

6

Referências Bibliográficas

[BERE88] H.R. Berenji. **Treatment of Uncertainty in Artificial Intelligence**, Machine Intelligence and Autonomy Aerospace Systems. Washington, DC, American Institute of Aeronautics and Astronautics AIAA, pp. 233-247, 1988.

[BOUC03] A. Bouchachia and R. Mittermeir, **A Neural Cascade Architecture for Document Retrieval**, Proceedings of the 2003 IEEE International Joint Conference on Neural Networks, Vol. 3, pp. 1915-1920, July 2003.

[BROW95] M. Brown, K. M. Bossley, D. J. Mills and C. J. Harris, **High Dimensional Neuro-Fuzzy Systems: Overcoming the Curse of Dimensionality**, Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, International Joint Conference of the Fourth IEEE International Conference on Fuzzy Systems and the Second International Fuzzy Engineering Symposium, Yokohama, Japan, Vol. 4, pp. 2139-2146, March 1995.

[CAO97] Y. Cao and D. Rossiter. **An Input Pre-screening Technique for Control Structure Selection**. Computers and Chemical Engineering, Vol. 21, No 6, pp. 563-569, February 1997.

[CAST04] O. Castillo and P. Melin, **A New Approach for Plant Monitoring Using Type-2 Fuzzy Logic and Fractal Theory**, International Journal of General Systems, Vol. 33, No. 2, pp. 305-319, April 2004.

[CHAN90] J.-W. Chang and C.-C. Yu. **The Relative Gain for Non-Square Multivariable Systems**, Chemical Engineering Science, Elsevier, Vol 45, No. 5, pp. 1309-1323, 1990.

[CHIN89] N. Chin and S. Feiner, **Near Real-Time Shadow Generation Using BSP Trees**, International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, Proceedings of the 16th Annual Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH '89 Proceedings, USA, Vol. 23, No. 3, pp. 99-106, July 1989.

[CHRY92] Y. Chrysanthou and M. Slater, **Computing Dynamic Changes to BSP Trees**, Computer Graphics Forum, EUROGRAPHICS '92 Proceedings, Vol. 11, No. 3, pp. 321-332, May 1992.

[CHUN00] F.-L. Chung and J.-C. Duan, **On Multistage Fuzzy Neural Network Modeling**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 8, No. 2, pp. 125-142, December 2000.

[DIXI94] A. K. Dixit and R. S. Pindyck, **Investment under Uncertainty**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1994.

[FIGU05] J. Figueroa, J. Posada, J. Soriano, M. Melgarejo and S. Rojas, **A Type-2 Fuzzy Logic Controller for Tracking Mobile Objects in the Context of Robotic Soccer Games**, The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ'05, pp. 359-364, May 2005.

[FINK74] Finkel R. A. and Bentley J. L., **Quad-trees, a Data Structure for Retrieval on Composite Keys**, Acta Informatica, Springer Berlin / Heidelberg, Vol. 4, No. 1, pp.1-9, March 1974.

[HAGA94] M. T. Hagan and M. B. Menhaj, **Training Feedforward Networks With the Marquardt Algorithm**, IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 5, No. 6, pp. 989-993, November 1994.

[HAGA96] M. T. Hagan, H. B. Demuth and M. H. Beale, **Neural Network Design**, PWS Publishing Co. Boston, MA, USA, 1997.

[INNO01-I] P. R. Innocent, I. Belton and D. Finlay, **Type-2 Fuzzy Representation of Lung Scans to Predict Pulmonary Emboli**, Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Vol. 4, No. 25-28, pp. 1902-1907, July 2001.

[INNO01-II] P. R. Innocent, R. I. John and J. M. Garibaldi, **The Fuzzy Medical Group in the Centre for Computational Intelligence**, Artificial Intelligence in Medicine, Vol. 21, No. 1-3, pp. 163-170, 2001.

[INNO02] P. R. Innocent and R. I. John, **Type-2 Fuzzy Diagnosis**, Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE'02, Honolulu, HI, USA, Vol. 2, pp. 1326-1330, 2002.

[JANG95] J.-S. R. Jang and C.-T. Sun, **Neuro-Fuzzy Modeling and Control**, Proceedings of the IEEE, Vol. 83, No. 3, pp. 378-406, March 1995.

[JANG96] J.-S. R. Jang, **Input Selection for ANFIS Learning**, Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vol. 2, pp. 1493-1499, Orleans, LA, USA, September 1996, Department of Computer Science, National Tsing Hua University Hsinchu, Taiwan.

[JANG97] J.-S. R. Jang, C.-T. Sun and E. Mizutani, **Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A computational Approach to Learning and Machine Intelligence**, Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, N. J. USA, 1997.

[JANI99] C. Z. JaniKow and M. Faifer, **Fuzzy Partitioning with FID3.1**, Proceedings of the 18th International Conference of the North America Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS, New York, NY, USA, pp. 467-471, July 1999.

[JIME02] R. Jiménez. C., **Técnicas de Seleção de Características Aplicadas a Modelos Neuro-Fuzzy Hierárquicos BSP**, Tese de Mestrado, DEE-Puc-Rio, 2002.

[JIME05] R. Jiménez. C., M. M. B. R. Vellasco and R. Tanscheit, **Feature Selection Techniques Applied to Hierarchical Neuro-Fuzzy BSP Models**, Proceedings of IFSA 2005, XI International Fuzzy Systems Association World Congress, Beijing, pp. 1316-1320, 2005.

[JOHN98-I] R. I. John, **Type-2 Fuzzy Sets for Knowledge Representation and Inferencing**, The 1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Anchorage, AK, USA, Vol. 2, pp. 1003-1008, May 1998.

[JOHN98-II] R. I. John and C. Czarnecki, **A Type-2 Adaptive Fuzzy Inferencing System**, The 1998 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, San Diego, CA, USA, Vol. 2, pp. 2068-2073, October 1998.

[JOHN98-III] R. I. John, P. R. Innocent and M. R. Barnes, **Type-2 Fuzzy Sets and Neuro-Fuzzy Clustering of Radiographic Tibia Images**, The 1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Anchorage, AK, USA, Vol. 2, pp. 1373-1376, May 1998.

[JOHN99] R. I. John and C. Czarnecki, **An Adaptive Type-2 Fuzzy Systems for Learning Linguistic Membership Grades**, The 1999 IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceedings, FUZZ-IEEE '99, Seoul, South Korea, Vol. 3, pp. 1552-1556, August 1999.

[KARN98-I] N. N. Karnik and J. M. Mendel, **An introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems**, The 1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Vol. 2, pp. 915-920, May 1998.

[KARN98-II] N. N. Karnik and J. M. Mendel, **Type-2 Fuzzy Logic Systems: Type-Reduction**, The 1998 IEEE International Conference on

Systems, Man, and Cybernetics, San Diego, CA, USA, Vol. 2, pp. 2046-2051, October 1998.

[KARN99-I] N. N. Karnik, J. M. Mendel and Q. Liang, **Type-2 Fuzzy Logic Systems**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 7, No. 6, pp. 643-658, December 1999.

[KARN99-II] N. N. Karnik and J. M. Mendel, **Applications of Type-2 Fuzzy Logic Systems to Forecasting of Time-series**, Information Sciences, Vol. 120, No. 1, pp. 89-111, November 1999.

[KLIR88] G. J. Klir and T. A. Folger, **Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

[KLIR95] G. J. Klir and B. Yuan, **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications**, Ed. Prentice Hall USA, 1995.

[KLIR98] G. J. Klir and M. J. Wierman, **Uncertainty-Based Information**, Physica-Verlag, Heidelberg, Germany, 1998.

[LANA00] A. I. Lanas, **Sistemas Neuro-Fuzzy Hierárquicos BSP para Previsão e Extração de Regras Fuzzy em Aplicações de Mineração de Dados**, Tese de Mestrado, DEE-Puc-Rio, 2000.

[LEE04] C.-H. Lee and Y.-C. Lin, **Control of Nonlinear Uncertain Systems Using Type-2 Fuzzy Neural Networks and Adaptive Filter**, Proceedings of The 2004 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, Taipei, Taiwan, Vol. 2, pp. 1177-1182, March 2004.

[LIAN99] Q. Liang and J. M. Mendel, **An Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems**, The 1999 IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceedings, Seoul, Korea, August 1999.

[LIAN00-I] Q. Liang and J. M. Mendel, **Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems**, The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ IEEE 2000, San Antonio, TX, USA, Vol. 1, pp. 328-333, May 2000.

[LIAN00-II] Q. Liang and J. M. Mendel, **Overcoming Time-Varying Co-Channel Interference Using Type-2 Fuzzy Adaptive Filters**, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, Vol. 47, No. 12, pp. 1419-1428, December 2000.

[LIAN00-III] Q. Liang, N. N. Karnik and J. M. Mendel, **Connection Admission Control in ATM Networks Using Survey-Based Type-2 Fuzzy Logic Systems**, IEEE Transactions on Systems, Man. And Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, Vol. 30, No. 3, pp. 329-339, August 2000.

[LIAN00-IV] Q. Liang and J. M. Mendel, **Equalization of Nonlinear Time-Varying Channels Using Type-2 Fuzzy Adaptive Filters**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 8, No. 5, pp. 551-563, October 2000.

[LIAN00-V] Q. Liang and J. M. Mendel, **Decision Feedback Equalizer for Nonlinear Time-Varying Channels Using Type-2 Fuzzy Adaptive Filters**, The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ IEEE 2000, San Antonio, TX, USA , Vol. 2, pp. 883-888, 2000.

[LIAN01] Q. Liang and J. M. Mendel, **MPEG VBR Video Traffic Modeling and Classification using Fuzzy Technique**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 183-193, February 2001.

[LIN06] L. Li, W.-H. Lin and H. Liu, **Type-2 Fuzzy Logic Approach for Short-Term Traffic Forecasting**, IEE Proceedings Intelligent Transport Systems, Vol. 153, No. 1, pp. 33-40, March 2006.

[MELI02] P. Melin and O. Castillo, **Intelligent Control of Non-linear Dynamic Plants Using Type-2 Fuzzy Logic and Neural Networks**,

Proceedings of the Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS 2002, pp. 22-27, 2002.

[MELI03] P. Melin and O. Castillo, **A New Method for Adaptive Model-Based Control of Non-linear Plants Using Type-2 Fuzzy Logic and Neural Networks**, Proceedings of the 12th IEEE International Conference of Fuzzy Systems, FUZZ '03, Vol. 1, pp. 420-425, May 2003.

[MELI04] P. Melin and O. Castillo, **A New Method for Adaptive Control of Non-Linear Plants Using Type-2 Fuzzy Logic and Neural Networks**, International Journal of General Systems, Vol. 33, No. 2, pp. 289-304, 2004.

[MEND99] J. M. Mendel, **Uncertainty, Fuzzy Logic and Signal Processing**, Signal Processing, Vol. 80, pp. 913-933, 2000.

[MEND00-I] J. M. Mendel, **Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions**, Ed. Prentice Hall, USA, 2000.

[MEND00-II] J. M. Mendel, **Uncertainty, Fuzzy Logic and Signal Processing**, Ed. Elsevier Science B. V., 2000.

[MEND01] J. M. Mendel, **The Perceptual Computer: An Architecture for Computing With Words**, The 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Melbourne, Vic., Australia, Vol. 1, pp. 35-38, 2001.

[MEND02] J. M. Mendel and R. I. B. John, **Type-2 Fuzzy Sets Made Simple**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 10, No. 2, pp. 117-127, April 2002.

[MEND03-I] J. M. Mendel, **Fuzzy Sets for Words: A New Beginning**, The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ '03, Vol. 1, pp. 37-42, May 2003.

[MEND03-II] J. M. Mendel, **Type-2 Fuzzy Sets: Some Questions and Answers**, IEEE Connections, Newsletter of The IEEE Neural Networks Society, Vol. 1, pp, 10-13, August 2003.

