

2

Sistemas de Inferência Fuzzy do Tipo 2

2.1.

Introdução

Conforme visto no capítulo anterior, diferentes tipos de incertezas podem ocorrer em sistemas de inferência fuzzy (SIFs) usados em aplicações reais: *fuzziness*, *strife*, *nonspecificity*, *aleatórias*, entre outras. SIFs que usam conjuntos fuzzy do tipo 2 permitem que se lide com estas incertezas, apresentando desempenho geralmente superior nestes casos.

Diferentemente dos conjuntos fuzzy do tipo 1, que possuem duas dimensões, os conjuntos fuzzy do tipo 2 possuem três dimensões; essa nova terceira dimensão proporciona um grau de liberdade adicional. Além disso, as funções de pertinência do tipo 2 incluem uma mancha de incerteza, de forma a tornar possível a modelagem de incertezas tanto numéricas como lingüísticas [MEND00-I], [MEND02].

Este capítulo resume os principais fundamentos teóricos que deram origem ao novo Modelo Neuro-Fuzzy Hierárquico BSP do Tipo 2 (NFHB-T2) proposto nesta tese. Na primeira parte deste capítulo serão apresentados os conjuntos fuzzy do tipo 2 e as suas principais terminologias; em seguida serão descritos alguns dos principais Sistemas de Inferência Fuzzy do tipo 2, assim denominados porque fazem uso destes conjuntos.

2.2.

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

Nas Figuras 2.1 e 2.2 são mostradas funções de pertinência do tipo 1 e do tipo 2, respectivamente. Imaginando-se uma certa incerteza nos graus de pertinência do conjunto fuzzy do tipo 1 da Figura 2.1, tem-se a função de pertinência apresentada na Figura 2.2. Neste caso, para um valor específico de x , por exemplo $x = x'$, não existe apenas um único valor para a função de

pertinência, como no caso de conjuntos fuzzy do tipo 1; a função de pertinência u' assume valores em qualquer parte onde a linha vertical intercepte a mancha de incerteza (*footprint of uncertainty* - FOU) na Figura 2.2.

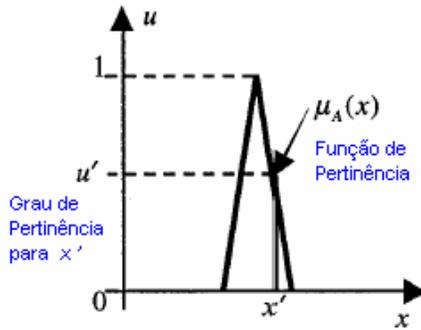


Figura 2.1. Função de pertinência do tipo 1.



Figura 2.2. Função de pertinência do tipo 1 da Figura 2.1 com nebulosidade.

Para cada valor de u' em $x = x'$, pode-se designar uma distribuição de amplitude; aplicando-se isto para todos os valores de $x \in X$, tem-se uma função de pertinência do tipo 2 tridimensional que caracteriza um conjunto fuzzy do tipo 2, como mostrado na Figura 2.3.

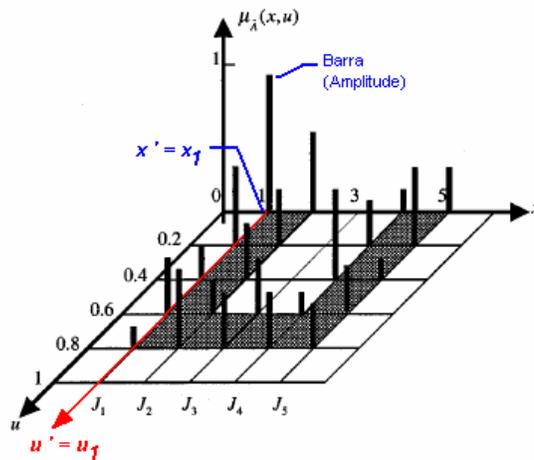


Figura 2.3. Função de pertinência do tipo 2 e FOU

A Figura 2.3 apresenta a função de pertinência do tipo 2, $\mu_{\bar{A}}(x,u)$, para valores de x e u discretos, onde $X=\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\}$ e $U=\{0\ 0,2\ 0,4\ 0,6\ 0,8\}$. Nesta figura, J_x inclui valores onde $\mu_{\bar{A}}(x,u)$ é diferente de zero; portanto,

$J_1 = J_2 = J_4 = J_5 = \{0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8\}$ e $J_3 = \{0,6, 0,8\}$. As barras representam a distribuição de amplitude para todos os pontos de u' em x' .

2.2.1.

Definição de Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

Um conjunto fuzzy do tipo 2, denotado por \tilde{A} , é caracterizado por uma função de pertinência do tipo 2 $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$, onde $x \in X$ e $u \in J_x \subseteq [0,1]$, ou seja:

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]\} \quad \text{Equação 2.1}$$

onde, $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / (x, u) \quad \text{Equação 2.2}$$

onde, $J_x \subseteq [0,1]$

Nas equações acima, a restrição $u \in J_x \subseteq [0,1]$ é consistente com a restrição do tipo 1, $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$, isto é quando as incertezas desaparecem em uma função de pertinência do tipo 2, esta se transforma em uma função de pertinência do tipo 1. Neste caso, a variável u transforma-se em $\mu_A(x)$, onde $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$.

A restrição $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ é consistente com o fato de que as amplitudes da função de pertinência assumem valores de 0 a 1.

2.2.2.

Principais Definições associadas a Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

Nesta seção são definidos os principais termos e conceitos associados a conjuntos fuzzy do tipo 2.

2.2.2.1.**Corte Vertical de uma Função de Pertinência do Tipo 2**

O corte vertical de uma função de pertinência do tipo 2 é definido como o plano 2-D de eixos u e $\mu_{\bar{A}}(x', u)$, para cada valor de x , $x = x'$, como mostrado na Figura 2.4.

2.2.2.2.**Função de Pertinência Secundária e Grau Secundário**

A função de pertinência secundária, denotada por $\mu_{\bar{A}}(x', u)$, é um corte vertical de $\mu_{\bar{A}}(x, u)$, para $x' \in X$ e para $u \in J_{x'} \subseteq [0, 1]$. Assim, a função de pertinência secundária é definida como:

$$\mu_{\bar{A}}(x = x', u) \equiv \mu_{\bar{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} f_{x'}(u)/u \quad J_{x'} \subseteq [0, 1] \quad \text{Equação 2.3}$$

onde:

$f_{x'}(u)$ é o grau secundário ou valor de pico da barra (amplitude), $0 \leq f_{x'}(u) \leq 1$.

Por motivos de simplificação, a função de pertinência secundária é denotada também por $\mu_{\bar{A}}(x = x', u) = \mu_{\bar{A}}(x') = \mu_{\bar{A}}(x)$. A função de pertinência secundária é chamada conjunto secundário, que é um conjunto fuzzy do tipo 1. Na Figura 2.4 a função de pertinência secundária para $x' = 2$ é dada por:

$$\mu_{\bar{A}}(2) = 0,5/0 + 0,35/0,2 + 0,35/0,4 + 0,2/0,6 + 0,5/0,8 \quad \text{Equação 2.4}$$

Quando todos os graus secundários são iguais a 1, os conjuntos fuzzy do tipo 2 resultantes são chamados conjuntos fuzzy intervalares do tipo 2.

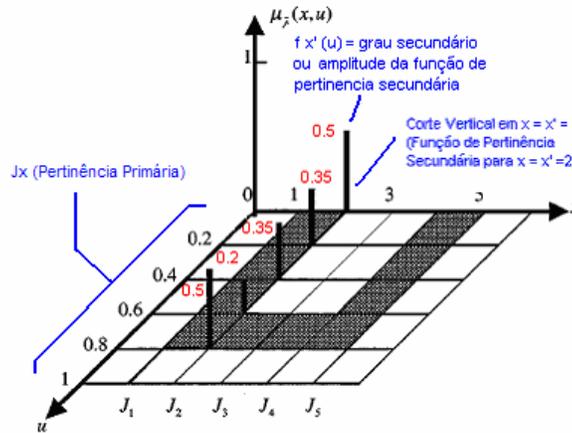


Figura 2.4. Corte vertical para a função de pertinência do tipo 2, em $x' = 2$.

