

## 3 Confiabilidade de Estruturas

### 3.1. Introdução

Um projeto estrutural deve levar em consideração as incertezas inerentes às variáveis envolvidas, que podem ser:

- incertezas sobre a intensidade e a distribuição das cargas permanentes e acidentais;
- incertezas sobre as propriedades mecânicas dos materiais;
- incertezas sobre os parâmetros geométricos da estrutura;
- incertezas sobre os modelos de cálculo e de análise estrutural.

Estas incertezas impossibilitam que uma estrutura apresente segurança absoluta, pois uma determinada combinação de valores das variáveis pode resultar numa condição de falha.

A confiabilidade de estruturas tem como principal objetivo determinar a probabilidade de ocorrência de um cenário de falha qualquer na estrutura, visto que sempre haverá uma probabilidade não-nula da estrutura desempenhar um comportamento não apropriado durante sua vida útil. A confiabilidade,  $C$ , mede a probabilidade da estrutura não violar um determinado estado limite e em termos estatísticos é definida pelo complemento da probabilidade de falha:

$$C = 1 - p_f \quad (3.1)$$

Como para estruturas civis a ordem de grandeza de  $p_f$  é de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$  por ano geralmente utiliza-se o valor da probabilidade de falha como medida de confiabilidade de uma estrutura.

O conceito de que a verificação da segurança estrutural deve ser estabelecida através de análises probabilísticas é recente, porém na tentativa de quantificar a segurança estrutural diversos métodos foram propostos anteriormente.

MADSEN et alli (1986) classificam os métodos de confiabilidade de estruturas em níveis, de acordo com a quantidade de informação disponível:

- Nível 0 – Método das Tensões Admissíveis: este método consiste

em calcular, no regime elástico-linear, o valor da tensão para o carregamento máximo esperado e comparar este valor com o da tensão admissível do material. A tensão admissível é calculada dividindo o valor da tensão limite, que define o limite do comportamento elástico-linear, por um fator de segurança;

- Nível 1 – Método dos Estados Limites: neste método são utilizados fatores parciais de segurança para majorar as solicitações e minorar as resistências. Estes fatores são aplicados aos valores característicos das variáveis transformando-os em valores de cálculo e têm como objetivo levar em consideração as incertezas inerentes às variáveis de projeto. O método dos estados limites também é conhecido como método semi-probabilístico e são adotados como critério de segurança pelas normas brasileiras de projeto de estruturas;
- Nível 2 – Método do Índice de Confiabilidade: neste método as variáveis incertas são consideradas segundo um modelo probabilístico definido por: um determinado valor esperado (média), uma certa medida de dispersão (desvio padrão ou coeficiente de variação) e uma medida de correlação entre as variáveis que apresentam aleatoriedade. No método de Nível 2 assume-se que as variáveis aleatórias têm distribuição Normal, pois não se tem conhecimento das distribuições de probabilidade das mesmas. Para avaliar o estado da estrutura (de falha ou não) é utilizado uma função de estado  $G(X)$ , onde  $X$  é o vetor de variáveis aleatórias. Se  $G(X) > 0$  a estrutura está segura, caso contrário ( $G(X) < 0$ ) a estrutura se apresenta no domínio de falha. A superfície de falha é definida por  $G(X) = 0$ . O índice de confiabilidade representa a menor distância entre a superfície de falha e a origem (no espaço normal padrão);
- Nível 3 – Método da Probabilidade de Falha: neste método as distribuições de probabilidade são especificadas e a probabilidade de falha pode ser calculada a partir do valor do índice de confiabilidade;
- Nível 4 – Método da Minimização dos Custos Envolvidos ao Longo da Vida Útil: este método combina a confiabilidade de estruturas com a otimização de estruturas e tem como objetivo projetar

estruturas econômicas tendo como restrição o nível de confiabilidade desejado.

Esta Tese utiliza o método de confiabilidade de estrutura de Nível 3.

O item 3.2. aborda os principais conceitos de confiabilidade de estruturas. De forma resumida, são considerados na análise da confiabilidade os seguintes passos:

- 1) Selecionar o valor desejado para a confiabilidade;
- 2) Identificar os modos de falha;
- 3) Classificar os modos de falha em sistemas em série ou em paralelo;
- 4) Formular as funções de falha (funções de estado limite);
- 5) Identificar as variáveis aleatórias e as variáveis determinísticas nas funções de estado;
- 6) Especificar os tipos de distribuições e os parâmetros estatísticos (média e desvio padrão) para as variáveis aleatórias. Estabelecer a dependência entre as variáveis;
- 7) Estimar a confiabilidade de cada modo de falha;
- 8) Estimar a confiabilidade do sistema (em série ou em paralelo);
- 9) Em projeto baseado em confiabilidade – mudar o projeto se a confiabilidade não alcançar o valor desejado.  
Em análise de confiabilidade – comparar a confiabilidade obtida com o valor desejado;
- 10) Avaliar os fatores de sensibilidade.

No Anexo D é apresentado um resumo sobre teoria da probabilidade. MELCHERS (2002), NOWAK e COLLINS (2000), MADSEN et alli (1986) e HART (1982) abordam estes assuntos mais detalhadamente.

Nos itens 3.3. e 3.4. são apresentados, respectivamente, um breve histórico sobre o desenvolvimento da confiabilidade de estruturas e uma revisão bibliográfica de trabalhos que abordam avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado.

## 3.2. Conceitos Fundamentais sobre Confiabilidade de Estruturas

### 3.2.1. Função de Estado e Probabilidade de Falha

A falha em um estado significa que a estrutura atingiu condições indesejáveis, podendo ocasionar colapso total ou parcial (estado limite último) ou então interrupção do uso normal da estrutura (estado limite de serviço).

Na confiabilidade estrutural, os modos de comportamento são representados pelas funções de estado  $G(X)$ . Essas funções são, normalmente, definidas por:

$$G(X) = R(X) - S(X) \quad (3.2)$$

onde:

$X$  - é o vetor de variáveis aleatórias;

$R(X)$  - representa a resistência do elemento;

$S(X)$  - representa a solicitação imposta ao elemento.

Conforme já mencionado, uma determinada combinação de valores das variáveis de projeto pode resultar numa condição de falha para estrutura. Nesta situação  $R(X) < S(X)$  e  $G(X) < 0$ . A estrutura se encontra no domínio de falha.