[MEND03-III] J. M. Mendel, **Why We Need Type-2 Fuzzy Logic Systems**, disponível em: <http://www.type2fuzzylogic.org>

[MEND03-IV] J. M. Mendel, **Frequently Asked Questions About Rule-Based Type-2 Fuzzy Logic Systems**, disponível em: <http://www.type2fuzzylogic.org>

[MEND03-V] J. M. Mendel, **Applications for Rule-Based Type-2 Fuzzy Logic Systems**, disponível em: <http://www.type2fuzzylogic.org>

[MEND04] J. M. Mendel, **Computing Derivatives in Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems**, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 12, No. 1, pp. 84-98, February 2004.

[MEDE99] E. Medeiros, E. Medeiros e V. Gonçalves, **Estatística**, 3ª ed., Editora Atlas S.A, São Paulo, 1999.

[NNFC06] Artificial Neural Network & Computational Intelligence Forecasting Competition 2006/2007, disponível em: www.neural-forecasting-competition.com.

[OZEN03] T. Ozen and J. M. Garibaldi, **Investigating Adaptation in Type-2 Fuzzy Logic Systems Applied to Umbilical Acid-Base Assessment**, European Symposium on Intelligent Technologies, Hybrid Systems and Their Implementation on Smart Adaptive Systems (EUNITE 2003), Oulu, Finland, July 2003.

[PARK01] S. Park and H. Lee-Kwang, **A Designing Method for Type-2 Fuzzy Logic Systems Using Genetic Algorithms**, Proceedings Joint

9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Vancouver, BC, Canada, Vol. 5, pp. 2567-2572, July 2001.

[PHOK04-I] P. Phokharatkul and S. Phaiboon, **Mobile Propagation Path Loss Models for Suburban Areas Using Type-2 Fuzzy Logic Approximation**, 4th International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology Proceedings, ICMMT 2004, pp. 158-162, August 2004.

[PHOK04-II] P. Phokharatkul and S. Phaiboon, **Mobile Robot Control Using Type-2 Fuzzy Logic Systems**, Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, Singapore, Vol. 1, pp. 296-299, December 2004.

[PWT2] Sistemas de Lógica Fuzzy do Tipo 2, disponível em: <http://www.type2fuzzylogic.org>.

[RHEE01] F. C.-H Rhee and C. Hwang, **A Type-2 Fuzzy C-Means Clustering Algorithm**, Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Vancouver, BC, Canada Vol. 4, pp. 1926-1929, July 2001.

[RHEE02] F. C.-H. Rhee and C. Hwang, **An Interval Type-2 Fuzzy Perceptron**, Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE'02, Honolulu, HI, USA, Vol. 2, pp. 1331-1335, April 2002.

[RHEE03] F. C.-H. Rhee and C. Hwang, **An Interval Type-2 K-Nearest Neighbor**, The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ'03, Vol. 2, pp. 802-807, May 2003.

[SEPU05] R. Sepulveda, O. Castillo, P. Melin, A. Rodriguez-Diaz and O. Montiel, **Handling Uncertainty in Controllers Using Type-2 Fuzzy**

Logic, The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ'05, pp. 248-253, May 2005.

[SOUZ99] F. J. Souza, **Modelos Neuro-Fuzzy Hierárquicos**, Tese de Doutorado, DEE-Puc-Rio, 1999.

[SOUZ02] F. J. Souza, M. M. B. R. Vellasco and M. A. C. Pacheco, **Hierarchical Neuro-Fuzzy Quadtree Models**, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 130, No. 2, pp. 189-205, September 2002

[SPIE93] M. R. Spiegel, **Estatística**, 3ª ed. Mackron Books, São Paulo, 1993.

[UNCU03] O. Uncu and I.B. Turksen, **A New Two-Step Fuzzy Inference Approach Based on Takagi-Sugeno Inference Using Discrete Type-2 Fuzzy Sets**, The 22nd International Conference of The North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS 2003, pp. 32-37, July 2003.

[WANG03] C.-H Wang, C.-S. Cheng and T.-T. Lee, **Dynamical Optimal Training for Interval Type-2 Fuzzy Neural Network (T2FNN)**, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 4, pp. 3663-3668, October 2003.

[WANG04] C.-H. Wang, C.-S. Cheng and T.-T. Lee, **Dynamical Optimal Training for Interval Type-2 Fuzzy Neural Network (T2FNN)**, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics, Vol. 34, No. 3, pp 1462-1477, June 2004.

[WEIG94] A. S. Weigend and N. A. Gershenfeld editors, **Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past**. Addison Wesley, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, 1994.

[ZENG06] J. Zeng and Z.-Q. Liu, **Type-2 Fuzzy Sets for Handling Uncertainty in Pattern Recognition**, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vancouver, BC, Canada, pp. 1247-1252, July 2006.

Apêndice A

Cálculo da Saída do Modelo NFHB-T2

Seja o modelo NFHB-T2 dado pela Figura A.1:

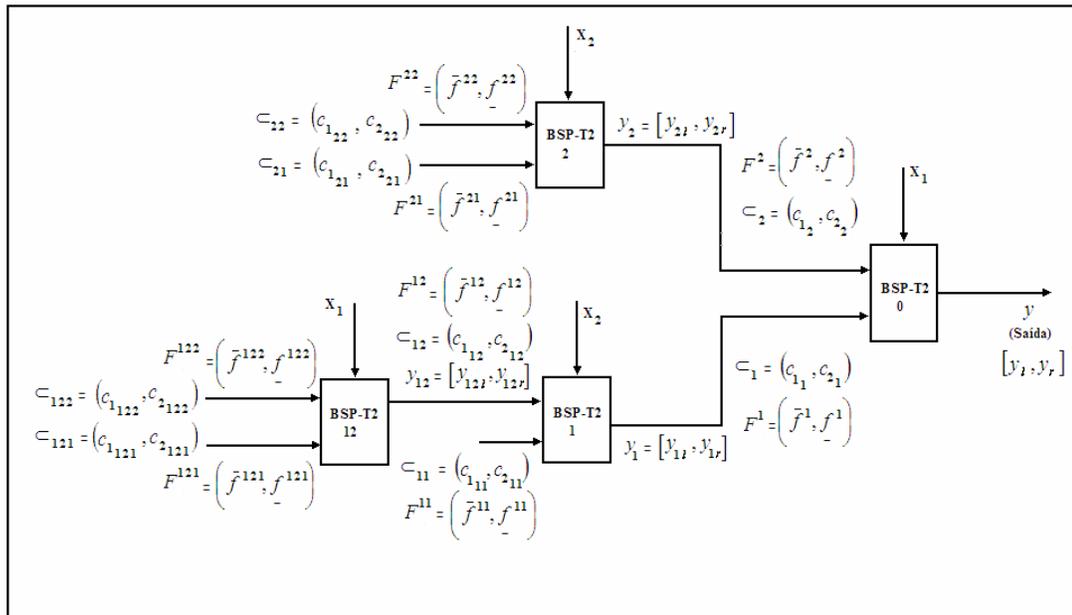


Figura A.1 - Exemplo de uma arquitetura do modelo NFHB-T2

Para a célula BSP-T2 12

O ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída da célula BSP-T2 12 é dado por:

$$y_{12l} = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^{12i} y_{12l}^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^{12i}} = \frac{g_l^{121} c_{121} + g_l^{122} c_{122}}{g_l^{121} + g_l^{122}} \quad \text{Equação A.1}$$

O ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída da célula BSP-T2 12 é dado por:

$$y_{12r} = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^{12i} y_{12r}^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^{12i}} = \frac{g_r^{121} c_{2_{121}} + g_r^{122} c_{2_{122}}}{g_r^{121} + g_r^{122}} \quad \text{Equação A.2}$$

onde, do teorema C.1 descrito no apêndice C:

- se $c_{1_{121}} < c_{1_{122}}$ então $g_l^{121} = \bar{f}^{121}$ e $g_l^{122} = \underline{f}^{122}$
- se $c_{1_{121}} > c_{1_{122}}$ então $g_l^{121} = \underline{f}^{121}$ e $g_l^{122} = \bar{f}^{122}$
- se $c_{2_{121}} < c_{2_{122}}$ então $g_r^{121} = \underline{f}^{121}$ e $g_r^{122} = \bar{f}^{122}$
- se $c_{2_{121}} > c_{2_{122}}$ então $g_r^{121} = \bar{f}^{121}$ e $g_r^{122} = \underline{f}^{122}$

portanto, a saída crisp da célula BSP-T2 12 é dada por:

$$y_{12} = \frac{y_{12l} + y_{12r}}{2} \quad \text{Equação A.3}$$

Para a célula BSP-T2 1

O ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída da célula BSP-T2 1 é dado por:

$$y_{1l} = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^{1i} y_{1l}^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^{1i}} = \frac{g_l^{11} c_{1_{11}} + g_l^{12} c_{1_{12}}}{g_l^{11} + g_l^{12}} \quad \text{Equação A.4}$$

O ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída da célula BSP-T2 1 é dado por:

$$y_{1r} = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^{1i} y_{1r}^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^{1i}} = \frac{g_r^{11} c_{211} + g_r^{12} c_{212}}{g_r^{11} + g_r^{12}} \quad \text{Equação A.5}$$

onde, do teorema C.1:

$$\text{se } c_{1_{11}} \langle c_{1_{12}} \text{ então } g_l^{11} = \bar{f}^{11} \text{ e } g_l^{12} = \underline{f}^{12}$$

$$\text{se } c_{1_{11}} \rangle c_{1_{12}} \text{ então } g_l^{11} = \underline{f}^{11} \text{ e } g_l^{12} = \bar{f}^{12}$$

$$\text{se } c_{2_{11}} \langle c_{2_{12}} \text{ então } g_r^{11} = \underline{f}^{11} \text{ e } g_r^{12} = \bar{f}^{12}$$

$$\text{se } c_{2_{11}} \rangle c_{2_{12}} \text{ então } g_r^{11} = \bar{f}^{11} \text{ e } g_r^{12} = \underline{f}^{12}$$

portanto, a saída crisp da célula BSP-T2 1 é dada por:

$$y_1 = \frac{y_{1l} + y_{1r}}{2} \quad \text{Equação A.6}$$

Para a célula BSP-T2 2

O ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída da célula BSP-T2 2 é dado por:

$$y_{2l} = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^{2i} y_{2l}^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^{2i}} = \frac{g_l^{21} c_{121} + g_l^{22} c_{122}}{g_l^{21} + g_l^{22}} \quad \text{Equação A.7}$$

O ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída da célula BSP-T2 2 é dado por:

$$y_{2r} = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^{2i} y_{2r}^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^{2i}} = \frac{g_r^{21} c_{2_{21}} + g_r^{22} c_{2_{22}}}{g_r^{21} + g_r^{22}} \quad \text{Equação A.8}$$

onde, do teorema C.1:

$$\text{se } c_{1_{21}} < c_{1_{22}} \text{ então } g_l^{21} = \bar{f}^{21} \text{ e } g_l^{22} = \underline{f}^{22}$$

$$\text{se } c_{1_{21}} > c_{1_{22}} \text{ então } g_l^{21} = \underline{f}^{21} \text{ e } g_l^{22} = \bar{f}^{22}$$

$$\text{se } c_{2_{21}} < c_{2_{22}} \text{ então } g_r^{21} = \underline{f}^{21} \text{ e } g_r^{22} = \bar{f}^{22}$$

$$\text{se } c_{2_{21}} > c_{2_{22}} \text{ então } g_r^{21} = \bar{f}^{21} \text{ e } g_r^{22} = \underline{f}^{22}$$

portanto, a saída crisp da célula BSP-T2 2 é dada por:

$$y_2 = \frac{y_{2l} + y_{2r}}{2} \quad \text{Equação A.9}$$

Para a saída do Modelo NFHB-T2

O ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída do modelo NFHB-T2 é dado por:

$$y_l = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^i y_l^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^i} = \frac{g_l^1 c_{1_1} + g_l^2 c_{1_2}}{g_l^1 + g_l^2} \quad \text{Equação A.10}$$

O ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída do modelo NFHB-T2 é dado por:

$$y_r = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^i y_r^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^i} = \frac{g_r^1 c_{2_1} + g_r^2 c_{2_2}}{g_r^1 + g_r^2} \quad \text{Equação}$$

A.11

onde, do teorema C.1:

$$\text{se } c_{1_1} \langle c_{1_2} \text{ então } g_l^1 = \bar{f}^1 \text{ e } g_l^2 = \underline{f}^2$$

$$\text{se } c_{1_1} \rangle c_{1_2} \text{ então } g_l^1 = \underline{f}^1 \text{ e } g_l^2 = \bar{f}^2$$

$$\text{se } c_{2_1} \langle c_{2_2} \text{ então } g_r^1 = \underline{f}^1 \text{ e } g_r^2 = \bar{f}^2$$

$$\text{se } c_{2_1} \rangle c_{2_2} \text{ então } g_r^1 = \bar{f}^1 \text{ e } g_r^2 = \underline{f}^2$$

portanto, a saída crisp do modelo NFHB-T2 é dada por:

$$y = \frac{y_L + y_r}{2} \quad \text{Equação A.12}$$

Da Figura A.1 pode-se observar que:

$$c_{1_1} = y_{1l} \quad \text{e} \quad c_{2_1} = y_{1r}$$

$$c_{1_2} = y_{2l} \quad \text{e} \quad c_{2_2} = y_{2r}$$

$$c_{1_{12}} = y_{12l} \quad \text{e} \quad c_{2_{12}} = y_{12r}$$

assim, substituindo as equações de A.1 até A.9 nas equações A.10 e A.11 têm-se que, o ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída do modelo NFHB-T2 passa a ser:

$$y_l = \frac{g_l^1 c_{1_1} + g_l^2 c_{1_2}}{g_l^1 + g_l^2} = \frac{g_l^1 \left(\frac{g_l^{11} c_{1_{11}} + g_l^{12} c_{1_{12}}}{g_l^{11} + g_l^{12}} \right) + g_l^2 \left(\frac{g_l^{21} c_{1_{21}} + g_l^{22} c_{1_{22}}}{g_l^{21} + g_l^{22}} \right)}{g_l^1 + g_l^2}$$

Equação A.13

$$y_l = \frac{g_l^1 \left(\frac{g_l^{11} c_{1_{11}} + g_l^{12} \left(\frac{g_l^{121} c_{1_{121}} + g_l^{122} c_{1_{122}}}{g_l^{121} + g_l^{122}} \right)}{g_l^{11} + g_l^{12}} \right) + g_l^2 \left(\frac{g_l^{21} c_{1_{21}} + g_l^{22} c_{1_{22}}}{g_l^{21} + g_l^{22}} \right)}{g_l^1 + g_l^2}$$

Equação A.14

e o ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída do modelo NFHB-T2 passa a ser:

$$y_r = \frac{g_r^1 c_{2_1} + g_r^2 c_{2_2}}{g_r^1 + g_r^2} = \frac{g_r^1 \left(\frac{g_r^{11} c_{2_{11}} + g_r^{12} c_{2_{12}}}{g_r^{11} + g_r^{12}} \right) + g_r^2 \left(\frac{g_r^{21} c_{2_{21}} + g_r^{22} c_{2_{22}}}{g_r^{21} + g_r^{22}} \right)}{g_r^1 + g_r^2} \quad \text{Equação A.15}$$

$$y_r = \frac{g_r^1 \left(\frac{g_r^{11} c_{2_{11}} + g_r^{12} \left(\frac{g_r^{121} c_{2_{121}} + g_r^{122} c_{2_{122}}}{g_r^{121} + g_r^{122}} \right)}{g_r^{11} + g_r^{12}} \right) + g_r^2 \left(\frac{g_r^{21} c_{2_{21}} + g_r^{22} c_{2_{22}}}{g_r^{21} + g_r^{22}} \right)}{g_r^1 + g_r^2}$$

Equação A.16

portanto, são demonstradas as equações 3.18 e 3.19 do capítulo 3.

Das Equações 3.13, 3.14 e 3.15 do capítulo 3, e, já que usamos funções de pertinência sigmóides do tipo 2 complementares obtêm-se as seguintes simplificações:

$$g_l^1 + g_l^2 = 1$$

$$g_l^{11} + g_l^{12} = 1$$

$$g_l^{21} + g_l^{22} = 1$$

$$g_l^{121} + g_l^{122} = 1$$

Equações A.17

$$g_r^1 + g_r^2 = 1$$

$$g_r^{11} + g_r^{12} = 1$$

$$g_r^{21} + g_r^{22} = 1$$

$$g_r^{121} + g_r^{122} = 1$$

Equações A.18

aplicando as equações A.17 e A.18 nas equações A.14 e A.16, têm-se:

$$y_l = g_l^1 (g_l^{11} c_{11} + g_l^{12} (g_l^{121} c_{121} + g_l^{122} c_{122})) + g_l^2 (g_l^{21} c_{121} + g_l^{22} c_{122}) \quad \text{Equação A.19}$$

$$y_r = g_r^1 (g_r^{11} c_{21} + g_r^{12} (g_r^{121} c_{2121} + g_r^{122} c_{2122})) + g_r^2 (g_r^{21} c_{221} + g_r^{22} c_{222}) \quad \text{Equação A.20}$$

portanto, a saída crisp do sistema da Figura A.1 é dada pela equação A.21, a seguir.

$$y = 1/2 [g_l^1 (g_l^{11} c_{11} + g_l^{12} (g_l^{121} c_{121} + g_l^{122} c_{122})) + g_l^2 (g_l^{21} c_{121} + g_l^{22} c_{122})] + \\ 1/2 [g_r^1 (g_r^{11} c_{21} + g_r^{12} (g_r^{121} c_{2121} + g_r^{122} c_{2122})) + g_r^2 (g_r^{21} c_{221} + g_r^{22} c_{222})]$$

Equação A.21

O conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída genérico, e a saída crisp genérica do sistema NFHB-T2 de 3 níveis de hierarquia são dados pelas equações A.22, A.23 e A.24. As variáveis k_i , k_{ij} e k_{ijk} assumem apenas valores iguais a ‘0’

ou ‘1’, indicando a existência ou não das bi-partições de ordem ‘i’, ‘ij’ e ‘ijk’, respectivamente.

$$y_l = \sum_{i=1}^{M=2} g_l^i k_i c_{1_i} + \sum_{i=1}^{M=2} \sum_{j=1}^{M=2} g_l^i g_l^{ij} k_{ij} c_{1_{ij}} + \sum_{i=1}^{M=2} \sum_{j=1}^{M=2} \sum_{k=1}^{M=2} g_l^i g_l^{ij} g_l^{ijk} k_{ijk} c_{1_{ijk}} \quad \text{Equação A.22}$$

$$y_r = \sum_{i=1}^{M=2} g_r^i k_i c_{2_i} + \sum_{i=1}^{M=2} \sum_{j=1}^{M=2} g_r^i g_r^{ij} k_{ij} c_{2_{ij}} + \sum_{i=1}^{M=2} \sum_{j=1}^{M=2} \sum_{k=1}^{M=2} g_r^i g_r^{ij} g_r^{ijk} k_{ijk} c_{2_{ijk}} \quad \text{Equação A.23}$$

$$y = \frac{y_L + y_r}{2} \quad \text{Equação A.24}$$

onde:

$g_l^i, g_l^{ij}, g_l^{ijk}$ = pontos limites (esquerdos, $\underline{f}^i, \underline{f}^{ij}, \underline{f}^{ijk}$, ou direitos, $\bar{f}^i, \bar{f}^{ij}, \bar{f}^{ijk}$) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo das regras do tipo 2 de cada bi-partição i, ij, ijk , respectivamente, que estão associados aos $c_{1_i}, c_{1_{ij}}, c_{1_{ijk}}$; os valores de $g_l^i, g_l^{ij}, g_l^{ijk}$ são calculados através do teorema C.1 descrito no apêndice C;

$g_r^i, g_r^{ij}, g_r^{ijk}$ = pontos limites (esquerdos, $\underline{f}^i, \underline{f}^{ij}, \underline{f}^{ijk}$, ou direitos, $\bar{f}^i, \bar{f}^{ij}, \bar{f}^{ijk}$) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo das regras do tipo 2 de cada bi-partição i, ij, ijk , respectivamente, que estão associados aos $c_{2_i}, c_{2_{ij}}, c_{2_{ijk}}$; os valores de $g_r^i, g_r^{ij}, g_r^{ijk}$ são calculados através do teorema C.1;

$c_{1_i}, c_{1_{ij}}, c_{1_{ijk}}$ = pontos limites esquerdos dos conjuntos fuzzy *intervalares* do tipo 1 conseqüentes das regras do tipo 2 de cada bipartição i, ij, ijk ;

$c_{2_i}, c_{2_{ij}}, c_{2_{ijk}}$ = pontos limites direitos dos conjuntos fuzzy *intervalares* do tipo 1 conseqüentes das regras do tipo 2 de cada bipartição i, ij, ijk ;

k_i, k_{ij}, k_{ijk} = variáveis cujo valor será igual a ‘1’ se a partição i, ij, ijk , existir, e ‘0’ caso contrario;

Apêndice B

Ajuste de Parâmetros e Equações de *Gradient Descent* para a Célula NFHB-T2

B.1

Ajuste dos Parâmetros Antecedentes

Para uma célula NFHB-T2 o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída é defuzzificado usando a média de y_l e y_r , obtendo-se a saída (crisp) y da célula dada pela equação B.1.

$$y = \frac{1}{2} [g_l^1 c_{1_1} + g_l^2 c_{1_2} + g_r^1 c_{2_1} + g_r^2 c_{2_2}]$$

Equação B.1

na equação B.1 aplicando o teorema C.1 tem-se:

$$\text{Se } c_{1_1} \langle c_{1_2} \text{ então } g_l^1 = \bar{f}^1 = \bar{\rho}(x) \text{ e } g_l^2 = \underline{f}^2 = \underline{\mu}(x)$$

$$\text{Se } c_{1_1} \rangle c_{1_2} \text{ então } g_l^1 = \underline{f}^1 = \underline{\rho}(x) \text{ e } g_l^2 = \bar{f}^2 = \bar{\mu}(x)$$

$$\text{Se } c_{2_1} \langle c_{2_2} \text{ então } g_r^1 = \underline{f}^1 = \underline{\rho}(x) \text{ e } g_r^2 = \bar{f}^2 = \bar{\mu}(x)$$

$$\text{Se } c_{2_1} \rangle c_{2_2} \text{ então } g_r^1 = \bar{f}^1 = \bar{\rho}(x) \text{ e } g_r^2 = \underline{f}^2 = \underline{\mu}(x)$$

onde:

x = variável de entrada;

c_{1_i} = ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente da i -ésima regra do tipo 2;

c_{2_i} = ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente da i -ésima regra do tipo 2;

g_l^i = ponto limite (esquerdo \underline{f}^i ou direito \bar{f}^i) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da i -ésima regra do tipo 2 associado a c_{1_i} . Os

valores de g_l^i são calculados através do teorema C.1 descrito no apêndice C;

g_r^i = ponto limite (esquerdo \underline{f}^i ou direito \bar{f}^i) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da i -ésima regra do tipo 2 associado a c_{2_i} . Os

valores de g_r^i são calculados através do teorema C.1;

$\bar{\mu}_{\tilde{\rho}}(x) = \bar{\rho}(x)$, $\underline{\mu}_{\tilde{\rho}}(x) = \underline{\rho}(x)$ = graus de pertinência superior e inferior do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 2 *baixo* $\tilde{\rho}$, respectivamente;

$\bar{\mu}_{\tilde{\mu}}(x) = \bar{\mu}(x)$, $\underline{\mu}_{\tilde{\mu}}(x) = \underline{\mu}(x)$ = graus de pertinência superior e inferior do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 2 *alto* $\tilde{\mu}$, respectivamente;

Na célula NFB-T2 os \bar{f}^1 e \underline{f}^1 se confundem com os $\bar{\rho}(x)$ e $\underline{\rho}(x)$; e os \bar{f}^2 e \underline{f}^2 se confundem com os $\bar{\mu}(x)$ e $\underline{\mu}(x)$, respectivamente.