2.2.2.3.

Pertinência Primária de x

A pertinência primária de x é denotada por J_x e é definida como o domínio da função de pertinência secundária. Desta forma, $J_x \subseteq [0,1]$ para $x \in X$. A Figura 2.4 mostra a pertinência primária de x , onde J_x é dado por:

$$J_1 = J_2 = J_4 = J_5 = \{ 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 \} \text{ e } J_3 = \{ 0,6, 0,8 \}$$

2.2.2.4.

Funções de Pertinência Intervalares do Tipo 2

Nas funções de funções de pertinência do tipo 2 triangulares ou gaussianas, as funções de pertinência secundárias estão, usualmente, centradas no ponto médio da pertinência primária de cada x , e refletem uma diminuição de importância para pontos distantes deste ponto médio; portanto, o valor máximo de $f_x(u)$ para as funções de pertinência secundárias ocorre no ponto médio de J_x . A Figura 2.5 ilustra isto.

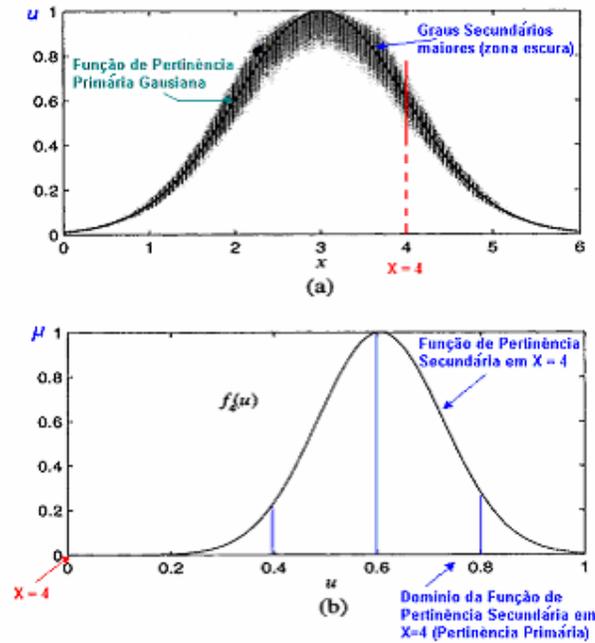


Figura 2.5. (a) Representação de um conjunto fuzzy do tipo 2 gaussiano. O domínio do grau de pertinência correspondente a $x=4$ é também mostrado. (b) Função de pertinência secundária gaussiana em $x=4$.

Conforme mencionado, quando $f_x(u) = 1, \forall u \in J_x \subseteq [0,1]$, as funções de pertinência secundárias são denominadas conjuntos intervalares. Se isto é cumprido para $\forall x \in X$, tem-se uma função de pertinência intervalar do tipo 2. A função de pertinência secundária intervalar reflete uma incerteza uniforme na pertinência primária de x , como mostra a Figura 2.6.

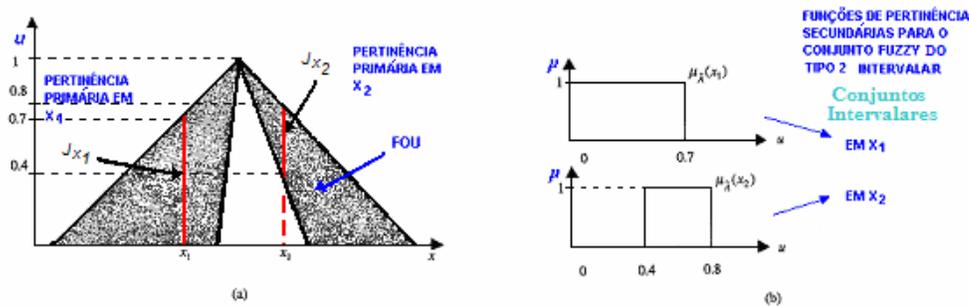


Figura 2.6. Função de pertinência intervalar do tipo 2, mancha de incerteza (FOU) e suas funções de pertinência secundárias em x_1 e x_2

Um conjunto intervalar pode ser representado por seu domínio, o qual pode ser expresso em termos de seus pontos limites esquerdo e direito $[l,r]$, ou

também por seu centro c e extensão s , da forma $[c-s, c+s]$, onde $c = (l+r)/2$ e $s = (r-l)/2$.

2.2.2.5.

Mancha de Incerteza

A Mancha de Incerteza é denotada por FOU e definida como a união de todas as pertinência primárias J_x , isto é:

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \tag{Equação 2.5}$$

A mancha de incerteza representa a incerteza inerente em uma função de pertinência do tipo 2. A FOU descreve o domínio inteiro que suporta todos os graus secundários de uma função de pertinência do tipo 2 e permite representar o conjunto fuzzy do tipo 2 graficamente em duas dimensões ao invés de três, conforme ilustrado nas Figuras 2.7 e 2.8. A mancha de incerteza indica que existe uma distribuição disposta acima desta mancha; esta distribuição é a terceira dimensão dos conjuntos fuzzy do tipo 2. A Figura 2.8 ilustra diferentes tipos de FOU.

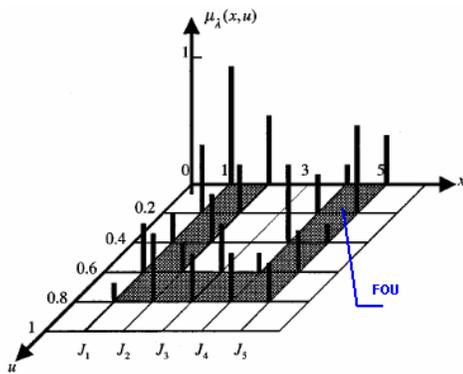


Figura 2.7. Mancha de incerteza FOU.

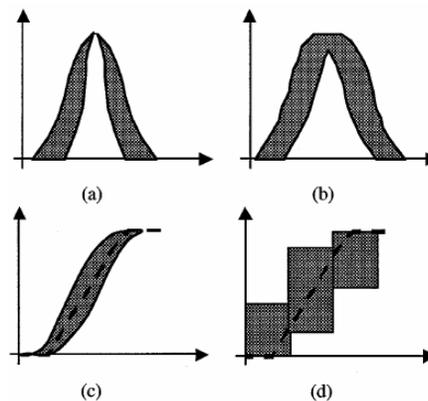


Figura 2.8. Diferentes tipos de FOUs

Na Figura 2.8 são apresentados diferentes tipos de FOUs, assim na Figura 2.8 (a) tem-se o FOU para o caso de uma função de pertinência gaussiana com incerteza no desvio padrão. Na Figura 2.8 (b) observa-se o FOU para uma função de pertinência gaussiana com incerteza na média. A Figura 2.8 (c) mostra o FOU para uma função de pertinência sigmóide com incerteza no ponto de inflexão, e

finalmente a Figura 2.8 (d) mostra o FOU para uma função de pertinência sigmóide granulada com incertezas nos grânulos.

2.2.2.6.

Função de Pertinência Primária

Considerando uma família de funções de pertinência do tipo 1, $\mu_A(x | p_1, p_2, \dots, p_v)$, onde p_1, p_2, \dots, p_v são os parâmetros de uma destas funções, e alguns ou todos estes parâmetros variam em algum intervalo de valores, ou seja $p_i \in P_i (i = 1, \dots, v)$, a função de pertinência primária pode ser qualquer uma destas funções de pertinência do tipo 1. Assim, a função de pertinência primária é denotada por:

$$\mu_A(x) = \mu_A(x | p_1 = p_{1'}, p_2 = p_{2'}, \dots, p_v = p_{v'}) \quad \text{Equação 2.6}$$

Portanto, a família de todas as funções de pertinência primárias cria um FOU. As Figuras 2.9 e 2.10 mostram respectivamente a função de pertinência primária e a FOU a ela associada para um conjunto fuzzy do tipo 2.