Para determinar a probabilidade de ocorrer um cenário de falha na estrutura é utilizada a função de estado. O interesse é conhecer qual a probabilidade da função de estado assumir valores menores que zero, ou seja, pertencentes ao domínio de falha:

$$p_f = P(G(X) \leq 0) \quad (3.3)$$

podendo ser expressa por:

$$p_f = \int_F f_X(X) dx \quad (3.4)$$

onde  $f_X(X)$  representa a função densidade de probabilidades conjunta das variáveis aleatórias no vetor  $X$  envolvidas no problema e  $F$  representa o domínio de falha.

Na Figura 3.1 estão representadas, para um problema com duas variáveis aleatórias  $(R, S)$ , as funções densidade de probabilidades marginais

de cada variável,  $f_R$  e  $f_S$ , a função densidade de probabilidades conjunta  $f_{RS}$  e o domínio de falha.

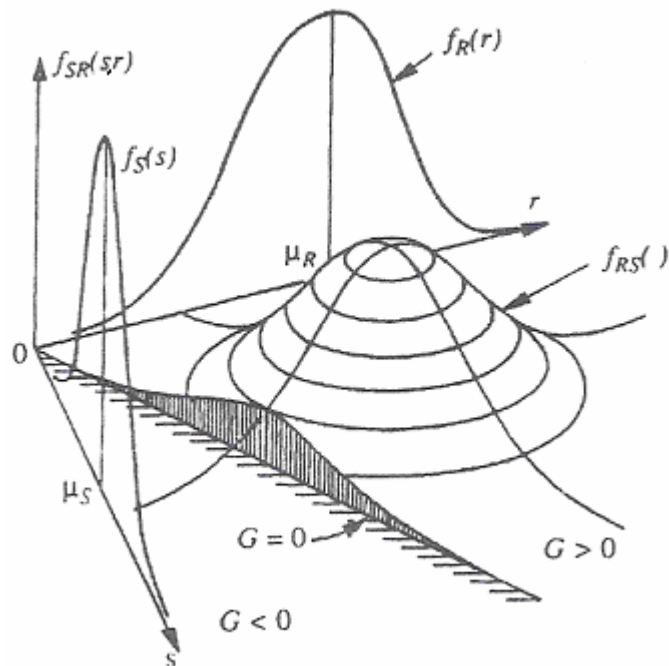


Figura 3.1 – Definição do domínio de falha; retirada de MELCHERS (2002).

### 3.2.2. Problema Básico de Confiabilidade

O problema básico de confiabilidade de estruturas considera apenas um modo de falha e duas variáveis aleatórias  $(R, S)$ ,  $R$  representando a resistência e  $S$  a solicitação. A função de estado é dada por:

$$G(X) = Z = R - S \quad (3.5)$$

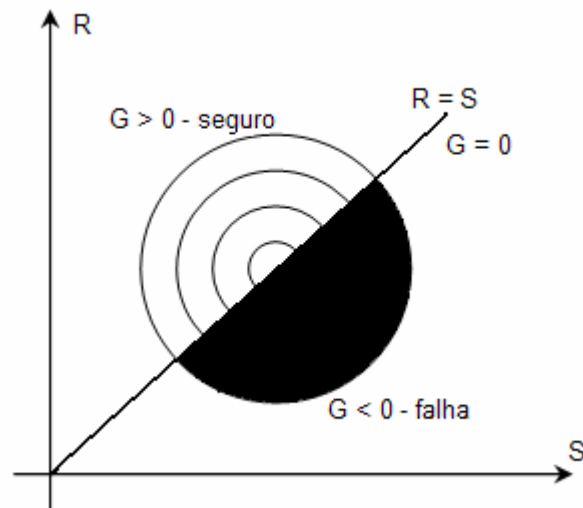
ou

$$G(X) = Z = \frac{R}{S} - 1 \quad (3.6)$$

A probabilidade de falha é expressa pela seguinte equação:

$$p_f = P[G(R, S) \leq 0] = \int \int_F f_{RS}(r, s) dr ds \quad (3.7)$$

A Figura 3.2 mostra, para o problema básico de confiabilidade, as curvas da função densidade de probabilidade conjunta, representada no plano das variáveis aleatórias  $R$  e  $S$ , e o domínio de falha ( $G < 0$ ), limitado por  $G = 0$ .



**Figura 3.2 – Problema básico de confiabilidade.**

No caso de  $R$  e  $S$  serem variáveis estatisticamente independentes,  $f_{RS}(r, s) = f_R(r)f_S(s)$ , a probabilidade de falha é calculada por:

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r)f_S(s) dr ds \quad (3.8)$$

$f_R(r)$  e  $f_S(s)$  são as funções densidade de probabilidade (PDF).

Porém,  $\int_{-\infty}^s f_R(r)dr$  define a função de distribuição cumulativa (CDF) da variável aleatória  $R$ , então a equação 3.8 pode ser reescrita:

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s)f_S(s) ds \quad (3.9)$$

esta integral é conhecida como “integral de convolução”, onde  $F_R(s)$  representa a probabilidade de  $R \leq s$ , o que levaria à ruptura, e  $f_S(s)ds$  representa a probabilidade de  $S$  assumir um valor entre  $s$  e  $s + ds$ , com  $ds \rightarrow 0$ , conforme Figura 3.3.

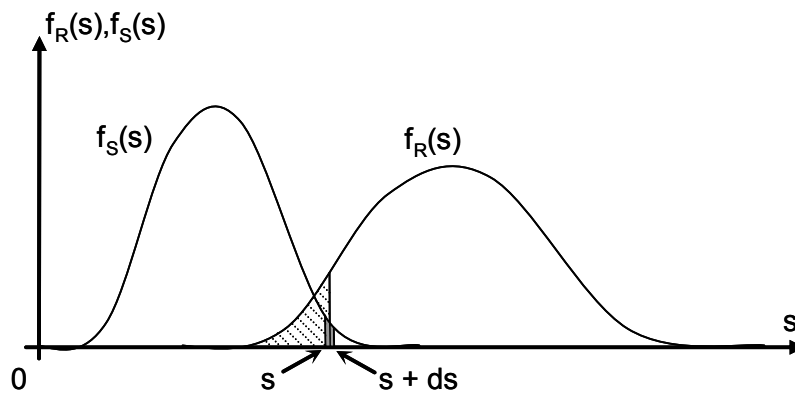


Figura 3.3 – Representação da “integral de convolução”; adaptada de MELCHERS (2002).