As funções de pertinência primárias das funções de pertinência sigmóides do tipo 2 $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\mu}$ são dadas pelas equações B.2 e B.3. A equação B.2 descreve as funções de pertinência primárias sigmóide de $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\mu}$ com inclinação, 'a', de valor fixo e ponto médio de transição com incerteza assumindo valores em $[b_1, b_2]$.

$$\mu_{\rho}(x) = sig[a, b, x] = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}, \quad b \in [b_1, b_2] \quad \text{Equação B.2}$$

$$\mu_{\mu}(x) = 1 - \mu_{\rho}(x) \quad \text{Equação B.3}$$

onde:

a = parâmetro que define a inclinação das funções de pertinência do tipo 2 $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\mu}$

b_1, b_2 = parâmetros que definem a incerteza relacionada ao ponto médio de transição das funções de pertinência do tipo 2 $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\mu}$

As funções de pertinência intervalares do tipo 2 $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\mu}$ são tais que $\bar{\rho}(x)$ e $\underline{\mu}(x)$, e, $\underline{\rho}(x)$ e $\bar{\mu}(x)$ são complementares:

$$\bar{\rho}(x) + \underline{\mu}(x) = 1 \quad \text{Equação B.4}$$

$$\underline{\rho}(x) + \bar{\mu}(x) = 1 \quad \text{Equação B.5}$$

Através do método de *Gradient Descent* cada parâmetro antecedente ajustável é atualizado segundo a equação B.6.

$$\theta(n+1) = \theta(n) - \alpha_{\theta} \left. \frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} \right|_n \quad \text{Equação B.6}$$

onde:

θ = qualquer parâmetro dos antecedentes ou conseqüentes do modelo NFHB-T2

α_{θ} = taxa de aprendizado

Para minimizar o erro médio quadrático pelo método de *Gradient Descent* é necessário calcular o gradiente do erro em relação aos parâmetros antecedentes ajustáveis da célula BSP-T2: a , b_1 , b_2 .

O erro médio quadrático é dado pela equação B.7:

$$e^{(t)} = \frac{1}{2} [y(x^{(t)}) - y(x^{d(t)})]^2 \quad \text{Equação B.7}$$

$$y(x^{(t)}) = \frac{y_l(x^{(t)}) + y_r(x^{(t)})}{2} \quad \text{Equação B.8}$$

onde:

$y(x^{(t)})$ = saída crisp do modelo NFHB-T2;

$y(x^{d(t)})$ = saída crisp desejada do modelo NFHB-T2;

$y_l(x^{(t)})$ = ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída do modelo NFHB-T2;

$y_r(x^{(t)})$ = ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída do modelo NFHB-T2;

portanto, derivando o erro médio quadrático $e^{(t)}$ em relação ao parâmetro antecedente a ser ajustado, tem-se:

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{\partial e^{(t)}}{\partial y(x^{(t)})} \left[\frac{\partial y(x^{(t)})}{\partial y_l(x^{(t)})} + \frac{\partial y(x^{(t)})}{\partial y_r(x^{(t)})} \right] \quad \text{Equação B.9}$$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{\partial e^{(t)}}{\partial y(x^{(t)})} \left[\frac{\partial y(x^{(t)})}{\partial y_l(x^{(t)})} \cdot \frac{\partial y_l(x^{(t)})}{\partial \theta} + \frac{\partial y(x^{(t)})}{\partial y_r(x^{(t)})} \cdot \frac{\partial y_r(x^{(t)})}{\partial \theta} \right] \quad \text{Equação B.10}$$

finalmente obtêm-se:

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} [y(x^{(t)}) - y(x^{d(t)})] \left[\frac{\partial y_l(x^{(t)})}{\partial \theta} + \frac{\partial y_r(x^{(t)})}{\partial \theta} \right] \quad \text{Equação}$$

B.11

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} [E] \left[\frac{\partial y_l(x^{(t)})}{\partial \theta} + \frac{\partial y_r(x^{(t)})}{\partial \theta} \right] \quad \text{Equação B.12}$$

Desta forma é necessário calcular a derivada parcial de $y_l(x^{(t)})$ e $y_r(x^{(t)})$ do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída para cada parâmetro antecedente ajustável (a , b_1 , b_2) de cada célula do modelo NFHB-T2.

Seja y^{cel-k} o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída da célula 'k' dentro de uma estrutura NFHB-T2, e y_l^{cel-k} , y_r^{cel-k} os pontos limites esquerdo e direito do conjunto de saída y^{cel-k} , como mostrado na Figura B.1.

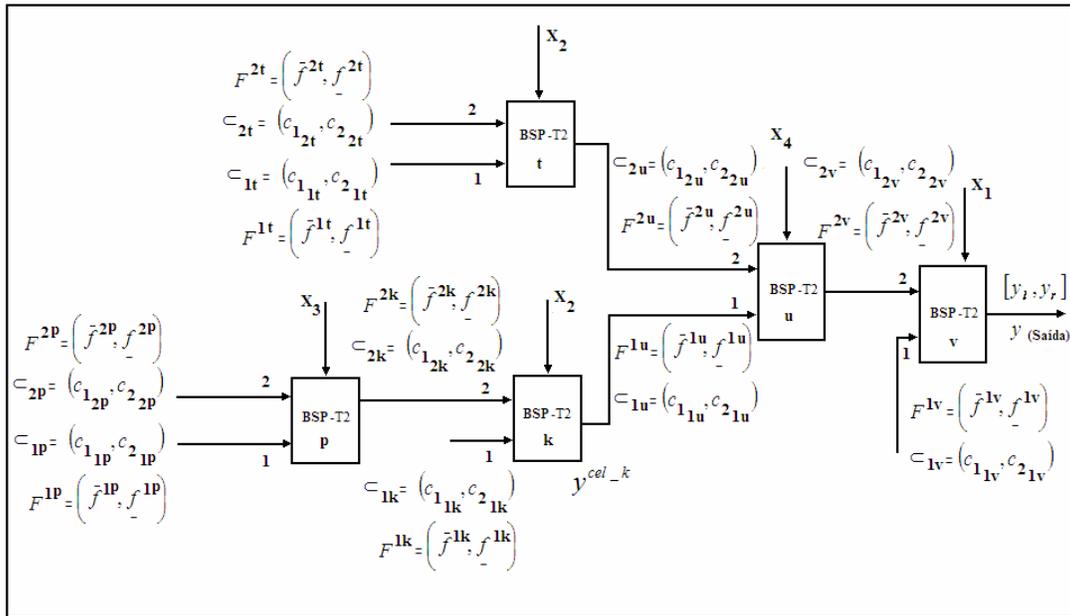


Figura B.1. Detalhe de um modelo NFHB-T2 mostrando a saída da célula k

Das equações 3.22 e 3.23 no capítulo 3, a contribuição da saída desta célula k sobre os pontos limites esquerdo $y_l(x^{(t)})$ e direito $y_r(x^{(t)})$ do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída total do modelo NFHB-T2 são, respectivamente:

$$H_l^k = g_l^{2v} g_l^{1\mu} g_l^{2k} c_{1_{2k}} + g_l^{2v} g_l^{1\mu} g_l^{1k} c_{1_{1k}} \quad \text{Equação B.13}$$

e

$$H_r^k = g_r^{2v} g_r^{1\mu} g_r^{2k} c_{2_{2k}} + g_r^{2v} g_r^{1\mu} g_r^{1k} c_{2_{1k}} \quad \text{Equação}$$

B.14

Da equação B.13 para H_l^k tem-se:

$$H_l^k = g_l^{2v} g_l^{1\mu} (g_l^{2k} c_{1_{2k}} + g_l^{1k} c_{1_{1k}}) \quad \text{Equação B.15}$$

$$H_l^k = \Pi g_l^k (g_l^{2k} c_{1_{2k}} + g_l^{1k} c_{1_{1k}}) \quad \text{Equação B.16}$$

onde:

$c_{1_{2k}}$ = ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente da $2k$ -ésima regra do tipo 2 da célula k ;

$c_{1_{1k}}$ = ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente da $1k$ -ésima regra do tipo 2 da célula k ;

g_l^{2k} = ponto limite (esquerdo \underline{f}^{2k} ou direito \bar{f}^{2k}) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da $2k$ -ésima regra do tipo 2 associado a $c_{1_{2k}}$;

g_l^{1k} = ponto limite (esquerdo \underline{f}^{1k} ou direito \bar{f}^{1k}) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da $1k$ -ésima regra do tipo 2 associado a $c_{1_{1k}}$;

e o fator $\prod g_l^k$ corresponde ao produto de todos os pontos limites esquerdos \underline{f}^i 's ou direitos \bar{f}^i 's dos conjuntos fuzzy *intervalares* do tipo 1 dos níveis de disparo das regras do tipo 2 associadas aos c_{1_i} 's das células que ligam a célula k à saída. Na Figura B.1 este fator é dado por:

$$\prod g_l^k = g_l^{2v} g_l^{1u} \quad \text{Equação}$$

B.17

onde:

g_l^{2v} = ponto limite (esquerdo \underline{f}^{2v} ou direito \bar{f}^{2v}) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da $2v$ -ésima regra do tipo 2 da célula v associado ao ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente $c_{1_{2v}}$ desta regra;

g_l^{1u} = ponto limite (esquerdo \underline{f}^{1u} ou direito \bar{f}^{1u}) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da $1u$ -ésima regra do tipo 2 da célula u associado ao ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente $c_{1_{1u}}$ desta regra;

e os valores de g_l^{2v} e g_l^{1u} são determinados pelo teorema C.1.

Da equação B.14 para H_r^k tem-se:

$$H_r^k = g_r^{2v} g_r^{1\mu} (g_r^{2k} c_{2_{2k}} + g_r^{1k} c_{2_{1k}}) \quad \text{Equação B.18}$$

$$H_r^k = \prod g_r^k (g_r^{2k} c_{2_{2k}} + g_r^{1k} c_{2_{1k}}) \quad \text{Equação}$$

B.19

onde:

$c_{2_{2k}}$ = ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente da *2k-ésima* regra do tipo 2 da célula *k*;

$c_{2_{1k}}$ = ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente da *1k-ésima* regra do tipo 2 da célula *k*;

g_r^{2k} = ponto limite (esquerdo \underline{f}^{2k} ou direito \bar{f}^{2k}) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da *2k-ésima* regra do tipo 2 associado a $c_{2_{2k}}$;

g_r^{1k} = ponto limite (esquerdo \underline{f}^{1k} ou direito \bar{f}^{1k}) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da *1k-ésima* regra do tipo 2 associado a $c_{2_{1k}}$;

o fator $\prod g_r^k$ corresponde ao produto de todos os pontos limites \underline{f}^i 's ou direitos \bar{f}^i 's dos conjunto fuzzy *intervalares* do tipo 1 dos níveis de disparo das regras do tipo 2 associadas aos c_{2_i} 's das células que ligam a célula *k* à saída. Na Figura B.1 este fator é dado por:

$$\prod g_r^k = g_r^{2v} g_r^{1\mu} \quad \text{Equação}$$

B.20

onde:

g_r^{2v} = ponto limite (esquerdo \underline{f}^{2v} ou direito \bar{f}^{2v}) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da *2v-ésima* regra do tipo 2 da célula *v* associado ao ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente $c_{2_{2v}}$ desta regra;

g_r^{1u} = ponto limite (esquerdo \underline{f}^{1u} ou direito \bar{f}^{1u}) do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 do nível de disparo da *1u-ésima* regra do tipo 2 da célula *u*

associado ao ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $c_{2_{1u}}$ desta regra;

os valores de g_r^{2v} e g_r^{1u} são determinados pelo teorema C.1.