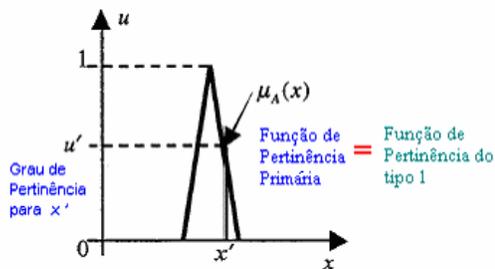


Figura 2.9. Função de pertinência primária.



Figura 2.10. FOU Associado à função de pertinência primária da Figura 2.9

2.2.2.7.

Tipos de Conjuntos Fuzzy do Tipo 2 e FOUs

Os conjuntos fuzzy do tipo 2 e suas respectivas FOU mais utilizados são:

- **Função de Pertinência Primária Gaussiana com Incerteza na Média (Desvio Padrão σ fixo):** a função de pertinência primária gaussiana tem um desvio padrão σ fixo e uma incerteza na média que assume valores em $[m_1, m_2]$, isto é:

$$\mu_A(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \quad m \in [m_1, m_2] \quad \text{Equação 2.7}$$

Desta forma, construindo-se o gráfico de $\mu_A(x)$ para diferentes valores de m , obtêm-se diferentes curvas de pertinência. Isto é ilustrado na Figura 2.11, onde o FOU uniforme denota conjuntos intervalares para as funções de pertinência secundárias.

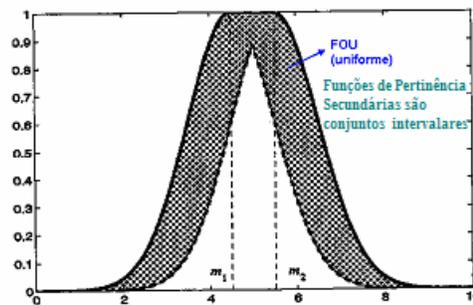


Figura 2.11. FOU para a função de pertinência primária gaussiana com incerteza na média

- **Função de Pertinência Primária Gaussiana com Incerteza no Desvio Padrão (Média fixa):** a função de pertinência primária gaussiana tem uma média m fixa e uma incerteza no desvio padrão que assume valores em $[\sigma_1, \sigma_2]$, isto é:

$$\mu_A(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] \quad \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2] \quad \text{Equação 2.8}$$

Fazendo a ilustração gráfica de $\mu_A(x)$ para diferentes valores de σ resulta em diferentes curvas de pertinência. Isto é ilustrado na Figura 2.12, onde novamente o FOU uniforme denota conjuntos intervalares para as funções de pertinência secundárias.

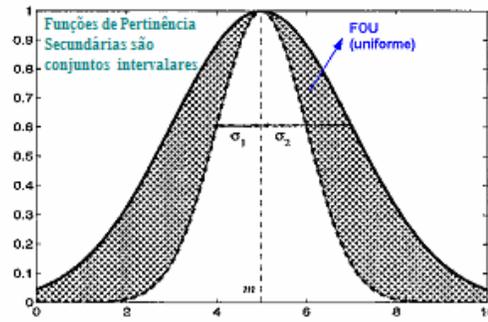


Figura 2.12. FOU para função de pertinência primária gaussiana com incerteza no desvio padrão.

2.2.2.8.

Funções de Pertinência Superior e Inferior

As funções de pertinência superior e inferior são duas funções de pertinência do tipo 1 que limitam a FOU de um conjunto fuzzy \tilde{A} do tipo 2.

A função de pertinência superior é associada ao limite superior de $FOU(\tilde{A})$, e é denotada por $\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \forall x \in X$. A função de pertinência superior é dada por:

$$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \overline{FOU(\tilde{A})} = \bigcup_{x \in X} \overline{J_x} \quad \text{Equação 2.9}$$

A função de pertinência inferior é associada ao limite inferior de $FOU(\tilde{A})$, e é denotada por $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \forall x \in X$. Neste caso, é dada por:

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv \underline{FOU(\tilde{A})} = \bigcup_{x \in X} \underline{J_x} \quad \text{Equação 2.10}$$

onde $\overline{J_x}$ e $\underline{J_x}$ representam o limite superior e inferior em J_x , respectivamente.

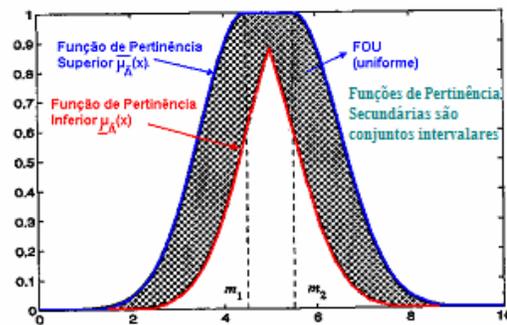


Figura 2.13. Funções de pertinência superior e inferior do conjunto fuzzy do tipo 2

2.2.2.9.

Representação em termos das Funções de Pertinência Superior e Inferior

Um conjunto fuzzy do tipo 2 pode ser representado pelas suas funções de pertinência superior e inferior da seguinte forma:

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x, u) = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x \quad \text{Equação 2.11}$$

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x, u) = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} f_x(u) / u \right] / x \quad \text{Equação 2.12}$$

Das equações 2.11 e 2.13 pode-se observar que a função de pertinência secundária $\mu_{\tilde{A}}(x)$ pode ser representada em termos das suas funções de pertinência superior e inferior como: $\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} f_x(u) / u$.

No caso de conjuntos fuzzy intervalares do tipo 2, tem-se que $f_x(u) = 1$ (grau secundário). Portanto, \tilde{A} é representado pelas suas funções de pertinência superior e inferior da seguinte forma:

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x, u) = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} 1 / u \right] / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]} 1 / u \right] / x \quad \text{Equação 2.13}$$

2.3.

Principais Sistemas de Inferência Fuzzy do Tipo 2

Na literatura existem diferentes tipos de sistemas de inferência fuzzy do tipo 2. Entre os principais, tem-se;

- SIF do tipo 2 Mamdani com entradas singleton
- SIF do tipo 2 TSK com entradas singleton

A seguir serão apresentados os diferentes tipos de SIF do tipo 2 mencionados acima.

2.3.1

Sistemas de Inferência Fuzzy do Tipo 2 Mamdani com Entradas Singleton

2.3.1.1

Componentes dos Sistemas de Inferência Fuzzy do Tipo 2 Mamdani com Entradas Singleton

A Figura 2.14. mostra um sistema genérico de inferência fuzzy do tipo 2 [MEND00-I]. Os SIF do tipo 2 apresentam quatro componentes: fuzzificador, regras, bloco de inferência, e bloco processador de saída. O bloco processador de saída é composto pelos blocos redutor de tipo e de defuzzificação.

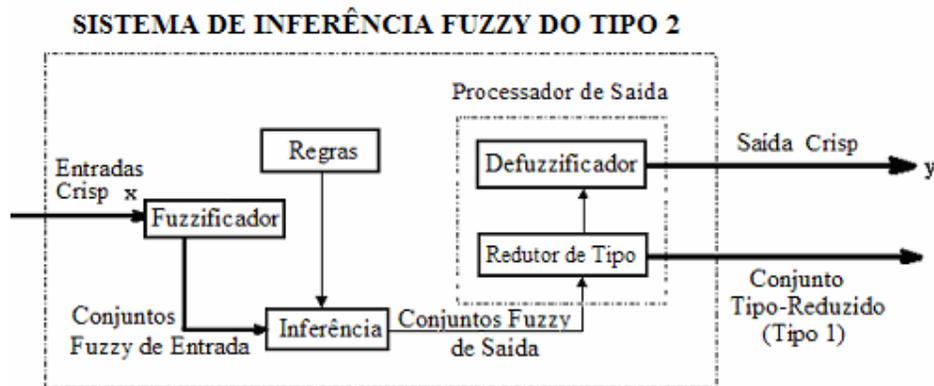


Figura 2.14. Sistemas genéricos de inferência fuzzy do tipo 2.