### 3.2.3.

#### Definição do Índice de Confiabilidade Beta

Para o problema básico representado na equação 3.5, com  $R$  e  $S$  sendo variáveis normais e independentes, tem-se que  $Z$  também é uma variável normal e de acordo com a regra de adição ou subtração de variáveis aleatórias normais (Anexo D):

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (3.10)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (3.11)$$

A Figura 3.4 representa graficamente a probabilidade de falha  $p_f$  e o índice de confiabilidade  $\beta$  para este problema. Observando que  $\beta$  mede a distância entre o valor médio de  $Z$  e o ponto zero (onde é definido o limite entre estado seguro e estado de falha) em unidades de desvios padrões. Portanto, a falha ocorre quando:

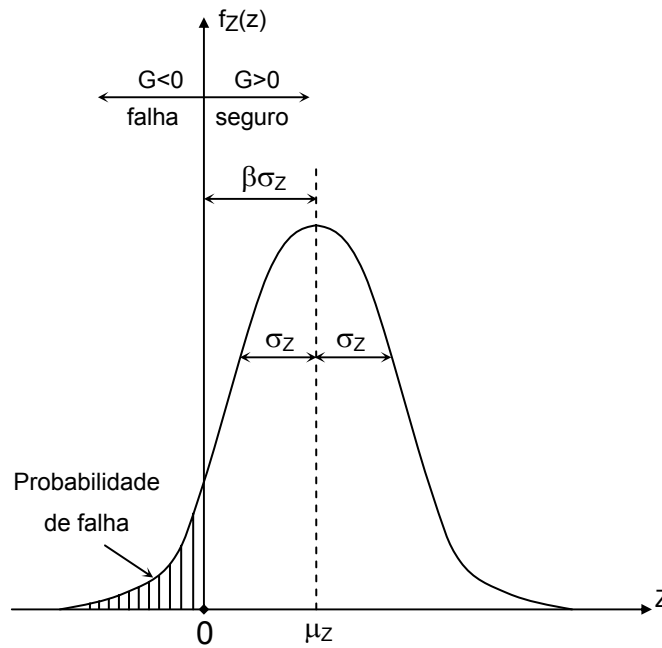
$$\mu_Z - \beta\sigma_Z = 0 \quad (3.12)$$

e

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (3.13)$$

ou

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3.14)$$



**Figura 3.4 – Probabilidade de Falha; adaptada de MELCHERS (2002).**

Para efetuar o cálculo da probabilidade de falha, deste problema, é usual transformar a variável  $Z$  numa variável padrão com média zero e desvio padrão unitário denominada variável reduzida (conforme Anexo D):

$$Y = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \quad (3.15)$$

então:

$$p_f = P(G \leq 0) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy \quad (3.16)$$

$f_Y(y) = \phi(y)$  representa a distribuição normal padrão de probabilidades, e  $y$  a variável reduzida.

Se  $G(X) = Z = 0$ :

$$Y = -\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = -\beta \quad (3.17)$$

e

$$p_f = \int_{-\infty}^{-\beta} f_Y(y) dy \quad (3.18)$$

ou:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (3.19)$$



$\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição cumulativa padrão, tabelada em livros de estatística.

### 3.2.4.

#### Método FORM (First Order Reliability Method)

Na maioria dos problemas que utilizam confiabilidade de estruturas a função de estado é complexa, envolvendo várias variáveis aleatórias estatisticamente dependentes entre si, dificultando muito a resolução do problema por avaliação numérica, pois para estes casos a integral de convolução, apresentada anteriormente, não pode ser utilizada.

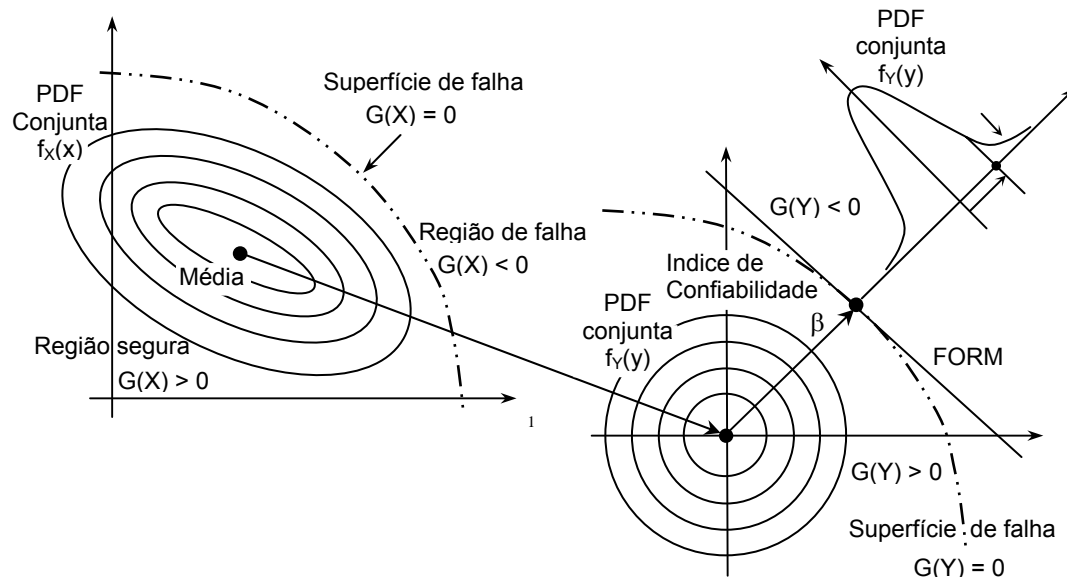
Para estes problemas a equação geral para se obter a probabilidade de falha é a seguinte:

$$p_f = \int_{-\infty}^{x_a} \int_{-\infty}^{x_b} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (3.20)$$

onde  $x_a, x_b, \dots, x_n$  são constantes.

Métodos alternativos estão sendo empregados para a resolução destes problemas, como: o método de simulação de Monte Carlo e os métodos numéricos, conhecidos como FORM (First Order Reliability Method) e SORM (Second Order Reliability Method). Nesse trabalho é utilizado o método FORM, devido à sua eficiência (rapidez computacional).

No método FORM as variáveis aleatórias  $X$  (de distribuições quaisquer e dependentes entre si ou não) são transformadas do espaço original para o espaço normal padrão, sendo variáveis aleatórias estatisticamente independentes  $Y$ . A função de estado é escrita em função das variáveis do espaço normal padrão. A superfície de falha é aproximada, em cada iteração, por uma superfície linear tangente à  $G(Y) = 0$  no ponto com a menor distância entre a superfície de falha  $G(Y) = 0$  e a origem. Depois que ocorre a convergência obtém-se  $y^*$ , denominado de ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas  $Y$ , e determina-se o índice de confiabilidade  $\beta$  que representa a distância de  $y^*$  até a origem, sendo  $\beta$  um valor nominal de referência. A Figura 3.5 ilustra o processo realizado no método FORM.