Desta forma, a dependência dos pontos limites esquerdo $y_l(x^{(t)})$ e direito $y_r(x^{(t)})$ do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída total $y(x^{(t)})$ em relação a y_l^{cel-k} e y_r^{cel-k} são dados pelas equações B.21 e B.22:

$$y_l = H_l^k + \psi_l \tag{Equação B.21}$$

e

$$y_r = H_r^k + \psi_r \tag{Equação B.22}$$

nas equações B.21 e B.22 e em adiante, para fins de simplificação, serão utilizados os seguintes termos: $y_l = y_l(x^{(t)})$, $y_r = y_r(x^{(t)})$, $y = y(x^{(t)})$. Portanto tem-se:

$$y_l = \prod g_l^k y_l^{cel-k} + \psi_l \tag{Equação B.23}$$

$$y_r = \prod g_r^k y_r^{cel-k} + \psi_r \tag{Equação B.24}$$

onde:

$$y_l^{cel-k} = g_l^{2k} c_{1_{2k}} + g_l^{1k} c_{1_{1k}} \tag{Equação B.25}$$

$$y_r^{cel-k} = g_r^{2k} c_{2_{2k}} + g_r^{1k} c_{2_{1k}} \tag{Equação B.26}$$

ψ_l e ψ_r representam a soma das parcelas que influenciam os pontos y_l e y_r do conjunto de saída total y exceto a célula k respectivamente.

O cálculo das derivadas parciais dos pontos y_l e y_r do conjunto de saída total y do modelo NFHB-T2 em relação a cada um dos parâmetros antecedentes a^k, b_1^k e b_2^k da célula k é dado pelas seguintes equações:

$$\partial y_l / \partial a^k = \partial (\prod g_l^k y_l^{cel-k} + \psi_l) / \partial a^k \tag{Equação B.27}$$

$$\partial y_r / \partial a^k = \partial (\Pi g_r^k y_r^{cel-k} + \psi_r) / \partial a^k \quad \text{Equação B.28}$$

$$\partial y_l / \partial b_1^k = \partial (\Pi g_l^k y_l^{cel-k} + \psi_l) / \partial b_1^k \quad \text{Equação B.29}$$

$$\partial y_r / \partial b_1^k = \partial (\Pi g_r^k y_r^{cel-k} + \psi_r) / \partial b_1^k \quad \text{Equação B.30}$$

$$\partial y_l / \partial b_2^k = \partial (\Pi g_l^k y_l^{cel-k} + \psi_l) / \partial b_2^k \quad \text{Equação B.31}$$

$$\partial y_r / \partial b_2^k = \partial (\Pi g_r^k y_r^{cel-k} + \psi_r) / \partial b_2^k \quad \text{Equação B.32}$$

como $\psi_l, \psi_r, \Pi g_l^k, \Pi g_r^k$ são independentes dos parâmetros a^k, b_1^k e b_2^k , as equações acima tornam-se:

$$\partial y_l / \partial a^k = \Pi g_l^k (\partial y_l^{cel-k} / \partial a^k) \quad \text{Equação B.33}$$

$$\partial y_r / \partial a^k = \Pi g_r^k (\partial y_r^{cel-k} / \partial a^k) \quad \text{Equação B.34}$$

$$\partial y_l / \partial b_1^k = \Pi g_l^k (\partial y_l^{cel-k} / \partial b_1^k) \quad \text{Equação B.35}$$

$$\partial y_r / \partial b_1^k = \Pi g_r^k (\partial y_r^{cel-k} / \partial b_1^k) \quad \text{Equação B.36}$$

$$\partial y_l / \partial b_2^k = \Pi g_l^k (\partial y_l^{cel-k} / \partial b_2^k) \quad \text{Equação B.37}$$

$$\partial y_r / \partial b_2^k = \Pi g_r^k (\partial y_r^{cel-k} / \partial b_2^k) \quad \text{Equação B.38}$$

Da Equação B.12, a derivada parcial do erro médio quadrático $e^{(t)}$ em relação a cada um dos parâmetros antecedentes passa a ser:

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial a^k} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left(\frac{\partial y_l^{cel-k}}{\partial a^k} \right) + \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial a^k} \right) \right] \quad \text{Equação}$$

B.39

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_1^k} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left(\frac{\partial y_l^{cel-k}}{\partial b_1^k} \right) + \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial b_1^k} \right) \right] \quad \text{Equação}$$

B.40

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_2^k} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left(\frac{\partial y_l^{cel-k}}{\partial b_2^k} \right) + \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial b_2^k} \right) \right] \quad \text{Equação}$$

B.41

Desta forma, é necessário calcular as derivada parciais de y_l^{cel-k} e y_r^{cel-k} em relação a os parâmetros antecedentes a^k, b_1^k e b_2^k .

Das equações B.25 e B.26 tem-se:

$$y_l^{cel-k} = g_l^{2k} c_{1_{2k}} + g_l^{1k} c_{1_{1k}}$$

$$y_r^{cel-k} = g_r^{2k} c_{2_{2k}} + g_r^{1k} c_{2_{1k}}$$

e sabe-se que:

$$\bar{\mu}_{\bar{\rho}_k}(x) = \bar{\rho}_k(x) = \bar{f}^{1k} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\underline{\rho}_k}(x) = \underline{\rho}_k(x) = \underline{f}^{1k}$$

$$\bar{\mu}_{\bar{\mu}_k}(x) = \bar{\mu}_k(x) = \bar{f}^{2k} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\underline{\mu}_k}(x) = \underline{\mu}_k(x) = \underline{f}^{2k}$$

Equações B.42

onde, das equações B.4 e B.5 tem-se:

$$\bar{f}^{1k} = \bar{\rho}_k(a, b_2, x) = [1 - \underline{\mu}_k(a, b_2, x)] = 1 - \underline{f}^{2k} \quad \text{Equação B.43}$$

$$\underline{f}^{2k} = \underline{\mu}_k(a, b_2, x) \quad \text{Equação B.44}$$

e

$$\underline{f}^{1k} = \underline{\rho}_k(a, b_1, x) = [1 - \bar{\mu}_k(a, b_1, x)] = 1 - \bar{f}^{2k} \quad \text{Equação B.45}$$

$$\bar{f}^{2k} = \bar{\mu}_k(a, b_1, x) \quad \text{Equação B.46}$$

portanto, dependendo dos valores de g_l^{2k} e g_r^{2k} que resultem da aplicação do teorema C.1 descrito no apêndice C, teremos diversas expressões para y_l^{cel-k} e y_r^{cel-k} ; sendo assim:

- se $g_l^{2k} = \underline{f}^{2k}$ então,

$$y_l^{cel-k} = \underline{\mu}_k c_{1_{2k}} + (1 - \underline{\mu}_k) c_{1_{1k}} \quad \text{Equação B.47}$$

- se $g_l^{2k} = \bar{f}^{2k}$ então,

$$y_l^{cel-k} = \bar{\mu}_k c_{1_{2k}} + (1 - \bar{\mu}_k) c_{1_{1k}} \quad \text{Equação B.48}$$

- se $g_r^{2k} = \bar{f}^{2k}$ então,

$$y_r^{cel-k} = \bar{\mu}_k c_{2_{2k}} + (1 - \bar{\mu}_k) c_{2_{1k}} \quad \text{Equação B.49}$$

- se $g_r^{2k} = \underline{f}^{2k}$ então,

$$y_r^{cel-k} = \underline{\mu}_k c_{2_{2k}} + (1 - \underline{\mu}_k) c_{2_{1k}} \quad \text{Equação B.50}$$

além disso, considerando que:

$$\partial sig(\tau) / \partial \tau = sig(\tau) \cdot [1 - sig(\tau)] \quad \text{Equação B.51}$$

onde, $sig(\tau)$ é a função sigmóide dada por:

$$sig(\tau) = \frac{1}{1 + \exp(-\tau)} \quad \text{Equação B.52}$$

sendo:

$$\underline{\mu}_k(a, b_2, x) = sig[a(b_2 - x)] \quad \text{Equação B.53}$$

$$\bar{\mu}_k(a, b_1, x) = sig[a(b_1 - x)] \quad \text{Equação B.54}$$

então, pela equação B.51, tem-se:

$$\partial \underline{\mu}_k(\tau) / \partial \tau = \underline{\mu}_k(\tau) [1 - \underline{\mu}_k(\tau)] = \underline{\mu}_k(\tau) \bar{\rho}_k(\tau) \quad \text{Equação B.55}$$

$$\partial \bar{\mu}_k(\tau) / \partial \tau = \bar{\mu}_k(\tau) [1 - \bar{\mu}_k(\tau)] = \bar{\mu}_k(\tau) \underline{\rho}_k(\tau) \quad \text{Equação B.56}$$

as derivadas parciais dos pontos y_i^{cel-k} e y_r^{cel-k} do conjunto de saída y^{cel-k} da célula k em relação aos parâmetros antecedentes a^k, b_1^k e b_2^k dependem dos valores de g_l^{2k} e g_r^{2k} resultantes da aplicação do teorema C.1 descrito no apêndice C. Portanto, tem-se os seguintes casos para o cálculo destas derivadas:

- se $g_l^{2k} = \underline{f}^{2k} = \underline{\mu}_k$, neste caso $\underline{\mu}_k = \tau(a^k, b_2^k, x)$. Derivando, então, y_i^{cel-k} em função do parâmetro a^k e usando as equações B.47, B.53 e B.55. tem-se:

$$\partial y_i^{cel-k} / \partial a^k = \underline{\mu}_k \bar{\rho}_k(x - b_2^k) [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \quad \text{Equação B.57}$$

- se $g_l^{2k} = \bar{f}^{2k} = \bar{\mu}_k$, neste caso $\bar{\mu}_k = \tau(a^k, b_1^k, x)$. Derivando, então, y_i^{cel-k} em função do parâmetro a^k e usando as equações B.48, B.54 e B.56. tem-se:

$$\partial y_i^{cel-k} / \partial a^k = \bar{\mu}_k \underline{\rho}_k(x - b_1^k) [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \quad \text{Equação B.58}$$

- se $g_r^{2k} = \underline{f}^{2k} = \underline{\mu}_k$, neste caso $\underline{\mu}_k = \tau(a^k, b_2^k, x)$. Derivando, então, y_r^{cel-k} em função do parâmetro a^k e usando as equações B.50, B.53 e B.55. tem-se:

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial a^k = \underline{\mu}_k \bar{\rho}_k (x - b_2^k) [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \quad \text{Equação B.59}$$

- se $g_r^{2k} = \bar{f}^{2k} = \bar{\mu}_k$, neste caso $\bar{\mu}_k = \tau(a^k, b_1^k, x)$. Derivando, então, y_r^{cel-k} em função do parâmetro a^k e usando as equações B.49, B.54 e B.56. tem-se:

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial a^k = \bar{\mu}_k \underline{\rho}_k (x - b_1^k) [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \quad \text{Equação B.60}$$

- se $g_l^{2k} = \underline{f}^{2k} = \underline{\mu}_k$, neste caso $\underline{\mu}_k = \tau(a^k, b_2^k, x)$. Derivando, então, y_l^{cel-k} em função do parâmetro b_1^k e usando as equações B.47, B.53 e B.55. tem-se:

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial b_1^k = 0 \quad \text{Equação B.61}$$

- se $g_l^{2k} = \bar{f}^{2k} = \bar{\mu}_k$, neste caso $\bar{\mu}_k = \tau(a^k, b_1^k, x)$. Derivando, então, y_l^{cel-k} em função do parâmetro b_1^k e usando as equações B.48, B.54 e B.56. tem-se:

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial b_1^k = -\bar{\mu}_k \underline{\rho}_k a^k [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \quad \text{Equação B.62}$$

