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,055 + 0,015(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Máx (Gumbel)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,064 + 0,069\rho_{X_{ij}} + 0,005(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Mínimo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,064 - 0,069\rho_{X_{ij}} + 0,005(\rho_{X_{ij}})^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo II Máximo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,056 + 0,060\rho_{X_{ij}} + 0,263\text{CoV}_j + 0,020(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,383\text{CoV}_j^2 + 0,332\rho_{X_{ij}}\text{CoV}_j)\rho_{X_{ij}}$
Tipo III Mín (Weibull)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,064 - 0,065\rho_{X_{ij}} - 0,210\text{CoV}_j + 0,003(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,356\text{CoV}_j^2 + 0,211\rho_{X_{ij}}\text{CoV}_j)\rho_{X_{ij}}$

Variável Aleatória (i) **Tipo II Máximo** correlacionada com Variável Aleatória (j) ...

Normal	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,030 + 0,364\text{CoV}_i^2 + 0,238\text{CoV}_i)\rho_{X_{ij}}$
Lognormal	$\text{temp} = 1,026 + 0,082\rho_{X_{ij}} - 0,019\text{CoV}_j + 0,222\text{CoV}_i + 0,018(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,288\text{CoV}_j^2 + 0,379\text{CoV}_i^2$ $\rho_{X_{ij}}^E = \text{temp} - 0,441\rho_{X_{ij}}\text{CoV}_j + 0,126\text{CoV}_j\text{CoV}_i - 0,277\rho_{X_{ij}}\text{CoV}_i$
Rayleigh	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,036 - 0,038\rho_{X_{ij}} + 0,266\text{CoV}_i + 0,028(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,383\text{CoV}_i^2 - 0,229\rho_{X_{ij}}\text{CoV}_i)\rho_{X_{ij}}$
Uniforme	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,033 + 0,305\text{CoV}_i + 0,074(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,405\text{CoV}_i^2)\rho_{X_{ij}}$

Tipo I Máx (Gumbel)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,056 - 0,060\rho_{X_{ij}} + 0,263 \text{ CoV}_i + 0,020(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,383 \text{ CoV}_i^2 - 0,332\rho_{X_{ij}} \text{ CoV}_i)\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Mínimo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,056 + 0,060\rho_{X_{ij}} + 0,263 \text{ CoV}_i + 0,020(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,383 \text{ CoV}_i^2 + 0,332\rho_{X_{ij}} \text{ CoV}_i)\rho_{X_{ij}}$
Tipo II Máximo	$\text{temp} = 1,086 + 0,054\rho_{X_{ij}} + 0,104(\text{CoV}_i + \text{CoV}_j) - 0,055(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,662(\text{CoV}_i^2 + \text{CoV}_j^2) - 0,570\rho_{X_{ij}}(\text{CoV}_i + \text{CoV}_j) + 0,203(\text{CoV}_i \text{ CoV}_j)$ $\rho_{X_{ij}}^E = (\text{temp} - 0,020(\rho_{X_{ij}})^3 - 0,218(\text{CoV}_i^3 + \text{CoV}_j^3) - 0,371\rho_{X_{ij}}(\text{CoV}_i^2 + \text{CoV}_j^2) + 0,257(\rho_{X_{ij}})^2(\text{CoV}_i + \text{CoV}_j) + 0,141(\text{CoV}_i \text{ CoV}_j)(\text{CoV}_i + \text{CoV}_j))\rho_{X_{ij}}$
Tipo III Mín (Weibull)	$\text{temp} = 1,065 + 0,146\rho_{X_{ij}} + 0,241 \text{ CoV}_i - 0,259 \text{ CoV}_j + 0,013(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,372 \text{ CoV}_i^2 + 0,435 \text{ CoV}_j^2$ $\rho_{X_{ij}}^E = (\text{temp} + 0,005\rho_{X_{ij}} \text{ CoV}_i + 0,034 \text{ CoV}_i \text{ CoV}_j - 0,481\rho_{X_{ij}} \text{ CoV}_j)\rho_{X_{ij}}$
Variável Aleatória (i) Tipo III Mín (Weibull) correlacionada com Variável Aleatória (j) ...	
Normal	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,031 + 0,328 \text{ CoV}_i^2 - 0,195 \text{ CoV}_i)\rho_{X_{ij}}$
Lognormal	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,031 + (0,052 + 0,005\rho_{X_{ij}} + 0,220 \text{ CoV}_i) \text{ CoV}_i + (0,052 + 0,002\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}} + (0,350 \text{ CoV}_j - 0,174\rho_{X_{ij}} + 0,009 \text{ CoV}_i - 0,210) \text{ CoV}_j)\rho_{X_{ij}}$
Rayleigh	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,047 + (0,353 \text{ CoV}_i - 0,136\rho_{X_{ij}} - 0,212) \text{ CoV}_i + 0,042\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$
Uniforme	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,061 - 0,237 \text{ CoV}_i - 0,005(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,379 \text{ CoV}_i^2)\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Máx (Gumbel)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,064 + (0,356 \text{ CoV}_i - 0,211\rho_{X_{ij}} - 0,210) \text{ CoV}_i + (0,065 + 0,003\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}})\rho_{X_{ij}}$
Tipo I Mínimo	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,064 - 0,065\rho_{X_{ij}} - 0,210 \text{ CoV}_i + 0,003(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,356 \text{ CoV}_i^2 + 0,211\rho_{X_{ij}} \text{ CoV}_i)\rho_{X_{ij}}$
Tipo II Máximo	$\text{temp} = 1,065 + 0,146\rho_{X_{ij}} + 0,241 \text{ CoV}_j - 0,259 \text{ CoV}_i + 0,013(\rho_{X_{ij}})^2 + 0,372 \text{ CoV}_j^2 + 0,435 \text{ CoV}_i^2$ $\rho_{X_{ij}}^E = (\text{temp} + 0,005\rho_{X_{ij}} \text{ CoV}_j + 0,034 \text{ CoV}_i \text{ CoV}_j - 0,481\rho_{X_{ij}} \text{ CoV}_i)\rho_{X_{ij}}$

Tipo III MIn (Weibull)	$\rho_{X_{ij}}^E = (1,063 + (0,007 \rho_{X_{ij}} + 0,337 \text{ CoV}_i - 0,200) \text{ CoV}_i$ $+ (0,007 \rho_{X_{ij}} + 0,337 \text{ CoV}_j - 0,200) \text{ CoV}_j$ $- (0,004 + 0,001 \rho_{X_{ij}}) \rho_{X_{ij}} - 0,007 \text{ CoV}_i \text{ CoV}_j) \rho_{X_{ij}}$
---------------------------	---

D.4.4.1. Decomposição de Choleski da Matriz dos Coeficientes de Correlações Equivalentes

Se uma matriz simétrica definida A pode ser decomposta em duas matrizes triangulares, em que uma é a transposta da outra, como é o caso da matriz dos coeficientes de correlações equivalentes, pode-se obter os elementos da matriz triangular inferior L a partir das seguintes equações gerais:

$$L_{11} = 1,0$$

$$L_{i1} = \rho_{i1}$$

$$L_{ik} = \frac{1}{L_{kk}} \left(\rho_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} L_{kj} \right) \quad 1 < k < i \quad (\text{D.48})$$

$$L_{ii} = \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2} \quad i > 1$$

onde ρ_{ik} é o coeficiente de correlação entre as variáveis.

Assim obtém-se a matriz triangular inferior L :

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{D.49})$$