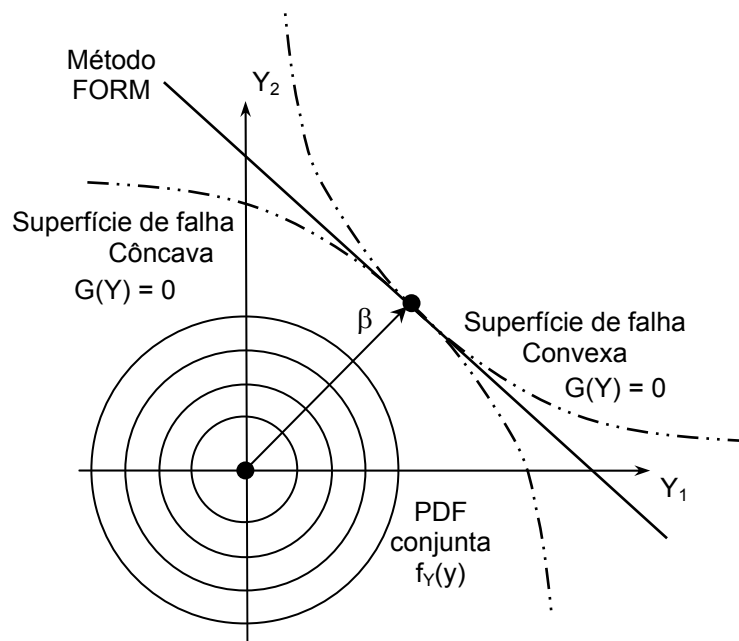


**Figura 3.5 – Transformação do espaço original para o espaço reduzido (Normal Padrão); adaptada de CHOI e YOUN (2001).**

No espaço normal padrão,  $\beta$  é definido por:

$$\beta = |y^*| \quad (3.21)$$

Dependendo da forma da função de estado no espaço  $Y$  a aproximação feita por este método pode ser a favor ou contra a segurança, sendo a favor para funções convexas em torno do ponto de projeto e contra para funções côncavas (Figura 3.6).



**Figura 3.6 – Aproximação do Método FORM para superfícies Côncavas e Convexas.**

A transformação de variáveis aleatórias quaisquer, correlacionadas ou não, em variáveis normais estatisticamente independentes é feita utilizando as distribuições normais equivalentes. As transformações dessas variáveis correlacionadas em variáveis normais padrão estatisticamente independentes é realizada através da transformação de Nataf, conforme apresentado adiante. Para variáveis correlacionadas não normais são obtidos coeficientes de correlações equivalentes, conforme explicado no Anexo D.

A busca do ponto de projeto  $y^*$  é um dos passos fundamentais para a obtenção da probabilidade de falha pelo método FORM, sendo realizada a partir de um problema de programação não linear P com uma restrição.

Utilizando o enfoque RIA (Reliability Index Approach) obtém-se, a partir de um algoritmo de otimização, o ponto de projeto  $y^*$  tendo como restrição a função de estado  $G(Y) = 0$ .

$$\begin{aligned} P : \text{Minimiza } |y| \\ \text{Sujeito a } G(Y) = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

O índice de confiabilidade é calculado a partir de:

$$\beta = |y^*| \quad (3.23)$$

e a probabilidade de falha, pelo método FORM, é obtida por:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (3.24)$$

#### **3.2.4.1. Transformação de Nataf**

A transformação de Nataf é realizada tendo como dados as funções densidade de probabilidades marginais de cada variável aleatória e o coeficiente de correlação equivalente entre pares de variáveis, não sendo necessário conhecer a função densidade de probabilidades conjunta.

Um vetor  $X$  contendo variáveis normais correlacionadas ou não é transformado em outro vetor  $Y$  contendo variáveis normais padrão estatisticamente independentes:

$$Y = \Gamma\sigma^{-1}(X - m) \quad (3.25)$$

no ponto corrente  $x$ :

$m$  - é o vetor com as médias normais equivalentes das variáveis aleatórias  $X$ ;

$\sigma$  - é a matriz diagonal contendo os desvios padrões normais equivalentes das variáveis aleatórias  $X$ .

As médias e desvios padrões equivalentes são obtidos para variáveis aleatórias que não tenham distribuições de probabilidades normais (Anexo D).

A matriz  $\Gamma$  é obtida por:

$$\Gamma = L^{-1} \quad (3.26)$$

$L$  é a matriz triangular inferior obtida a partir da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlações equivalentes entre as variáveis  $X$ , (Anexo D).

Quando variáveis aleatórias não normais são correlacionadas, o valor original do coeficiente de correlação deve ser corrigido para um valor de coeficiente de correlação entre variáveis normais equivalentes (Anexo D).

A equação 3.25 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Y = J(X - m) \quad (3.27)$$

pois  $J$  representa o Jacobiano da transformação, calculado por:

$$J = \frac{\partial Y}{\partial X} \quad (3.28)$$

#### 3.2.4.2. Pesquisa do Ponto de Projeto

A busca do ponto de projeto  $y^*$ , como já mencionada, pode ser representada como um problema de otimização (ou programação não-linear) com uma restrição. O algoritmo varia de acordo com o enfoque utilizado (RIA ou PMA).

No enfoque RIA o algoritmo mais usado na análise de confiabilidade de estruturas é o denominado de HLRF, desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e aperfeiçoado por Rackwitz e Fiessler (1978), apud SAGRILO (2004), definido pela seguinte expressão (Figura 3.7):

$$y^{K+1} = \alpha(y^K) \frac{[G(y^K) - \nabla_y G(y^K) y^K]}{|\nabla_y G(y^K)|} \quad (3.29)$$

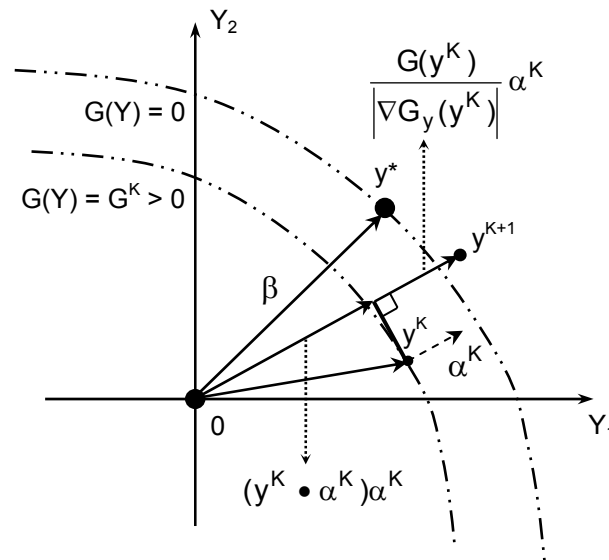
sendo:

$$\alpha(y^K) = - \frac{\nabla_y G(y^K)}{|\nabla_y G(y^K)|} \quad (3.30)$$

$$G(Y) = G(X) \quad (3.31)$$

$$\nabla_y G(Y) = (J^{-1})^T \nabla_x G(X) \quad (3.32)$$

onde:  $\alpha(y^K)$  representa o vetor unitário normal ao plano tangente à superfície  $G(y)$  no ponto  $y$ ;  $G(X)$  e  $G(Y)$  são, respectivamente, as funções de estado no espaço original e reduzido;  $\nabla_x G(X)$  e  $\nabla_y G(Y)$  são os gradientes, avaliados nos pontos  $x^K$  e  $y^K$  respectivamente.