- se $g_r^{2k} = \underline{f}^{2k} = \underline{\mu}_k$, neste caso $\underline{\mu}_k = \tau(a^k, b_2^k, x)$. Derivando, então, y_r^{cel-k} em função do parâmetro b_1^k e usando as equações B.50, B.53 e B.55 tem-se:

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial b_1^k = 0 \quad \text{Equação B.63}$$

- se $g_r^{2k} = \bar{f}^{2k} = \bar{\mu}_k$, neste caso $\bar{\mu}_k = \tau(a^k, b_1^k, x)$. Derivando, então, y_r^{cel-k} em função do parâmetro b_1^k e usando as equações B.49, B.54 e B.56. tem-se:

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial b_1^k = -\bar{\mu}_k \bar{\rho}_k a^k [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \quad \text{Equação B.64}$$

- se $g_l^{2k} = \underline{f}^{2k} = \underline{\mu}_k$, neste caso $\underline{\mu}_k = \tau(a^k, b_2^k, x)$. Derivando, então, y_l^{cel-k} em função do parâmetro b_2^k e usando as equações B.47, B.53 e B.55. tem-se:

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial b_2^k = -\underline{\mu}_k \bar{\rho}_k a^k [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \quad \text{Equação B.65}$$

- se $g_l^{2k} = \bar{f}^{2k} = \bar{\mu}_k$, neste caso $\bar{\mu}_k = \tau(a^k, b_1^k, x)$. Derivando, então, y_l^{cel-k} em função do parâmetro b_2^k e usando as equações B.48, B.54 e B.56 tem-se:

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial b_2^k = 0 \quad \text{Equação B.66}$$

- se $g_r^{2k} = \underline{f}^{2k} = \underline{\mu}_k$, neste caso $\underline{\mu}_k = \tau(a^k, b_2^k, x)$. Derivando, então, y_r^{cel-k} em função do parâmetro b_2^k e usando as equações B.50, B.53 e B.55 tem-se:

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial b_2^k = -\underline{\mu}_k \bar{\rho}_k a^k [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \quad \text{Equação B.67}$$

- se $g_r^{2k} = \bar{f}^{2k} = \bar{\mu}_k$, neste caso $\bar{\mu}_k = \tau(a^k, b_1^k, x)$. Derivando, então, y_r^{cel-k} em função do parâmetro b_2^k e usando as equações B.49, B.54 e B.56 tem-se:

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial b_2^k = 0 \quad \text{Equação B.68}$$

Finalmente, substituindo as equações de B.57 até B.68 nas equações B.39, B.40 e B.41 pode-se escrever as derivadas parciais do erro $e^{(t)}$ em relação aos parâmetros antecedentes a^k, b_1^k e b_2^k da célula k para cada caso:

- se $g_l^{2k} = \underline{f}^{2k}$ e $g_r^{2k} = \bar{f}^{2k}$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial a^k} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k \{ \underline{\mu}_k \bar{\rho}_k (x - b_2^k) [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \} + \Pi g_r^k \{ \bar{\mu}_k \underline{\rho}_k (x - b_1^k) [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \}]$$

Equação B.69

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_1^k} = \frac{1}{2} E[\Pi g_r^k \{ -\bar{\mu}_k \underline{\rho}_k a^k [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \}]$$

Equação B.70

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_2^k} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k \{ -\underline{\mu}_k \bar{\rho}_k a^k [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \}]$$

Equação B.71

- se $g_l^{2k} = \bar{f}^{2k}$ e $g_r^{2k} = \underline{f}^{2k}$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial a^k} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k \{ \bar{\mu}_k \underline{\rho}_k (x - b_1^k) [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \} + \Pi g_r^k \{ \underline{\mu}_k \bar{\rho}_k (x - b_2^k) [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \}]$$

Equação B.72

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_1^k} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k \{ -\bar{\mu}_k \underline{\rho}_k a^k [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \}]$$

Equação B.73

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_2^k} = \frac{1}{2} E[\Pi g_r^k \{ -\underline{\mu}_k \bar{\rho}_k a^k [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \}]$$

Equação B.74

- se $g_l^{2k} = \underline{f}^{2k}$ e $g_r^{2k} = \underline{f}^{2k}$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial a^k} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k \{ \underline{\mu}_k \bar{\rho}_k (x - b_2^k) [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \} + \Pi g_r^k \{ \underline{\mu}_k \bar{\rho}_k (x - b_2^k) [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \}]$$

Equação B.75

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_1^k} = 0$$

Equação B.76

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial a^k} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k \{ -\underline{\mu}_k \bar{\rho}_k a^k [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \} + \Pi g_r^k \{ -\underline{\mu}_k \bar{\rho}_k a^k [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \}]$$

Equação B.77

- se $g_l^{2k} = \bar{f}^{2k}$ e $g_r^{2k} = \bar{f}^{2k}$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial a^k} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left\{ \bar{\mu}_k \underline{\rho}_k (x - b_1^k) [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \right\} + \Pi g_r^k \left\{ \bar{\mu}_k \underline{\rho}_k (x - b_1^k) [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \right\} \right]$$

Equação B.78

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_1^k} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left\{ -\bar{\mu}_k \underline{\rho}_k a^k [c_{1_{2k}} - c_{1_{1k}}] \right\} + \Pi g_r^k \left\{ -\bar{\mu}_k \underline{\rho}_k a^k [c_{2_{2k}} - c_{2_{1k}}] \right\} \right]$$

Equação B.79

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial b_2^k} = 0$$

Equação B.80

B.2

Ajuste dos Parâmetros Conseqüentes

Para uma célula NFHB-T2 o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída é defuzzificado usando a média de y_l e y_r , obtendo-se desta forma a saída (crisp) y da célula dada pela equação B.1.

$$y = \frac{1}{2} [g_l^1 c_{1_1} + g_l^2 c_{1_2} + g_r^1 c_{2_1} + g_r^2 c_{2_2}]$$

Equação B.1

Através do método de *Gradient Descent* cada parâmetro conseqüente ajustável é atualizado segundo a equação B.81.

$$\theta(n+1) = \theta(n) - \alpha_\theta \left. \frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} \right|_n$$

Equação B.81

onde:

θ = qualquer parâmetro dos antecedentes ou conseqüentes do modelo

NFHB-T2

α_θ = taxa de aprendizado

Para minimizar o erro médio quadrático pelo método de *Gradient Descent* é necessário calcular o gradiente do erro em relação aos parâmetros consequentes ajustáveis da célula BSP-T2: $c_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$ e $c_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$.

O erro médio quadrático esta dado pela equação B.82:

$$e^{(t)} = \frac{1}{2} [y(x^{(t)}) - y(x^{d(t)})]^2 \quad \text{Equação B.82}$$

$$y(x^{(t)}) = \frac{y_l(x^{(t)}) + y_r(x^{(t)})}{2} \quad \text{Equação B.83}$$

onde:

$y(x^{(t)})$ = saída crisp do modelo NFHB-T2

$y(x^{d(t)})$ = saída crisp desejada do modelo NFHB-T2

$y_l(x^{(t)})$ = ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída do modelo NFHB-T2

$y_r(x^{(t)})$ = ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída do modelo NFHB-T2

portanto, derivando o erro médio quadrático $e^{(t)}$ em relação ao parâmetro consequente a ser ajustado tem-se:

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{\partial e^{(t)}}{\partial y(x^{(t)})} \left[\frac{\partial y(x^{(t)})}{\partial y_l(x^{(t)})} + \frac{\partial y(x^{(t)})}{\partial y_r(x^{(t)})} \right] \quad \text{Equação B.84}$$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{\partial e^{(t)}}{\partial y(x^{(t)})} \left[\frac{\partial y(x^{(t)})}{\partial y_l(x^{(t)})} \cdot \frac{\partial y_l(x^{(t)})}{\partial \theta} + \frac{\partial y(x^{(t)})}{\partial y_r(x^{(t)})} \cdot \frac{\partial y_r(x^{(t)})}{\partial \theta} \right] \quad \text{Equação B.85}$$

finalmente obtêm-se:

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} [y(x^{(t)}) - y(x^{d(t)})] \left[\frac{\partial y_l(x^{(t)})}{\partial \theta} + \frac{\partial y_r(x^{(t)})}{\partial \theta} \right] \quad \text{Equação}$$

B.86

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} E \left[\frac{\partial y_l(x^{(t)})}{\partial \theta} + \frac{\partial y_r(x^{(t)})}{\partial \theta} \right] \quad \text{Equação B.87}$$

na equação B.87 e em adiante, para fins de simplificação, serão utilizados os seguintes termos: $y_l = y_l(x^{(t)})$, $y_r = y_r(x^{(t)})$, $y = y(x^{(t)})$. Portanto, a equação B.87 passa a ser:

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} E \left[\frac{\partial y_l^{(t)}}{\partial \theta} + \frac{\partial y_r^{(t)}}{\partial \theta} \right] \quad \text{Equação B.88}$$

Desta forma, é necessário calcular a derivada parcial de $y_l^{(t)}$ e $y_r^{(t)}$ do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída total y do modelo NFHB-T2 em relação a cada parâmetro conseqüente ajustável c_{1k}, c_{2k} correspondentes a $\underline{c}_{1k} = (c_{1k}, c_{2k})$ e $\underline{c}_{2k} = (c_{1k}, c_{2k})$ correspondentes a $\underline{c}_{2k} = (c_{1k}, c_{2k})$ de cada célula do modelo NFHB-T2.

Das Equações B.16, B.19, B.23 e B.24 tem-se que:

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente $\underline{c}_{1k} = (c_{1k}, c_{2k})$

$$\partial y_l / \partial c_{1k} = \partial (\prod g_l^k y_l^{cel-k} + \psi_l) / \partial c_{1k} \quad \text{Equação B.89}$$

$$\partial y_r / \partial c_{1k} = \partial (\prod g_r^k y_r^{cel-k} + \psi_r) / \partial c_{1k} \quad \text{Equação}$$

B.90

$$\partial y_l / \partial c_{2k} = \partial (\prod g_l^k y_l^{cel-k} + \psi_l) / \partial c_{2k} \quad \text{Equação B.91}$$

$$\partial y_r / \partial c_{2k} = \partial (\prod g_r^k y_r^{cel-k} + \psi_r) / \partial c_{2k} \quad \text{Equação B.92}$$

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$

$$\partial y_l / \partial c_{1_{2k}} = \partial (\Pi g_l^k y_l^{cel-k} + \psi_l) / \partial c_{1_{2k}} \quad \text{Equação B.93}$$

$$\partial y_r / \partial c_{1_{2k}} = \partial (\Pi g_r^k y_r^{cel-k} + \psi_r) / \partial c_{1_{2k}} \quad \text{Equação B.94}$$

$$\partial y_l / \partial c_{2_{2k}} = \partial (\Pi g_l^k y_l^{cel-k} + \psi_l) / \partial c_{2_{2k}} \quad \text{Equação B.95}$$

$$\partial y_r / \partial c_{2_{2k}} = \partial (\Pi g_r^k y_r^{cel-k} + \psi_r) / \partial c_{2_{2k}} \quad \text{Equação}$$

B.96

como $\psi_l, \psi_r, \Pi g_l^k, \Pi g_r^k$ são independentes dos parâmetros consequentes $c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}}$ correspondentes a $\subset_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$ e $c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}}$ correspondentes a $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$, as equações acima tornam-se:

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$

$$\partial y_l / \partial c_{1_{1k}} = \Pi g_l^k (\partial y_l^{cel-k} / \partial c_{1_{1k}}) \quad \text{Equação B.97}$$

$$\partial y_r / \partial c_{1_{1k}} = \Pi g_r^k (\partial y_r^{cel-k} / \partial c_{1_{1k}}) \quad \text{Equação B.98}$$

$$\partial y_l / \partial c_{2_{1k}} = \Pi g_l^k (\partial y_l^{cel-k} / \partial c_{2_{1k}}) \quad \text{Equação B.99}$$

$$\partial y_r / \partial c_{2_{1k}} = \Pi g_r^k (\partial y_r^{cel-k} / \partial c_{2_{1k}}) \quad \text{Equação B.100}$$