Na Figura 2.14, as entradas crisp são fuzzificadas em conjuntos fuzzy do tipo 2 de entrada, os quais ativam o bloco de inferência. O bloco de inferência combina regras do tipo 2 e mapeia conjuntos fuzzy do tipo 2 de entrada em conjuntos fuzzy do tipo 2 de saída. A extensão da composição *sup-star* é o cálculo fundamental para SIFs do tipo 2. O conjunto fuzzy do tipo 2, resultante do bloco de inferência, é resultado da combinação de vários conjuntos de saída, onde cada conjunto de saída, da mesma forma que em sistemas de inferência fuzzy do tipo 1, é o resultado da ativação de uma regra.

Em um SIF genérico do tipo 2 o bloco processador de saída apresenta dois componentes. O primeiro, chamado redutor de tipo, mapeia o conjunto fuzzy do tipo 2 de saída do bloco de inferência em um conjunto fuzzy do tipo 1. O segundo bloco, chamado defuzzificador, executa a defuzzificação deste último conjunto.

Um SIF do tipo 2 Mamdani com entradas singleton apresenta os quatro componentes de um SIF genérico do tipo 2, isto é, regras, fuzzificador, bloco de inferência e bloco processador de saída. As regras para um SIF do tipo 2 Mamdani com entradas singleton são dadas pela equação 2.14, nestas regras todos os conjuntos fuzzy envolvidos são do tipo 2. O fuzzificador usado neste sistema é o fuzzificador singleton do tipo 2 [MEND00-I], [MEND00-II]. A seguir serão detalhados os principais componentes deste sistema.

- **Regras**

Considerando um SIF Mamdani do tipo 2 com p entradas $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$ e uma saída $y \in Y$, e supondo M regras, então, a l -ésima regra é dada por:

$$R^l : \text{IF } x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \tilde{F}_p^l, \text{ THEN } y \text{ is } \tilde{G}^l \quad \text{Equação 2.14}$$

onde: $l = 1, \dots, M$

Nesta regra do tipo 2 todos os conjuntos fuzzy envolvidos são do tipo 2.

- **Bloco de Inferência**

O bloco de inferência combina regras e mapeia conjuntos fuzzy do tipo 2 de entrada em conjuntos fuzzy do tipo 2 de saída. Para este fim, calcula uniões e interseções de conjuntos fuzzy do tipo 2 e usa composições de relações do tipo 2, como a composição estendida *sup-star*.

Em um SIF do tipo 2 cada regra é interpretada como uma implicação fuzzy do tipo 2, isto é:

$$R^l : \tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l \rightarrow \tilde{G}^l = \tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l \quad l = 1, \dots, M \quad \text{Equação 2.15}$$

onde a função de pertinência da l -ésima regra R^l é dada por:

$$\mu_{R^l}(\mathbf{x}, y) = \mu_{\tilde{F}_1^l \times \dots \times \tilde{F}_p^l}(x_1, \dots, x_p, y) = \mu_{\tilde{A}^l \rightarrow \tilde{G}^l}(\mathbf{x}, y)$$

por [MEND00-I] tem-se:

$$\mu_{R^l}(x, y) = \mu_{\tilde{F}_1}(x_1) \Pi \dots \Pi \mu_{\tilde{F}_p}(x_p) \Pi \mu_{\tilde{G}}(y) = \left[\Pi_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i}(x_i) \right] \Pi \mu_{\tilde{G}}(y)$$

Equação 2.16

onde: Π = operador *meet* (usando o mínimo ou o produto como *t-norm*)

p = número de variáveis de entrada.

De forma geral a entrada p -dimensional para a regra R^l é dada por um conjunto fuzzy do tipo 2 - \tilde{A}_x , cuja função de pertinência é:

$$\mu_{\tilde{A}_x}(\mathbf{x}) = \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \Pi \mu_{\tilde{X}_2}(x_2) \Pi \dots \Pi \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) = \Pi_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \quad \text{Equação 2.17}$$

onde, $\tilde{X}_i (i = 1, \dots, p)$ são os *labels* dos conjuntos fuzzy do tipo 2 que descrevem as entradas.

Cada regra R^l determina um conjunto fuzzy do tipo 2 da forma $\tilde{B}^l = \tilde{A}_x \circ R^l$. Para um SIF do tipo 2 tem-se:

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \mu_{\tilde{A}_x \circ R^l}(y) = \sqcup_{x \in X} \left[\mu_{\tilde{A}_x}(x) \Pi \mu_{R^l}(x, y) \right] \quad y \in Y \quad l = 1, \dots, M$$

Equação 2.18

onde: \sqcup = operador *join* (união de conjuntos fuzzy do tipo 2)

Π = operador *meet* (usando o mínimo ou o produto como *t-norm*)

substituindo as equações 2.16 e 2.17 em 2.18 obtêm-se:

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \sqcup_{x \in X} \left[\mu_{\tilde{A}_x}(x) \Pi \mu_{R^l}(x, y) \right] = \sqcup_{x \in X} \left\{ \left[\Pi_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \right] \Pi \left[\Pi_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i}(x_i) \right] \Pi \mu_{\tilde{G}}(y) \right\}$$

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \sqcup_{x \in X} \left\{ \left[\Pi_{i=1}^p \mu_{\tilde{X}_i}(x_i) \Pi \mu_{\tilde{F}_i}(x_i) \right] \Pi \mu_{\tilde{G}}(y) \right\}$$

Da propriedade de comutatividade do operador *meet* (usando o mínimo ou o produto para *t-norm*) tem-se:

$$\mu_{\tilde{B}'}(y) = \mu_{\tilde{G}'}(y) \prod \left\{ \left[\prod_{x_1 \in X_1} \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \prod \mu_{\tilde{F}'_1}(x_1) \right] \prod \dots \prod \left[\prod_{x_p \in X_p} \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) \prod \mu_{\tilde{F}'_p}(x_p) \right] \right\}$$

Equação 2.19

A Equação 2.19 representa a relação entrada-saída entre os conjuntos fuzzy do tipo 2 que excitam uma regra no bloco de inferência e o conjunto fuzzy do tipo 2 na saída do bloco de inferência.

Fuzzificação e seus Efeitos na Inferência

Fuzzificador:

Conforme mencionado anteriormente, o fuzzificador usado em um SIF do tipo 2 Mamdani com entradas singleton é o fuzzificador singleton do tipo 2. O fuzzificador mapeia o ponto crisp $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p \equiv \mathbf{X}$ dentro de um conjunto fuzzy do tipo 2 \tilde{A}_x em \mathbf{X} .

Neste caso, \tilde{A}_x é um conjunto fuzzy do tipo 2 singleton, onde, $\mu_{\tilde{A}_x}(x) = 1/1$ para $x = x'$ e $\mu_{\tilde{A}_x}(x) = 1/0$ para $x \neq x'$. Como usamos funções de pertinência separáveis, então $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) = 1/1$ quando $x_i = x_i'$ e $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i) = 1/0$ quando $x_i \neq x_i'$ para $i = 1, \dots, p$.