**Figura 3.7 – Representação gráfica da busca do ponto de projeto pelo enfoque RIA para um problema com duas variáveis; adaptada de CHOI e YOUN (2001).**

Neste processo iterativo de busca do ponto mais provável  $y^*$  é obtido o valor correspondente de  $y^{K+1}$  no espaço original  $X$ :

$$x^{K+1} = x^K + (J^{-1})^T (y^{K+1} - y^K) \quad (3.33)$$

O processo é repetido até a convergência de  $y^{K+1}$  para  $y^*$ , sendo o critério de convergência definido por:

$$\frac{|y^*| - |y^{K+1}|}{|y^*|} \leq \text{tolerância} \quad (3.34)$$

o valor da tolerância adotado neste trabalho é  $10^{-4}$ .

### 3.2.4.3. Medidas de Sensibilidade

Além da probabilidade de falha, o método FORM fornece na análise da confiabilidade outras respostas, chamadas de medidas de sensibilidades, como fatores de importância, fatores de omissão, fatores de sensibilidade paramétricos, entre outros.

É apresentado, a seguir, apenas o fator de importância. Este fator indica qual a importância que cada variável aleatória tem na resposta da probabilidade de falha de um determinado modo, sendo definido por:

$$I_i = \alpha_i^2 \quad (3.35)$$

para a variável  $Y_i$ ,  $\alpha_i$  representa o co-seno diretor entre o vetor normal à superfície de falha no ponto de projeto  $y^*$  e o eixo da variável reduzida  $Y_i$ , dado por:

$$\alpha_i = \frac{\nabla_y G(y^*)_i}{|\nabla_y G(y^*)|} \quad (3.36)$$

sendo  $\nabla_y G(y^*)_i$  a componente do gradiente da função de estado no espaço reduzido.

A partir desse cálculo observa-se que as variáveis aleatórias com fatores de importância elevados são as que realmente influenciam na avaliação da probabilidade de falha obtida, ou seja, a variabilidade dessas variáveis tem maior influência na resposta. As variáveis que apresentam fatores de importância baixos podem passar a ser consideradas como determinísticas.

#### **3.2.4.4. Coeficientes Parciais de Segurança**

O método do estados limites últimos, utilizado nos projetos estruturais, é um método semi-probabilístico, onde se utilizam modelos de cálculo determinísticos, considerando as incertezas associadas às variáveis envolvidas, através da aplicação de coeficientes parciais de segurança. Os valores de cálculo utilizados são obtidos a partir da aplicação destes coeficientes a valores característicos da resistência e da solicitação.

O valor característico de uma variável aleatória é determinado como um valor que, de acordo com sua distribuição de probabilidades, representa um nível percentual de ser ultrapassado, sendo dependente do tipo de material e da classe da estrutura.

A definição dos coeficientes parciais de segurança foi feita, durante anos, com base na experiência dos projetistas estruturais. Recentemente estes coeficientes vêm sendo determinados com base científica, utilizando a confiabilidade de estruturas.

É estabelecido um valor aceitável para a probabilidade de falha, ou índice de confiabilidade. O projeto inicial (dimensões da estrutura) é modificado até que este valor de probabilidade de falha seja alcançado. Tendo definido os modelos

probabilísticos e os valores característicos das variáveis aleatórias envolvidas no problema, determinam-se os valores dos coeficientes parciais de segurança para uma estrutura específica.

O método FORM pode ser utilizado, para calibrar estes coeficientes, pois um dos resultados deste método é o ponto de projeto  $y^*$  composto pelos valores de projeto das variáveis aleatórias quando a probabilidade de falha desejada é alcançada. Se forem adotados, no projeto estrutural, valores de cálculo iguais ao do ponto de projeto, a estrutura terá a probabilidade de falha resultante desta análise de confiabilidade.

Os coeficientes parciais de segurança são obtidos

- para as solicitações impostas à estrutura por:

$$\gamma_i = \frac{(x^*)_i}{(x^k)_i} \quad (3.37)$$

onde:

$(x^*)_i$  - é o valor da variável  $i$  no ponto de projeto quando a probabilidade de falha aceitável é alcançada;

$(x^k)_i$  - é o valor característico desta variável usado no projeto.

- para as resistências dos materiais a partir de:

$$\gamma_i = \frac{(x^k)_i}{(x^*)_i} \quad (3.38)$$

### 3.2.5. Confiabilidade de Sistemas Estruturais

Quando a falha de um elemento estrutural pode ocorrer devido a mais de uma função de estado limite se denomina, na teoria de confiabilidade de estruturas, de sistema.

Sistema na análise de confiabilidade de estruturas pode ser representado, por exemplo, por uma viga, pois esta pode falhar devido a mais de uma função de estado limite.

Neste caso a probabilidade de falha  $p_f$  é calculada para cada função de estado separadamente, utilizando os processos já apresentados, e em seguida avalia-se a probabilidade de falha do sistema, considerando a contribuição de todas as funções de estado, ou seja, todos os modos de falha.

Dentro da confiabilidade de estruturas um sistema pode ser classificado em: sistema em série, quando a falha de um de seus modos leva a ruptura do

mesmo; sistema em paralelo, quando a ruptura do mesmo só ocorre depois da falha de todos os seus modos; ou sistema misto, quando existe uma combinação de sistema em série e em paralelo. A Figura 3.8 representa graficamente esta classificação.