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$

$$\partial y_l / \partial c_{1_{2k}} = \Pi g_l^k (\partial y_l^{cel-k} / \partial c_{1_{2k}}) \quad \text{Equação B.101}$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial c_{1_{2k}}} = \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial c_{1_{2k}}} \right) \quad \text{Equação B.102}$$

$$\frac{\partial y_l}{\partial c_{2_{2k}}} = \Pi g_l^k \left(\frac{\partial y_l^{cel-k}}{\partial c_{2_{2k}}} \right) \quad \text{Equação B.103}$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial c_{2_{2k}}} = \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial c_{2_{2k}}} \right) \quad \text{Equação B.104}$$

da equação B.87, a derivada parcial do erro médio quadrático $e^{(t)}$ em relação a cada um dos parâmetros conseqüentes passa a ser:

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente $\subset_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial c_{1_{1k}}} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left(\frac{\partial y_l^{cel-k}}{\partial c_{1_{1k}}} \right) + \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial c_{1_{1k}}} \right) \right] \quad \text{Equação B.105}$$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial c_{2_{1k}}} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left(\frac{\partial y_l^{cel-k}}{\partial c_{2_{1k}}} \right) + \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial c_{2_{1k}}} \right) \right] \quad \text{Equação B.106}$$

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial c_{1_{2k}}} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left(\frac{\partial y_l^{cel-k}}{\partial c_{1_{2k}}} \right) + \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial c_{1_{2k}}} \right) \right] \quad \text{Equação B.107}$$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial c_{2_{2k}}} = \frac{1}{2} E \left[\Pi g_l^k \left(\frac{\partial y_l^{cel-k}}{\partial c_{2_{2k}}} \right) + \Pi g_r^k \left(\frac{\partial y_r^{cel-k}}{\partial c_{2_{2k}}} \right) \right] \quad \text{Equação B.108}$$

desta forma, é necessário calcular as derivada parciais de y_l^{cel-k} e y_r^{cel-k} em relação a os parâmetros conseqüentes $c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}}$ correspondentes a $\subset_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$ e $c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}}$ correspondentes a $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$

Das Equações B.25 e B.26 tem-se:

$$y_l^{cel-k} = g_l^{2k} c_{1_{2k}} + g_l^{1k} c_{1_{1k}}$$

$$y_r^{cel-k} = g_r^{2k} c_{2_{2k}} + g_r^{1k} c_{2_{1k}}$$

sendo assim:

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial c_{1_{1k}} = g_l^{1k} \quad \text{Equação B.109}$$

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial c_{1_{1k}} = 0 \quad \text{Equação B.110}$$

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial c_{2_{1k}} = 0 \quad \text{Equação B.111}$$

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial c_{2_{1k}} = g_r^{1k} \quad \text{Equação B.112}$$

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial c_{1_{2k}} = g_l^{2k} \quad \text{Equação B.113}$$

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial c_{1_{2k}} = 0 \quad \text{Equação B.114}$$

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial c_{2_{2k}} = 0 \quad \text{Equação B.115}$$

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial c_{2_{2k}} = g_r^{2k} \quad \text{Equação B.116}$$

Finalmente, substituindo as equações de B.109 até B.116 nas equações B.105, B.106, B.107 e B.108 pode-se escrever as derivadas parciais do erro $e^{(t)}$ em relação aos parâmetros consequentes $c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}}$ correspondentes a $\subset_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$ e $c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}}$ correspondentes a $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$ da célula k , da seguinte forma:

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{1k} = (c_{1k}, c_{2k})$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial c_{1k}} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k g_l^{1k}] \quad \text{Equação B.117}$$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial c_{2k}} = \frac{1}{2} E[\Pi g_r^k g_r^{1k}] \quad \text{Equação B.118}$$

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial c_{1_{2k}}} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k g_l^{2k}] \quad \text{Equação B.119}$$

$$\frac{\partial e^{(t)}}{\partial c_{2_{2k}}} = \frac{1}{2} E[\Pi g_r^k g_r^{2k}] \quad \text{Equação B.120}$$

Para o caso de $\subset_{1k} = (c_{1k}, c_{2k})$ e $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$ ser consequentes combinações lineares das entradas com conjuntos fuzzy *intervalares* do tipo 1, estas derivadas parciais do erro $e^{(t)}$ em relação aos parâmetros consequentes são obtidas da seguinte forma:

da equação B.25 tem-se:

$$y_l^{cel-k} = g_l^{2k} c_{1_{2k}} + g_l^{1k} c_{1k}$$

onde, substituindo a equação 3.8 do capítulo 3 na equação anterior obtêm-se:

$$y_l^{cel-k} = g_l^{2k} \left(\sum_{z=0}^n \zeta 1_{2k_z} x_z \right) + g_l^{1k} \left(\sum_{z=0}^n \zeta 1_{1k_z} x_z \right) \quad \text{Equação B.121}$$

e da equação B.26 tem-se:

$$y_r^{cel-k} = g_r^{2k} c_{2_{2k}} + g_r^{1k} c_{2_{1k}}$$

onde, substituindo a equação 3.9 do capítulo 3 na equação anterior obtêm-se:

$$y_r^{cel-k} = g_r^{2k} \left(\sum_{z=0}^n \zeta_{2_{2kz}} x_z \right) + g_r^{1k} \left(\sum_{z=0}^n \zeta_{2_{1kz}} x_z \right) \quad \text{Equação B.122}$$

onde:

x_z = entrada z -ésima do sistema, onde, $x_0 = 1$;

n = número total de entradas ao sistema;

$\zeta_{1_{1kz}}$ = ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 que representa o peso da entrada x_z na combinação linear para a $1k$ -ésima regra do tipo 2 da célula k ;

$\zeta_{2_{1kz}}$ = ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 que representa o peso da entrada x_z na combinação linear para a $1k$ -ésima regra do tipo 2 da célula k ;

$\zeta_{1_{2kz}}$ = ponto limite esquerdo do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 que representa o peso da entrada x_z na combinação linear para a $2k$ -ésima regra do tipo 2 da célula k ;

$\zeta_{2_{2kz}}$ = ponto limite direito do conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 que representa o peso da entrada x_z na combinação linear para a $2k$ -ésima regra do tipo 2 da célula k ;

calculando, as derivadas parciais de y_l^{cel-k} e y_r^{cel-k} em relação a os parâmetros conseqüentes $\zeta_{1_{1kz}}$, $\zeta_{2_{1kz}}$, correspondentes a $c_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$ e $\zeta_{1_{2kz}}$ e $\zeta_{2_{2kz}}$ correspondentes a $c_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$ obtêm-se:

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 conseqüente $c_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial \zeta_{1_{1kz}} = g_l^{1k} x_z \quad \text{Equação B.123}$$

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial \zeta_{1_{1kz}} = 0 \quad \text{Equação B.124}$$

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial \zeta 2_{1k_z} = 0 \quad \text{Equação B.125}$$

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial \zeta 2_{1k_z} = g_r^{1k} x_z \quad \text{Equação B.126}$$

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial \zeta 1_{2k_z} = g_l^{2k} x_z \quad \text{Equação B.127}$$

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial \zeta 1_{2k_z} = 0 \quad \text{Equação B.128}$$

$$\partial y_l^{cel-k} / \partial \zeta 2_{2k_z} = 0 \quad \text{Equação B.129}$$

$$\partial y_r^{cel-k} / \partial \zeta 2_{2k_z} = g_r^{2k} x_z \quad \text{Equação B.130}$$

Finalmente, fazendo $\zeta 1_{1k_z} = c_{1_{1k}}$, $\zeta 2_{1k_z} = c_{2_{1k}}$, $\zeta 1_{2k_z} = c_{1_{2k}}$ e $\zeta 2_{2k_z} = c_{2_{2k}}$ nas equações B.105, B.106, B.107 e B.108, e, substituindo as equações da B.123 à B.130 nestas pode-se escrever as derivadas parciais do erro $e^{(t)}$ em relação aos parâmetros consequentes $\zeta 1_{1k_z}$, $\zeta 2_{1k_z}$ correspondentes a $\subset_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$ e $\zeta 1_{2k_z}$ e $\zeta 2_{2k_z}$ correspondentes a $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$ da célula k , da seguinte forma:

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{1k} = (c_{1_{1k}}, c_{2_{1k}})$

$$\partial e^{(t)} / \partial \zeta 1_{1k_z} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k g_l^{1k} x_z] \quad \text{Equação B.131}$$

$$\partial e^{(t)} / \partial \zeta 2_{1k_z} = \frac{1}{2} E[\Pi g_r^k g_r^{1k} x_z] \quad \text{Equação B.132}$$

- para o conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 consequente $\subset_{2k} = (c_{1_{2k}}, c_{2_{2k}})$

$$\partial e^{(t)} / \partial \zeta_{1_{2K_z}} = \frac{1}{2} E[\Pi g_l^k g_l^{2k} x_z] \quad \text{Equação B.133}$$

$$\partial e^{(t)} / \partial \zeta_{2_{2K_z}} = \frac{1}{2} E[\Pi g_r^k g_r^{2k} x_z] \quad \text{Equação B.134}$$

Apêndice C

Cálculo do Conjunto Tipo-reduzido para a Célula Básica NFB-T2

O conjunto fuzzy *intervalar* do tipo 1 de saída $y = [y_l, y_r]$ de uma célula NFB-T2 é calculado através das equações C.1 e C.2 e do teorema C.1 descritos a seguir.

$$y_l = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^i y_l^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_l^i} = \frac{g_l^1 c_{1_1} + g_l^2 c_{1_2}}{g_l^1 + g_l^2}; \quad \text{Equação C.1}$$

$$y_r = \frac{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^i y_r^i}{\sum_{i=1}^{M=2} g_r^i} = \frac{g_r^1 c_{2_1} + g_r^2 c_{2_2}}{g_r^1 + g_r^2}; \quad \text{Equação C.2}$$

onde:

$[y_l, y_r]$ = pontos limites do conjunto intervalar do tipo 1 de saída da célula NFB-T2

M = número de regras do tipo 2 da célula. (M=2)

g_l^i = ponto limite (esquerdo \underline{f}^i ou direito \bar{f}^i) de F^i associado a c_{1_i} do conjunto conseqüente \subset_i , para a i -ésima regra. Os valores de g_l^i são calculados através do teorema C.1.

g_r^i = ponto limite (esquerdo \underline{f}^i ou direito \bar{f}^i) de F^i associado a c_{2_i} do conjunto conseqüente \subset_i , para a i -ésima regra. Os valores de g_r^i são calculados através do teorema C.1.

TEOREMA C.1. Procedimento iterativo para o cálculo de y_r e y_l [MEND00-I]:

- **Cálculo de y_r :**

- 1.- ordenar de forma ascendente os valores pré-calculados c_{2_i} . Desta forma, tem-se $c_{2_1} \leq c_{2_2} \leq \dots \leq c_{2_M}$
- 2.- calcular y_r da equação C.2, fixando inicialmente $g_r^i = (\underline{f}^i + \bar{f}^i)/2$ para $i = 1 \dots M$. Em seguida, fixa-se $y_r' = y_r$.
- 3.- encontrar um número R ($1 \leq R \leq M - 1$) tal que $y_r^R \leq y_r' \leq y_r^{R+1}$.
- 4.- calcular y_r usando a equação C.2, fixando $g_r^i = \underline{f}^i \forall i \leq R$ e $g_r^i = \bar{f}^i \forall i > R$. Fixa-se $y_r'' = y_r$.
- 5.- se $y_r'' \neq y_r'$, então ir ao passo 6. Se $y_r'' = y_r'$, então parar e fixar $y_r'' = y_r'$.
- 6.- fixar $y_r' = y_r''$, e voltar ao passo 3.