Efeitos na Inferência:

Como dito acima, quando o conjunto fuzzy do tipo 2 de entrada \tilde{A}_x é do tipo singleton, $\mu_{\tilde{X}_i}(x_i)$ é diferente de zero só no ponto $x_i = x_i'$. Portanto, usando o mínimo ou o produto para o operador *t-norm*, a equação 2.19 fica reduzida como segue:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}'}(y) &= \mu_{\tilde{G}'}(y) \prod \left\{ \left[\prod_{x_1 \in X_1} \mu_{\tilde{X}_1}(x_1) \prod \mu_{\tilde{F}'_1}(x_1) \right] \prod \dots \prod \left[\prod_{x_p \in X_p} \mu_{\tilde{X}_p}(x_p) \prod \mu_{\tilde{F}'_p}(x_p) \right] \right\} \\ \mu_{\tilde{B}'}(y) &= \mu_{\tilde{G}'}(y) \prod \left\{ \left[\mu_{\tilde{X}_1}(x_1') \prod \mu_{\tilde{F}'_1}(x_1') \right] \prod \dots \prod \left[\mu_{\tilde{X}_p}(x_p') \prod \mu_{\tilde{F}'_p}(x_p') \right] \right\} \\ \mu_{\tilde{B}'}(y) &= \mu_{\tilde{G}'}(y) \prod \left\{ \left[(1/1) \prod \mu_{\tilde{F}'_1}(x_1') \right] \prod \dots \prod \left[(1/1) \prod \mu_{\tilde{F}'_p}(x_p') \right] \right\} \end{aligned}$$

Equação 2.20

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y) = \mu_{\tilde{G}^l}(y) \prod \left[\prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i') \right], \quad y \in Y \quad \text{Equação 2.21}$$

onde, $\prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i')$ é referido ao conjunto ativado, uma vez que em um SIF do tipo 2 com entradas singleton o nível de ativação de uma regra é, na verdade, um conjunto que altera o conjunto consequente.

- **Processo de Redução de Tipo**

Após o processo de inferência, o conjunto fuzzy do tipo 2 de saída do bloco de inferência deve ser processado pelo bloco denominado Processador de Saída. A primeira operação é o processo de Redução de Tipo, o qual transforma o conjunto de saída do bloco de inferência em um conjunto fuzzy do tipo 1. Este conjunto é chamado conjunto tipo-reduzido [KARN98-II], [MEND00-I].

Se o SIF do tipo 2 é visto como uma versão “*perturbada*” de um SIF do tipo 1 devido às incertezas nas suas funções de pertinência, então o conjunto tipo-reduzido em um SIF do tipo 2 é uma representação das incertezas na saída crisp devido a essas “*perturbações*”. Portanto, alguma medida de largura do conjunto tipo-reduzido pode ser usada para indicar a possível variação da saída crisp devido a essa “*perturbação*” (semelhante ao intervalo de confiança).

Os métodos mais usados para o processo de redução de tipo são: centróide, centro de somas, altura, altura modificada e centro de conjuntos. Maiores detalhes destes métodos são encontrados em [MEND00-I], [MEND00-II].

- **Defuzzificação**

O segundo módulo do Processador de Saída é a Defuzzificação. Neste processo, o conjunto tipo-reduzido é defuzzificado para conseguir a saída precisa (crisp) do SIF do tipo 2. O método mais natural para efetuar a defuzzificação parece ser calculando o centróide do conjunto tipo-reduzido. Maiores detalhes são encontrados em [MEND00-I], [MEND00-II].

2.3.1.2.

Sistemas de Inferência Fuzzy Intervalares do Tipo 2 Mamdani com Entradas Singleton

Em geral, os SIF do tipo 2 são complexos devido aos seguintes aspectos:

- a complexidade computacional das operações *meet*, que deve ser executada para cada regra ativada;
- a execução do processo de redução de tipo é bastante complexo computacionalmente; e
- não se tem uma base racional para se escolher a forma das funções de pertinência secundárias.

Para simplificar a complexidade computacional dos SIF do tipo 2, usam-se conjuntos fuzzy intervalares do tipo 2. Assim, o cálculo das operações *meet*, *join* e do processo de redução de tipo fica simplificado. Conjuntos intervalares do tipo 2 permitem que as suas funções de pertinência secundárias possam distribuir uniformemente a incerteza nas pertinências primárias. Portanto, a complicação em relação à escolha da forma das funções de pertinência secundárias fica solucionada.

A seguir serão descritos o bloco de inferência e os processos redução de tipo e defuzzificação dos SIF intervalares do tipo 2 Mamdani com entradas singleton.

Bloco de Inferência

Em um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton, com *meet* calculado usando o mínimo ou o produto como *t-norm*, tem-se [MEND00-I]:

- a) O resultado das operações da entrada e os antecedentes é um conjunto intervalar do tipo 1 contido no conjunto ativado $\prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i}(x_i) \equiv F^l(\mathbf{x}')$. O conjunto ativado é dado por:

$$F^l(\mathbf{x}') = \left[\underline{f}^l(\mathbf{x}'), \overline{f}^l(\mathbf{x}') \right] \equiv \left[\underline{f}^l, \overline{f}^l \right] \quad \text{Equação 2.22}$$

$$\underline{f}^l(\mathbf{x}') = \underline{\mu}_{\underline{F}_1}(x_1') * \dots * \underline{\mu}_{\underline{F}_p}(x_p') \quad \text{Equação 2.23}$$

$$\overline{f}^l(\mathbf{x}') = \overline{\mu}_{\overline{F}_1}(x_1') * \dots * \overline{\mu}_{\overline{F}_p}(x_p') \quad \text{Equação 2.24}$$

onde:

$F^l(x')$ = força de ativação ou conjunto intervalar ativado

$\underline{f}^l(x')$ = ponto limite esquerdo do domínio do conjunto intervalar ativado

$\overline{f}^l(x')$ = ponto limite direito do domínio do conjunto intervalar ativado

$\overline{\mu}_{\overline{F}_1}(x_1')$ = grau de pertinência de x_1 na função de pertinência superior do conjunto antecedente F_1

$\underline{\mu}_{\underline{F}_1}(x_1')$ = grau de pertinência de x_1 na função de pertinência inferior do conjunto antecedente F_1

- b) Usando a definição descrita na seção 2.2.2.9, o conjunto conseqüente de saída da l -ésima regra ativada da equação 2.20, $\mu_{\underline{B}^l}(y)$, é um conjunto fuzzy do tipo 1 dado por:

$$\mu_{\underline{B}^l}(y) = \int_{b^l}^{\int_{\underline{f}^l * \underline{\mu}_{\underline{G}^l}(y), \overline{f}^l * \overline{\mu}_{\overline{G}^l}(y)}} 1/b^l \quad y \in Y, \quad \text{Equação 2.25}$$

onde: $\underline{\mu}_{\underline{G}^l}(y)$ = grau de pertinência inferior de $\mu_{\underline{G}^l}(y)$

$\overline{\mu}_{\overline{G}^l}(y)$ = grau de pertinência superior de $\mu_{\overline{G}^l}(y)$

$$\underline{f}^l * \underline{\mu}_{\underline{G}^l}(y) = \underline{b}^l(y)$$

$$\overline{f}^l * \overline{\mu}_{\overline{G}^l}(y) = \overline{b}^l(y)$$

- c) Supondo que N regras das M regras existentes no SIF do tipo 2 são ativadas, onde, $N \leq M$, e supondo que o conjunto fuzzy combinado do tipo 1 de saída é obtido combinando os conjuntos conseqüentes de saída ativados, isto é $\mu_{\underline{B}}(y) = \prod_{i=1}^N \mu_{\underline{B}^i}(y)$, então:

$$\mu_{\underline{B}}(y) = \int_{b^l}^{\int_{\left[\underline{f}^1 * \underline{\mu}_{\underline{G}^1}(y) \right] \vee \dots \vee \left[\underline{f}^N * \underline{\mu}_{\underline{G}^N}(y) \right], \left[\overline{f}^1 * \overline{\mu}_{\overline{G}^1}(y) \right] \vee \dots \vee \left[\overline{f}^N * \overline{\mu}_{\overline{G}^N}(y) \right]} 1/b \quad , \quad y \in Y$$

Equação 2.26

onde : \vee = t-conorm máximo

$$\underline{b}^1(y) \vee \underline{b}^2(y) \vee \dots \vee \underline{b}^N(y) = \underline{b}(y)$$

$$\bar{b}^1(y) \vee \bar{b}^2(y) \vee \dots \vee \bar{b}^N(y) = \bar{b}(y)$$

Exemplo Aplicativo:

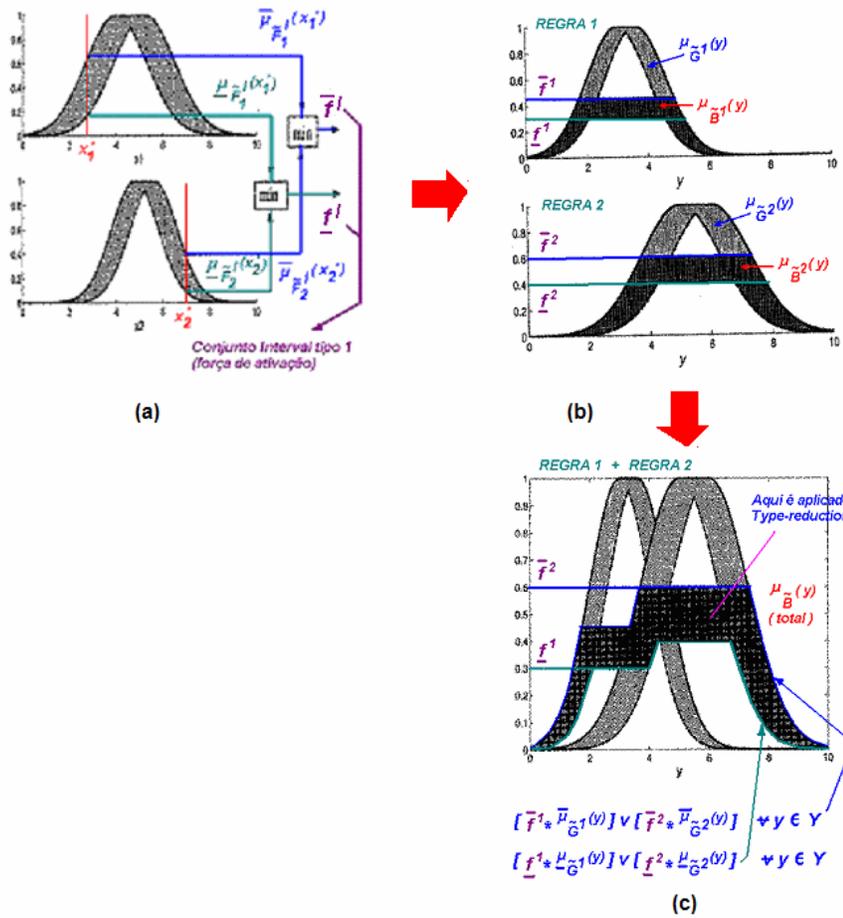


Figura 2.15 (a) Descrição das operações entre as entradas e os antecedentes para um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton usando o mínimo como *t-norm*. (b) Descrição das operações nos consequentes (conjuntos ativados). (c) Descrição do conjunto combinado de saída para os dois conjuntos de saída ativados da Figura 2.15 (b).

Este exemplo ajuda a entender como um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton modela as incertezas relacionadas às funções de pertinência dos antecedentes e consequentes desde a entrada de um SIF à saída do seu bloco de inferência.

As Figuras 2.15 (a) e 2.16 (a) descrevem as operações das entradas com os antecedentes, calculada segundo as equações 2.19, 2.23 e 2.24 para um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton com regras de 2 antecedentes e 1 conseqüente, usando o mínimo ou o produto como *t-norm*, respectivamente.

Em todos os casos a força de ativação (firing strength) é um conjunto intervalar do tipo 1 $[\underline{f}^l, \overline{f}^l]$, onde:

$$\underline{f}^l = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1') * \underline{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2')$$

$$\overline{f}^l = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1') * \overline{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2')$$

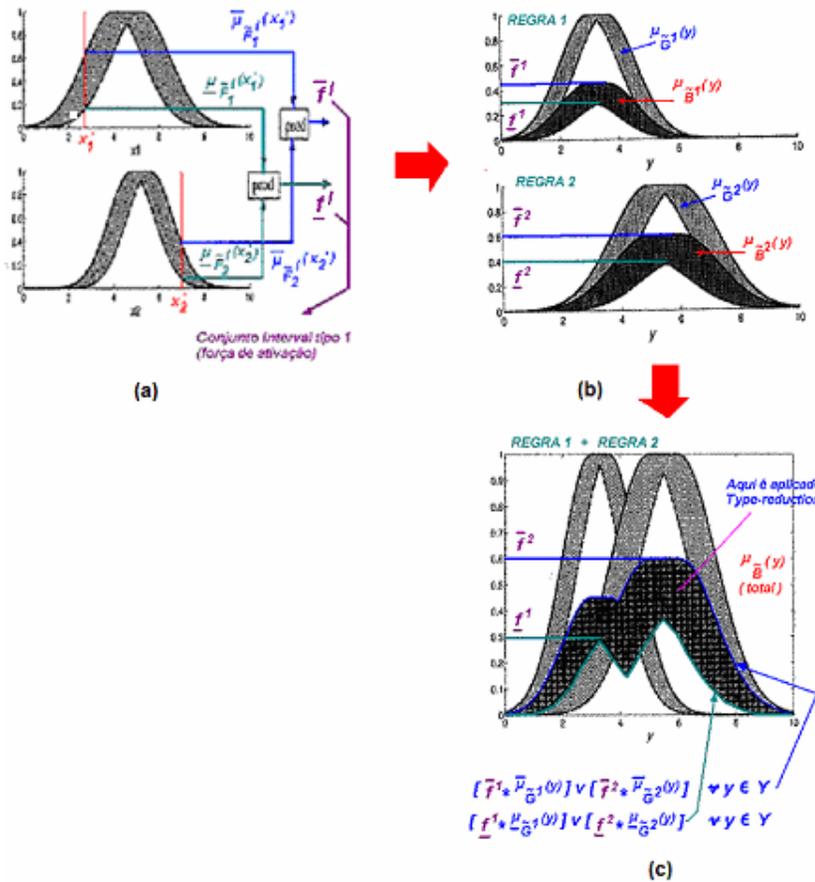


Figura 2.16.(a) Descrição das operações entre as entradas e os antecedentes para um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton usando o produto como *t-norm*. (b) Descrição das operações nos conseqüentes (conjuntos ativados). (c) Descrição do conjunto combinado de saída para os dois conjuntos de saída ativados da Figura 2.16.(b).

O grau de pertinência da entrada x_j na função de pertinência superior $\overline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1')$ do conjunto antecedente F_1 ocorre na intercepção da linha vertical na

entrada x_1 com a função de pertinência superior $\bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1')$ do conjunto antecedente F_1 .

- usando o mínimo como *t-norm* tem-se:

$$\underline{f}^l = \min\left[\underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1'), \underline{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2')\right]$$

$$\bar{f}^l = \min\left[\bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1'), \bar{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2')\right]$$

- usando o produto como *t-norm* tem-se:

$$\underline{f}^l = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1') \times \underline{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2')$$

$$\bar{f}^l = \bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1') \times \bar{\mu}_{\tilde{F}_2}(x_2')$$

As Figuras 2.15.(b) e 2.16.(b) descrevem o conjunto conseqüente de saída da *l-ésima* regra ativada $\mu_{\tilde{B}^l}(y)$ para um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton de duas regras. O conseqüente é calculado usando a equação 2.25 em cada $y \in Y$.

O ponto limite direito do conjunto ativado \bar{f}^l é “t-normado” com a função de pertinência superior do conjunto conseqüente $\bar{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)$, resultando na curva sólida superior $\bar{f}^l * \bar{\mu}_{\tilde{G}^l}(y) \quad \forall y \in Y$. Já o ponto limite esquerdo do conjunto ativado \underline{f}^l é “t-normado” com a função de pertinência inferior do conjunto conseqüente $\underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y)$, resultando na curva sólida inferior $\underline{f}^l * \underline{\mu}_{\tilde{G}^l}(y) \quad \forall y \in Y$.