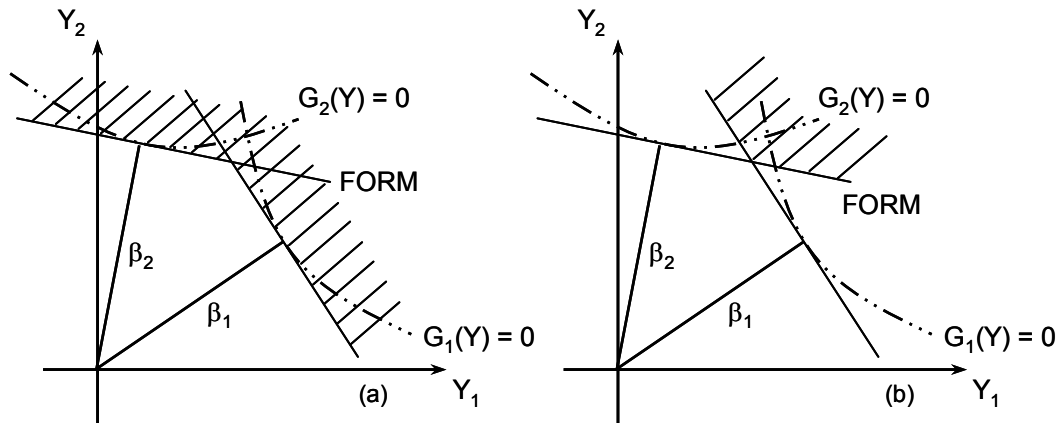


Figura 3.8 – (a) Sistemas em série e (b) Sistemas em paralelo, dentro da análise de confiabilidade de estruturas; adaptada de LIMA e SAGRILO (2002).

Matematicamente, a probabilidade de falha de um sistema em série é expressa pela união dos eventos que representam os modos de ruptura, enquanto que para um sistema em paralelo é expressa pela interseção dos mesmos, conforme definida nas equações a seguir.

$$p_f^s = P\left[\bigcup_{i=1}^j (G_i(Y) \leq 0)\right] \quad (3.39)$$

$$p_f^p = P\left[\bigcap_{i=1}^j (G_i(Y) \leq 0)\right] \quad (3.40)$$

$j$  é o número de modos de ruptura possíveis no problema.

Reescrevendo a equação 3.39:

$$p_f^s = \sum_{i=1}^j P_i - \sum_{i=1}^j \sum_{k>i}^j P_{ik} + \sum_{i=1}^j \sum_{k>i}^j \sum_{l>k}^j P_{ikl} - \dots \quad (3.41)$$

sendo

$$P_i = P(G_i(Y) \leq 0) \quad (3.42)$$

$$P_{ik} = P[P(G_i(Y) \leq 0) \cap P(G_k(Y) \leq 0)] \quad (3.43)$$

$$P_{ikl} = P[P(G_i(Y) \leq 0) \cap P(G_k(Y) \leq 0) \cap P(G_l(Y) \leq 0)] \quad (3.44)$$



A probabilidade de falha de um sistema em série pode ser calculada conforme definido na equação a seguir, sendo previamente conhecidos os valores de  $\beta_i$  obtidos pelo Método FORM.

$$p_f^s = \int_{-\infty}^{\beta_1} \int_{-\infty}^{\beta_2} \cdots \int_{-\infty}^{\beta_m} \varphi_m(X; \rho) dx_1 dx_2 \cdots dx_m. \quad (3.45)$$

onde:

$\varphi_m(X; \rho)$ - é a função densidade de probabilidades m-dimensional normal padrão, ver Anexo D;

$X$  - é o vetor das variáveis aleatórias normais padrão;

$\rho$  - é o vetor dos coeficientes de correlação entre os modos de ruptura.

A integral multi-dimensional definida na equação 3.45 só pode ser resolvida de forma analítica em alguns casos especiais. O cálculo da probabilidade de falha pode ser efetuado utilizando os limites de primeira-ordem ou segunda-ordem (limites de Ditlevsen), obtendo como resposta os limites superior e inferior da probabilidade de falha do sistema em série.

Para modos de ruptura estatisticamente independentes a probabilidade de falha pode ser representada por:

$$p_f^s = 1 - \prod_{i=1}^j (1 - P_i) \quad (3.46)$$

a expansão da equação 3.46 resulta na equação 3.41. Se  $P_i \ll 1$  os termos de segunda e terceira ordem ( $P_{ik}$  e  $P_{ikl}$ ) são desprezados, sendo:

$$p_f^s \cong \sum_{i=1}^j P_i \quad (3.47)$$

No caso onde todos os modos de ruptura são totalmente dependentes a probabilidade de falha pode ser representada por:

$$p_f^s = \max_{i=1}^j (P_i) \quad (3.48)$$

significando que o modo de ruptura que apresenta a maior probabilidade de falha é sempre o mais provável de ocorrer.

Os limites de primeira ordem para qualquer sistema em série onde os modos de falha estão entre completamente independentes e totalmente dependentes são definidos por:

$$\max_{i=1}^j (P_i) \leq p_f^s \leq \sum_{i=1}^j P_i \quad (3.49)$$

As equações 3.46 a 3.49 são válidas para  $\rho_{ik} \geq 0$  (condição abordada no Capítulo 5). No caso de  $\rho_{ik} < 0$  os limites inferior e superior de primeira ordem são obtidos em ANG e TANG (1984).

Nos limites de segunda ordem (ou limites de Ditlevsen) os termos  $P_{ik}$  são considerados. Os limites, inferior e superior, são respectivamente obtidos a partir de:

$$p_f^s \geq P_1 + \sum_{i=2}^j \max \left\{ \left[ P_i - \sum_{k=1}^{i-1} P_i \cap P_k \right], 0 \right\} \quad (3.50)$$

$$p_f^s \leq \sum_{i=1}^j P_i - \sum_{i=2}^j \max_{k < i} [P_k \cap P_i] \quad (3.51)$$

$j$  é o número de modos de ruptura (funções de estado) possíveis no problema.

Surge a necessidade de se calcular os termos de segunda ordem, que podem ser obtidos por:

$$P_{ik} = \Phi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik}) \quad (3.52)$$

onde:

$\Phi(., \rho)$  - CDF bidimensional normal padrão;

$\beta_i$  - índice de confiabilidade do modo  $i$  de ruptura;

$\beta_j$  - índice de confiabilidade do modo  $j$  de ruptura;

$\rho_{ik}$  - coeficiente de correlação entre dois modos de ruptura (Figura 3.9), definido por:

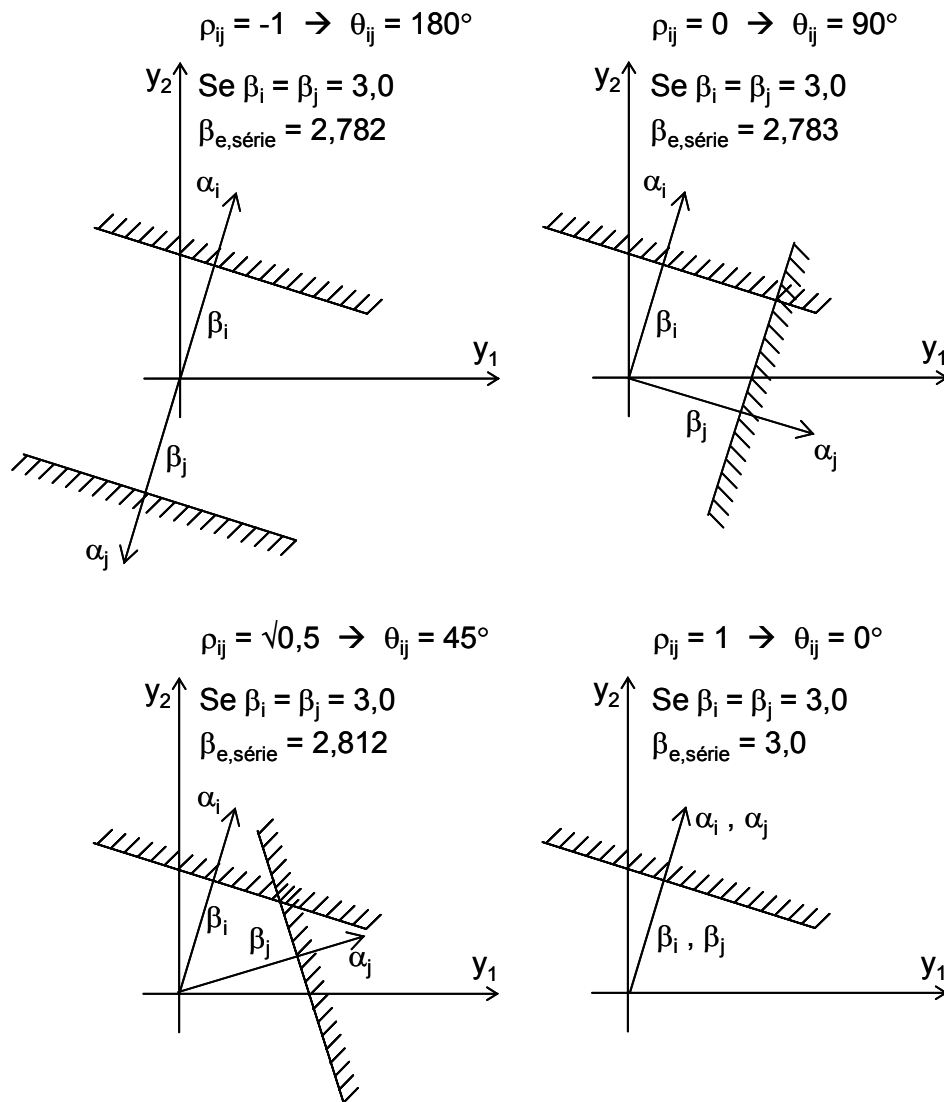
$$\rho_{ik} = \alpha_i \cdot \alpha_k \quad (3.53)$$

sendo  $\alpha_i$  e  $\alpha_k$  os vetores dos co-senos diretores nos pontos de projeto  $y^*$  associados aos modos de ruptura.

A função cumulativa bidimensional normal padrão é obtida por:

$$\Phi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik}) = \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_k) + \int_0^{\rho_{ik}} \varphi(-\beta_i, -\beta_k, z) dz \quad (3.54)$$

onde  $\varphi(., \rho_{ik})$  é a função densidade de probabilidades bidimensional normal padrão, definida no Anexo D.



**Figura 3.9 – Significado do coeficiente de correlação entre dois modos de falha; adaptada de SØRENSEN (2004).**

A CDF bidimensional normal padrão também pode ser obtida pelos limites  $P_{ik}$  :

➤ para  $\rho_{ik} \geq 0$  :

$$\max[P(A_{ik}), P(B_{ik})] \leq \Phi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik}) \leq P(A_{ik}) + P(B_{ik}) \quad (3.55)$$

➤ para  $\rho_{ik} < 0$  :

$$0 \leq \Phi(-\beta_i, -\beta_k, \rho_{ik}) \leq \min[P(A_{ik}), P(B_{ik})] \quad (3.56)$$

$P(A_{ik})$  e  $P(B_{ik})$  são calculados pelas seguintes expressões:

$$P(A_{ik}) = \Phi(-\beta_i) \Phi\left(-\frac{\beta_k - \rho_{ik}\beta_i}{\sqrt{1-\rho_{ik}^2}}\right) \quad (3.57)$$

$$P(B_{ik}) = \Phi(-\beta_k) \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho_{ik}\beta_k}{\sqrt{1-\rho_{ik}^2}}\right) \quad (3.58)$$

reescrevendo as equações 3.50 e 3.51:

$$p_f^s \geq P_1 + \sum_{i=2}^j \max\left\{\left[P_i - \sum_{k=1}^{i-1} (P_i \cap P_k)^+\right], 0\right\} \quad (3.59)$$

$$p_f^s \leq \sum_{i=1}^j P_i - \sum_{i=2}^j \max_{k < i} \left[(P_k \cap P_i)^-\right] \quad (3.60)$$

$(P_i \cap P_k)^+$  e  $(P_k \cap P_i)^-$  são os limites superior e inferior de  $P_{ik}$ , respectivamente.

Obtido o valor de  $p_f^s$  calcula-se, a partir da inversa da CDF normal padrão, o valor do índice de confiabilidade correspondente. Este valor não representa a distância do ponto de projeto à origem, pois no caso de sistemas há mais de um ponto de projeto. O valor obtido pela inversa da CDF normal padrão é chamado de índice de confiabilidade equivalente  $\beta_{e,série}$ .

### 3.3. Revisão Bibliográfica

A seguir são apresentadas revisões bibliográficas de trabalhos que abordam avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado.

LU et alii (1994) avaliaram a confiabilidade de vigas de concreto armado submetidas à flexão, à força cortante e à torção, projetadas segundo as prescrições do ACI 318 (1989). As vigas submetidas à força cortante foram avaliadas, também, utilizando a formulação de Zsutty (1971). A interação entre a força cortante e o momento de torção foi considerada através de uma superfície de falha elíptica proposta pelo ACI 318 (1989). Foram consideradas como variáveis aleatórias as resistências dos materiais, os carregamentos e os parâmetros geométricos da seção transversal da viga e da armadura. Incluiu-se em cada função de estado limite uma variável aleatória, denominada de fator de modelagem, para considerar as incertezas relativas ao modelo de cálculo utilizado. Os modelos probabilísticos dos fatores de modelagem dependiam do

estado limite analisado. A avaliação da confiabilidade foi realizada utilizando o método FORM e o método SORM. Os valores dos índices de confiabilidade obtidos para os vários modos de falha foram comparados. Realizou-se uma análise de confiabilidade considerando a formulação de sistemas em série. Foi verificado, a partir dos resultados obtidos, que os valores dos índices de confiabilidade, considerando sistemas em série ou não, são mais sensíveis à carga acidental, às resistências dos materiais e aos fatores de modelagem. Observou-se que o modo de falha à flexão controlou a confiabilidade das vigas nos casos onde a relação entre carga acidental e permanente era alta. Quando esta relação era menor do que um o modo de falha à força cortante controlou a segurança da viga.