• **Cálculo de y_l :**

O procedimento para calcular y_l é muito similar ao cálculo anterior. Neste caso, substituí-se c_{2_i} por c_{1_i} e, no passo 2, encontra-se um número L ($1 \leq L \leq M - 1$) tal que $y_l^L \leq y_l' \leq y_l^{L+1}$. Adicionalmente, no passo 3, calcula-se y_l usando a equação C.1, fixando $g_l^i = \bar{f}^i \forall i \leq L$ e $g_l^i = \underline{f}^i \forall i > L$.

Portanto, aplicando o teorema C.1 tem-se:

$$\text{Se } c_{1_1} \langle c_{1_2} \text{ então } g_l^1 = \bar{f}^1 \text{ e } g_l^2 = \underline{f}^2$$

$$\text{Se } c_{1_1} \rangle c_{1_2} \text{ então } g_l^1 = \underline{f}^1 \text{ e } g_l^2 = \bar{f}^2$$

$$\text{Se } c_{2_1} \langle c_{2_2} \text{ então } g_r^1 = \underline{f}^1 \text{ e } g_r^2 = \bar{f}^2$$

$$\text{Se } c_{2_1} \rangle c_{2_2} \text{ então } g_r^1 = \bar{f}^1 \text{ e } g_r^2 = \underline{f}^2$$

Este conjunto de saída é defuzzificado usando-se a média de y_l e y_r , (equações C.3 e C.4) obtendo-se:

$$y = \frac{y_l + y_r}{2}$$

Equação C.3

$$y = \frac{y_l + y_r}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_l^1 c_{1_1} + g_l^2 c_{1_2}}{g_l^1 + g_l^2} + \frac{g_r^1 c_{2_1} + g_r^2 c_{2_2}}{g_r^1 + g_r^2} \right) \quad \text{Equação C.4}$$

Apêndice D

Cálculo do Conjunto Tipo-reduzido para SIF Intervalares do tipo 2 Mamdani com entradas Singleton

Em um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton, a saída do processo de tipo-redução centro de conjuntos, $Y_{cos}(\mathbf{x})$, é dada por:

$$Y_{cos}(x) = [y_l, y_r] = \int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \cdots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} \int_{f^1 \in [\underline{f}^1, \bar{f}^1]} \cdots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \bar{f}^M]} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i}$$

Equação D.1

onde:

$$y_l = \frac{\sum_{i=1}^M f_l^i y_l^i}{\sum_{i=1}^M f_l^i}$$

Equação D.2

$$y_r = \frac{\sum_{i=1}^M f_r^i y_r^i}{\sum_{i=1}^M f_r^i}$$

Equação D.3

onde:

$Y_{cos}(\mathbf{x})$ = conjunto intervalar de pontos limites $[y_l, y_r]$. Os valores de y_l e y_r são calculados pelo procedimento iterativo descrito abaixo (este procedimento é descrito com maior detalhe no Teorema 9.1 em [MEND00-I]).

$[y_l^i, y_r^i]$ = centróide do conjunto consequente intervalar do tipo 2, \tilde{G}^i , e que deve ser pré-calculado antes de calcular $Y_{cos}(\mathbf{x})$.

M = número de regras, $i = 1 \dots M$.

f_r^i, y_r^i = valores de f^i, y^i que estão associados a y_r respectivamente.

Estes valores são calculados pelo procedimento iterativo descrito abaixo.

$f_l^i, y_l^i =$ valores de f^i, y^i que estão associados a y_l respectivamente.

Estes valores são calculados pelo procedimento iterativo descrito abaixo.

TEOREMA D.1. Procedimento iterativo para o cálculo de y_r e y_l :

• **Cálculo de y_r :**

- 1.- ordenar em ordem ascendente os pré-calculados y_r^i . Desta forma, tem-se $y_r^1 \leq y_r^2 \leq \dots \leq y_r^M$
- 2.- calcular y_r da equação D.3, fixando inicialmente $f_r^i = (\underline{f}^i + \bar{f}^i)/2$ para $i = 1 \dots M$, onde, $\underline{f}^i, \bar{f}^i$ são calculados previamente usando as equações 2.26 e 2.27 do capítulo 2. Em seguida, fixa-se $y_r' \equiv y_r$.
- 3.- encontrar um número R ($1 \leq R \leq M - 1$) tal que $y_r^R \leq y_r' \leq y_r^{R+1}$.
- 4.- calcular y_r usando a equação D.3, fixando $f_r^i = \underline{f}^i \forall i \leq R$ e $f_r^i = \bar{f}^i \forall i > R$. Fixa-se $y_r'' \equiv y_r$.
- 5.- se $y_r'' \neq y_r'$, então ir ao passo 6. Se $y_r'' = y_r'$, então parar e fixar $y_r'' = y_r$.
- 6.- fixar $y_r' = y_r''$, e voltar ao passo 3.

• **Cálculo de y_l :**

O procedimento para calcular y_l é muito similar ao cálculo anterior. Neste caso, substituí-se y_r^i por y_l^i , e, no passo 2 encontra-se um número L ($1 \leq L \leq M - 1$) tal que $y_l^L \leq y_l' \leq y_l^{L+1}$. Adicionalmente, no passo 3, calcula-se y_l usando a equação D.2, fixando $f_l^i = \bar{f}^i \forall i \leq L$ e $f_l^i = \underline{f}^i \forall i > L$.

Devido a que $Y_{cos}(\mathbf{x})$ é um conjunto intervalar, então a saída defuzzificada do SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton é dada por:

$$y(\mathbf{x}) = f_{s_2}(\mathbf{x}) = \frac{y_l + y_r}{2} \quad \text{Equação D.5}$$

Exemplo de um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton:

Considerando a função $y = 100 - x^2$ para $x \in [10,10]$, e fazendo 10 realizações de cada medida para 9 pares de dados (x,y) , como segue:

$$(x^1, [y_{\min}^1, y_{\max}^1]) = (-10, [-7.79, 6.49])$$

$$(x^2, [y_{\min}^2, y_{\max}^2]) = (-7.5, [34.72, 52.93])$$

$$(x^3, [y_{\min}^3, y_{\max}^3]) = (-5, [66.12, 84.1])$$

$$(x^4, [y_{\min}^4, y_{\max}^4]) = (-2.5, [84.93, 101.75])$$

$$(x^5, [y_{\min}^5, y_{\max}^5]) = (0, [93.09, 109.95])$$

$$(x^6, [y_{\min}^6, y_{\max}^6]) = (2.5, [88.02, 103.53])$$

$$(x^7, [y_{\min}^7, y_{\max}^7]) = (5, [65.37, 84.32])$$

$$(x^8, [y_{\min}^8, y_{\max}^8]) = (7.5, [34.14, 50.85])$$

$$(x^9, [y_{\min}^9, y_{\max}^9]) = (10, [-9.62, 9.62])$$

cada um destes pares de dados inclui valores de y corrompidos por ruído aditivo uniformemente distribuído em $[10,10]$. Para cada entrada aplicada $x^i (i = 1, \dots, 9)$, obtém-se o valor mínimo y_{\min}^i e o valor máximo y_{\max}^i dos 10 valores de y .

Neste exemplo usamos um SIF intervalar do tipo 2 com entradas singleton, onde cada regra é da forma: *Se x é A, então y é \tilde{G}* .

Para as regras escolhemos conjuntos fuzzy antecedentes gaussianos do tipo 1 e conjuntos fuzzy conseqüentes intervalares do tipo 2 com função de pertinência primária com incerteza na média, onde a média assume valores em $[y_{\min}^i, y_{\max}^i]$. As funções de pertinência para os conjuntos antecedentes e os FOUs para os dois conjuntos conseqüentes são mostradas na Figura D.1.

O SIF intervalar do tipo 2 Mamdani deste exemplo usa fuzzificação singleton, o máximo para t-conorm, o produto para t-norm, implicação produto e o processo de tipo-redução centro de conjuntos.

Para uma entrada $x' = 5.5$ têm-se graus de pertinência diferentes de zero nos conjuntos antecedentes: 6, 7 e 8. Portanto três regras são ativadas.

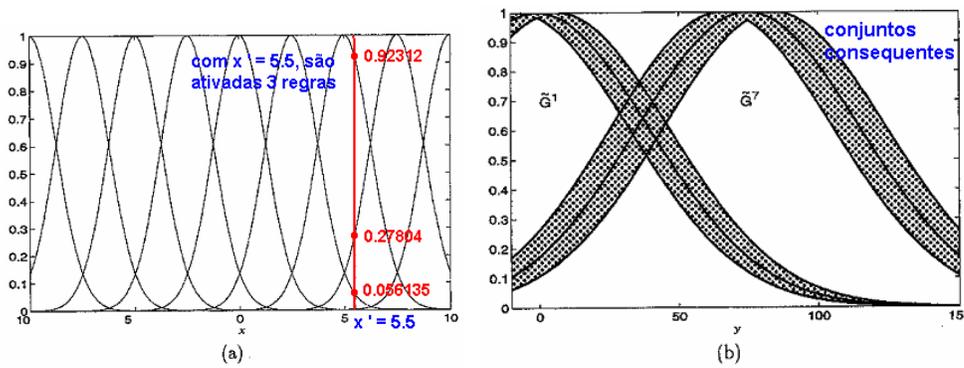


Figura D.1. (a) Funções de pertinência para os conjuntos antecedentes. (b) FOU dos conjuntos conseqüentes 1 e 7.

O processo de tipo-redução centro de conjuntos substitui cada conjunto conseqüente pelo seu centróide e escala este usando seu próprio grau de ativação (implicação produto e usando o produto para t-norm), isto é mostrado na Figura D.2.(a).

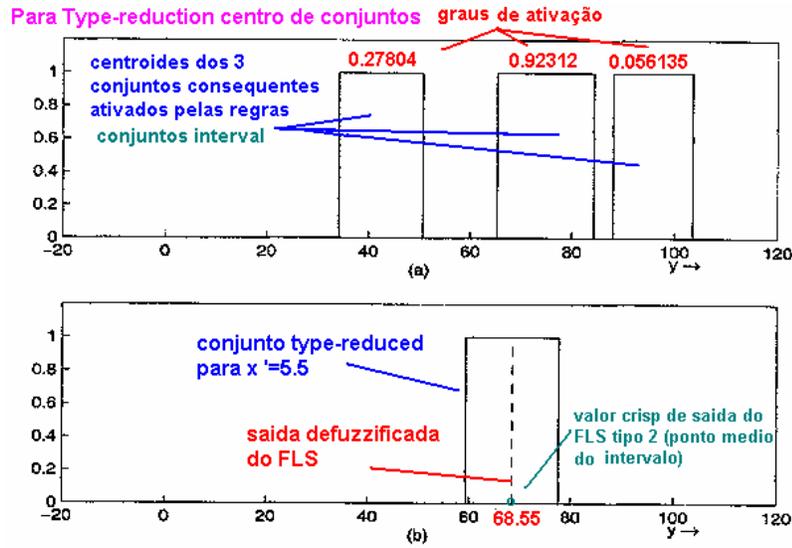


Figura D.2. (a) Centróides dos três conjuntos consequentes ativados pelas três regras ativadas e seus correspondentes graus de ativação. (b) Conjunto de saída do processo de tipo-redução centro de conjuntos e saída crisp correspondente.

O conjunto tipo-reduzido resultante do processo de tipo-redução para $x'=5.5$ é ilustrado na Figura D.2.(b), este foi calculado usando o procedimento iterativo descrito acima.

O valor atual da função em $x'=5.5$ é 69.75. Os dois pontos limites do domínio do conjunto tipo-reduzido indicam os limites inferior e superior para a saída crisp de valor 68.55. Estes limites dão uma medida da incerteza produzida pelo ruído nos dados durante a aproximação. Isto não pode ser obtido em um SIF do tipo 1.