Portanto, a pertinência primária do conjunto conseqüente de saída da *l-ésima* regra ativada $\mu_{\tilde{B}^l}(y) \quad \forall y \in Y$, isto é $FOU(\tilde{B}^l)$, é a área entre estas duas curvas.

As Figuras 2.15.(c) e 2.16.(c) descrevem o conjunto combinado do tipo 2 de saída para um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton de duas regras, onde, os conjuntos de saída ativados são combinados segundo a equação 2.26, usando o máximo para t-conorm.

A curva superior sólida corresponde a $[\underline{f}^1 * \bar{\mu}_{\tilde{G}^1}(y)] \vee [\underline{f}^2 * \bar{\mu}_{\tilde{G}^2}(y)] \forall y \in Y$, e a curva inferior entrecortada corresponde a $[\underline{f}^1 * \underline{\mu}_{\tilde{G}^1}(y)] \vee [\underline{f}^2 * \underline{\mu}_{\tilde{G}^2}(y)] \forall y \in Y$.

Seja $\mu_{\tilde{B}}(y) \forall y \in Y$ o conjunto resultante da combinação dos conjuntos conseqüentes de saída das regras 1 e 2 ativadas. A pertinência primária deste conjunto, isto é, o $FOU(\tilde{B})$, é a área entre estas duas funções. O processo de redução de tipo é aplicado a $\mu_{\tilde{B}}(y) \forall y \in Y$.

Redução de Tipo e Defuzzificador

Em um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton, o conjunto tipo-reduzido é um conjunto intervalar dado por: $Y_{TR} = [y_l, y_r]$. Num SIF intervalar do tipo 2 Mamdani, o processo de redução de tipo centro de conjuntos é o mais usado, neste tipo de SIF do tipo 2 a saída do processo de redução de tipo centro de conjuntos, $Y_{cos}(\mathbf{x})$, é dada por [MEND00-I], [KARN98-II]:

$$Y_{cos}(\mathbf{x}) = [y_l, y_r] = \int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \dots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} \int_{f^1 \in [\underline{f}^1, \bar{f}^1]} \dots \int_{f^M \in [\underline{f}^M, \bar{f}^M]} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i}$$

Equação 2.27

onde:

$$y_l = \frac{\sum_{i=1}^M f_l^i y_l^i}{\sum_{i=1}^M f_l^i} \quad ; \quad y_r = \frac{\sum_{i=1}^M f_r^i y_r^i}{\sum_{i=1}^M f_r^i} \quad \text{Equações 2.28}$$

onde:

$Y_{cos}(\mathbf{x}) =$ conjunto intervalar de pontos limites $[y_l, y_r]$. Os valores de y_l e y_r são calculados pelo procedimento iterativo descrito no capítulo 3 e no apêndice C. [MEND00-I].

$Y^i = [y_l^i, y_r^i] =$ centróide do conjunto conseqüente intervalar do tipo 2, \tilde{G}^i .

Estes devem ser pré-calculados antes de calcular $Y_{cos}(\mathbf{x})$.

M = número de regras, $i = 1 \dots M$.

f_r^i, y_r^i = valores de f^i, y^i que estão associados a y_r respectivamente.

Estes valores são calculados pelo procedimento iterativo descrito no capítulo 3 e no apêndice C. $f^i \in F^i = [\underline{f}^i, \overline{f}^i]$; $y^i \in Y^i$.

f_l^i, y_l^i = valores de f^i, y^i que estão associados a y_l respectivamente.

Estes valores também são calculados pelo procedimento iterativo mencionado acima. $f^i \in F^i = [\underline{f}^i, \overline{f}^i]$; $y^i \in Y^i$.

Como Y_{cos} é um conjunto intervalar, a saída defuzzificada do SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com Entradas Singleton é dada pela média dos pontos limites y_l e y_r .

2.3.2.

Sistemas de Inferência Fuzzy do Tipo 2 TSK

Um SIF do tipo 2 TSK apresenta quatro componentes: regras, fuzzificador, bloco de inferência e processador de saída [MEND00-I].

Seja um SIF do tipo 2 TSK com p entradas $x_1 \in X_1, \dots, x_p \in X_p$ e uma saída $y \in Y$. Este modelo é descrito por regras fuzzy IF-THEN, as quais representam relações entrada-saída do sistema. No caso de um SIF do tipo 2 TSK geral de primeiro ordem com uma base de regras composta por M regras de p antecedentes, a i -ésima regra pode ser expressa por:

$$R^i : \text{IF } x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \tilde{F}_p^i, \text{ THEN } Y^i = C_0^i + C_1^i x_1 + C_2^i x_2 + \dots + C_p^i x_p$$

onde: M = número de regras, $i=1, \dots, M$;

C_j^i = conjuntos fuzzy do tipo 1 conseqüentes, $j=0, 1, \dots, p$

Y^i = saída da i -ésima regra, a qual é um conjunto fuzzy do tipo 1

\tilde{F}_k^i = conjuntos fuzzy do tipo 2 antecedentes, $k=1, \dots, p$

Estas regras levam em consideração simultaneamente as incertezas relacionadas às funções de pertinência antecedentes, e, as incertezas relacionadas

aos valores dos *parâmetros* consequentes. Neste tipo de SIF, diferente dos modelos Mamdani, as incertezas relacionadas aos consequentes não consideram as incertezas lingüísticas destes.

Supondo que os C_i^j são subconjuntos fuzzy do tipo 1 convexos e normais, então estes C_i^j são números fuzzy. Similarmente à seção 2.3.1 em um SIF do tipo 2 TSK o conjunto de ativação da *i-ésima* regra é dado por:

$$F^i(x) = \prod_{k=1}^p \mu_{\tilde{F}_k^i}(x_k) \tag{Equação 2.29}$$

A saída de um SIF do tipo 2 TSK, obtida pela aplicação do Princípio da Extensão à saída de um SIF do tipo 1 TSK [MEND00-I], é dada por:

$$Y_{TSK,2}(x) = \int_{y^1 \in Y^1} \cdots \int_{y^M \in Y^M} \int_{f^1 \in F^1} \cdots \int_{f^M \in F^M} [T_{i=1}^M \mu_{Y^i}(y^i) * T_{i=1}^M \mu_{F^i}(f^i)] \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \tag{Equação 2.30}$$

onde: $Y^i = C_0^i + C_1^i x_1 + C_2^i x_2 + \dots + C_p^i x_p$

T = operação *t-norm*

Nesta equação, $f^i(x)$ e $y^i(x)$ são conjuntos fuzzy do tipo 1. Embora a equação 2.30 seja semelhante ao conjunto tipo-reduzido resultante do processo de redução de tipo centro de conjuntos em um SIF do tipo 2 Mamdani com entradas singleton, um SIF do tipo 2 TSK não precisa do processo de redução de tipo.

A saída $Y_{TSK,2}(x)$ revela a incerteza da saída em um SIF do tipo 2 TSK devido às incertezas relacionadas aos antecedentes e aos parâmetros consequentes.

Como dito na seção 2.3.1.2, os SIF do tipo 2 são complexos, portanto, o cálculo da equação 2.30 torna-se custoso computacionalmente. Os SIF intervalares do tipo 2 TSK são uma opção com menor custo computacional já que também apresentam as vantagens mencionadas na seção 2.3.1.2.

2.3.2.1.

Sistemas de Inferência Fuzzy Intervalares do Tipo 2 TSK

Quando conjuntos fuzzy intervalares do tipo 2 são usados como antecedentes, e, conjuntos fuzzy intervalares do tipo 1 são usados como conjuntos conseqüentes em uma regra do tipo 2 TSK, então, $\mu_{\tilde{F}_k}(x_k)$ e C_j^i são conjuntos intervalares, isto é:

$$\mu_{\tilde{F}_k}(x_k) = \left[\underline{\mu}_{\tilde{F}_k}(x_k), \bar{\mu}_{\tilde{F}_k}(x_k) \right] \quad k = 1, \dots, p$$

$$C_j^i = [c_j^i - s_j^i, c_j^i + s_j^i]$$

onde: c_j^i = centro ou média de C_j^i

s_j^i = extensão de C_j^i , $i = 1, \dots, M$ e $j = 0, 1, \dots, p$.