VAL et alii (1997) apresentou um método probabilístico para avaliar a confiabilidade de vigas e pórticos planos de concreto armado submetidos à flexão. Foi adotado um modelo de elementos finitos não-linear para análise de estruturas. Para análise probabilística foi utilizado o método numérico FORM. Identificou-se, a partir de análises de sensibilidade, as variáveis que alteravam o valor do índice de confiabilidade em mais de 5%. Foram adotadas como variáveis aleatórias as resistências dos materiais, a altura útil da viga e os carregamentos. Um estudo considerando ou não a correlação entre as propriedades dos materiais entre os elementos do pórtico foi realizado e constatou-se que a correlação deve ser considerada. Inclui-se como variável aleatória um fator de modelagem associado às incertezas existentes no modelo estrutural adotado. Foram avaliados índices de confiabilidade para duas situações (falha da coluna externa e falha da coluna interna), considerando ou não o fator de modelagem. Verificou-se que a coluna externa apresentou maior probabilidade de falha. Os fatores de sensibilidade foram avaliados e observou-se que as variáveis mais significativas foram a carga acidental e a resistência à tração do aço.

MACHADO et alii (2000) analisaram a confiabilidade de vigas de concreto armado submetidas à flexão e à força cortante, projetadas segundo as prescrições da NBR 6118 (1980) e da NBR 8681 (1984). O método AFORM (Advanced First-Order Reliability Method) foi utilizado. Foram consideradas como variáveis aleatórias as resistências dos materiais, os carregamentos e os parâmetros geométricos da seção transversal da viga. Incluiu-se uma variável aleatória para representar o erro contido no modelo utilizado para a flexão. Foram obtidos valores de índice de confiabilidade para 24 vigas analisadas à

flexão e 48 vigas analisadas à força cortante. Para análise a flexão obteve-se o menor índice de confiabilidade (maior probabilidade de falha) quando a resistência do concreto era maior, a relação entre carga acidental e permanente era maior e a taxa de armadura longitudinal era menor. O maior índice de confiabilidade foi obtido para a situação contrária. Para análise à força cortante o menor índice de confiabilidade foi obtido quando a resistência do concreto era maior, a relação entre carga acidental e permanente era maior, a taxa de armadura longitudinal era maior e a taxa de armadura transversal era menor. O maior índice de confiabilidade foi obtido para a situação contrária.

REAL e CAMPOS (2000) utilizaram o Método de Monte Carlo para avaliar o efeito da variabilidade das propriedades geométricas e dos materiais sobre a resposta estática da estrutura. Foram consideradas como variáveis aleatórias as propriedades mecânicas dos materiais e os parâmetros geométricos da seção transversal da viga. As correlações existentes entre as propriedades mecânicas do concreto foram levadas em consideração no modelo de geração de variáveis aleatórias. Foi empregado um modelo não-linear de elementos finitos para efetuar análises de vigas e pilares de concreto armado previamente dimensionados segundo a NBR 6118 (1980). As vigas e os pilares foram levados à ruptura com carregamento sempre crescente. A influência de cada variável aleatória foi analisada tanto para carga de serviço quanto para carga de ruptura. Foi verificado que a variabilidade da flecha em vigas sob carga de serviço é muito influenciado pela dispersão das propriedades mecânicas do concreto. Observou-se que a variabilidade da carga de ruptura das vigas, projetadas para terem uma ruptura dúctil, é controlada pela dispersão da tensão de escoamento da armadura. Para os pilares analisados, dimensionados a flexo-compressão, foi verificado que a variabilidade da resposta cresce na medida em que a dispersão das propriedades do concreto cresce, porém este efeito diminui com o aumento da taxa de armadura.

SANTOS e EBOLI (2004) analisaram um pórtico de concreto armado resistente a forças de vento. Os esforços solicitantes no pórtico foram obtidos da análise elástica efetuada com auxílio do programa SALT-UFRJ (2001). Foram consideradas como variáveis aleatórias as resistências dos materiais e os carregamentos. Incluíram-se duas variáveis aleatórias para se levar em consideração as incertezas das hipóteses de análise e do projeto estrutural, denominadas de fatores de modelagem das cargas e de fatores de modelagem das resistências. Foram obtidos valores de índice de confiabilidade, de ponto de

projeto e de sensibilidade, pela implementação computacional do método FORM para a função de estado limite à flexão da seção crítica, definida com diversos valores de área de seção transversal de armadura. Como resultado um gráfico que relaciona o valor do índice de confiabilidade com o valor da área de armadura foi apresentado. Duas soluções em particular foram analisadas, a primeira considerou a área de armadura para a qual se obteve valor de índice de confiabilidade igual a 3,80 (definido pelo Eurocode EN1990 (2001) como um valor aceitável no caso de prédios residenciais, escolas e hotéis). A segunda considera a área de armadura obtida pelo dimensionamento da seção crítica no ELU conforme especificação da NBR 6118 (2003). Para esta situação foi obtido um valor de índice de confiabilidade maior do que 3,80, indicando que o dimensionamento convencional é conservador. Os coeficientes de segurança obtidos para estas duas situações foram avaliados.

KASZYNSKA et alii (2005) avaliaram o efeito da qualidade do concreto e da mão-de-obra na confiabilidade das vigas. A análise da confiabilidade foi realizada para vigas de concreto armado e para vigas metálicas submetidas à flexão e à força cortante utilizando as prescrições do ACI 318 (2002) para as vigas de concreto armado e as prescrições AISC LRFD (1992) para as vigas metálicas. Foram consideradas como variáveis aleatórias as resistências dos materiais e os carregamentos. Os parâmetros de resistência analisados foram o fator fornecido pela relação entre o valor médio e o valor nominal (“bias factor”) e o coeficiente de variação. Os resultados obtidos indicaram que o “bias factor” é o parâmetro determinante. Quando foi avaliada a capacidade à flexão verificou-se que a resistência das barras de aço (para vigas de concreto armado) ou a resistência dos perfis de aço (para vigas metálicas) influenciaram mais. Quando foi analisada a capacidade à força cortante percebeu-se que a resistência do concreto também apresentou visível influência no valor do índice de confiabilidade.