Desta forma, em um SIF intervalar do tipo 2 TSK com *meet* calculado usando o mínimo e o produto como *t-norm* tem-se [MEND00-I]:

- a) O resultado das operações da entrada com os antecedentes, que estão contidos no conjunto ativado $F^i(x)$ é um conjunto intervalar do tipo 1:

$$F^i(x) \equiv \left[\underline{f}^i(x), \bar{f}^i(x) \right] \quad \text{Equação 2.31}$$

$$\underline{f}^i(x) = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1) * \dots * \underline{\mu}_{\tilde{F}_p}(x_p) \quad \text{Equação 2.32}$$

$$\bar{f}^i(x) = \bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1) * \dots * \bar{\mu}_{\tilde{F}_p}(x_p) \quad \text{Equação 2.33}$$

onde:

$F^i(x)$ = força de ativação ou conjunto intervalar ativado.

$\underline{f}^i(x)$ = ponto limite esquerdo do domínio do conjunto intervalar ativado.

$\bar{f}^i(x)$ = ponto limite direito do domínio do conjunto intervalar ativado.

$\bar{\mu}_{\tilde{F}_1}(x_1)$ = grau de pertinência de x_1 na função de pertinência superior do conjunto antecedente F_1 .

$\underline{\mu}_{\bar{F}_l^i}(x_l) =$ grau de pertinência de x_l na função de pertinência inferior do conjunto antecedente F_l .

$\bar{\mu}_{\bar{F}_p^i}(x_p) =$ grau de pertinência de x_p na função de pertinência superior do conjunto antecedente F_p .

$\underline{\mu}_{\bar{F}_p^i}(x_p) =$ grau de pertinência de x_p na função de pertinência inferior do conjunto antecedente F_p .

b) O conseqüente da i -ésima regra R^i , Y^i , é um conjunto intervalar; isto é,

$Y^i = [y_l^i, y_r^i]$, onde:

$$y_l^i = \sum_{k=1}^p c_k^i x_k^i + c_0^i - \sum_{k=1}^p |x_k| s_k^i - s_0^i \quad \text{Equação 2.34}$$

$$y_r^i = \sum_{k=1}^p c_k^i x_k^i + c_0^i + \sum_{k=1}^p |x_k| s_k^i + s_0^i \quad \text{Equação 2.35}$$

onde:

$y_l^i =$ ponto limite esquerdo do domínio do conjunto intervalar conseqüente da i -ésima regra.

$y_r^i =$ ponto limite direito do domínio do conjunto intervalar conseqüente da i -ésima regra.

Como $F^i(x)$ e Y^i ($i=1, \dots, M$) são conjuntos fuzzy intervalares do tipo 1, então $\mu_{Y^i}(y^i) = 1$ e $\mu_{F^i}(f^i) = 1$. Assim a equação 2.30 fica simplificada como segue [MEND00-I]:

$$Y_{TSK,2}(x) = [y_l, y_r] = \int_{y^1 \in [y_l^1, y_r^1]} \cdots \int_{y^M \in [y_l^M, y_r^M]} \int_{f^1 \in [f^1, \bar{f}^1]} \cdots \int_{f^M \in [f^M, \bar{f}^M]} 1 \left/ \frac{\sum_{i=1}^M f^i y^i}{\sum_{i=1}^M f^i} \right.$$

Equação 2.36

onde, $\underline{f}^i, \bar{f}^i, y_l^i$ e y_r^i são calculados usando as equações 2.32, 2.33, 2.34 e 2.35.

$Y_{TSK,2}$ é um conjunto fuzzy intervalar do tipo 1, onde, somente é preciso calcular os seus pontos limites esquerdo e direito y_l e y_r . Estes cálculos são feitos a traves do procedimento iterativo descrito no apêndice D (Teorema D.1). Os cálculos de y_l e y_r são iguais a aqueles feitos no processo de redução de tipo

centro de conjuntos em um SIF do tipo 2 Mamdani com entradas singleton (equação 2.27).

Devido a $Y_{TSK,2}$ ser um conjunto fuzzy intervalar do tipo 1, a saída defuzzificada do SIF intervalar do tipo 2 TSK é dada por:

$$Y_{TSK,2}(x) = \frac{y_l + y_r}{2} \quad \text{Equação 2.37}$$

2.3.3.

Ajuste de Parâmetros e Redução de Regras dos Sistemas de Inferência Fuzzy Intervalares do Tipo 2

Os métodos de ajuste de parâmetros e de redução de regras de um SIF do tipo 2 são uma extensão dos métodos de implementação de um SIF do tipo 1.

Em um SIF intervalar do tipo 2 Mamdani com entradas singleton com as seguintes características:

- antecedentes e conseqüentes com função de pertinência primária gaussiana com incerteza na média,
- funções de pertinência secundárias intervalares,
- implicação produto e usando o produto para *t-norm*,
- método de redução de tipo centro de conjuntos,
- defuzzificação usando o centróide do conjunto tipo reduzido;

tem-se que o número total de parâmetros pode ser calculado como segue:

- parâmetros dos antecedentes m_{i1}^l, m_{i2}^l e σ_i^l : três por antecedente, p antecedentes, M regras. Portanto tem-se um total de $3pM$ parâmetros.
- parâmetros dos conseqüentes m_1^j, m_2^j e σ^j : três por conseqüente, M regras. Portanto tem-se um total de $3M$ parâmetros. Também podem ser usados como parâmetros os centróides de cada conjunto conseqüente do tipo 2 – que é um conjunto intervalar dado por y_l^j, y_r^j . Neste caso, têm-se $2M$ parâmetros. Finalmente têm-se um total de $3pM + 2M$ parâmetros.

Em um SIF intervalar do tipo 2 TSK com as seguintes características:

- antecedentes de função de pertinência primária gaussiana com incerteza na média,
- funções de pertinência secundárias intervalares
- consequentes que são conjuntos fuzzy intervalares do tipo 1,
- implicação produto e usando o produto para t -norm,

tem-se que o número total de parâmetros pode ser calculado como segue:

- cinco parâmetros dependem do número de antecedentes associados a cada regra, isto é $m_{k1}^i, m_{k2}^i, \sigma_k^i, c_k^i$ e s_k^i , onde, $k = 1, \dots, p$ e $i = 1, \dots, M$. Além disso, existem dois parâmetros associados ao termo constante C_0^i em cada consequente, o qual depende somente do número de regras, isto é, c_0^i e s_0^i . Portanto tem-se um total de $(5p + 2)M$ parâmetros.

O método para o ajuste de parâmetros dos SIF intervalares do tipo 2 Mamdani com entradas singleton e TSK mais usado é o Método do Back-Propagation [MEND00-I].

- **Método do Back-Propagation (*Gradient Descent*):** Neste método nenhum dos parâmetros dos antecedentes e dos consequentes são fixados inicialmente, o método do *Gradient Descent* é usado para ajustar estes parâmetros. Dados pares de treinamento $(\mathbf{x}^{(t)} : y^{(t)})$, ajustam-se os parâmetros de um SIF intervalar do tipo 2 de modo que a seguinte função de erro seja minimizada:

$$e^{(t)} = \frac{1}{2} [f_{s_2}(x^{(t)}) - y^{(t)}]^2 \quad t = 1, \dots, N \quad \text{Equação 2.38}$$

$$y(\mathbf{x})^{(t)} = f_{s_2}(\mathbf{x})^{(t)} = \frac{y_l^{(t)} + y_r^{(t)}}{2}$$

onde:

$y(\mathbf{x})^{(t)}$ = saída defuzzificada do SIF intervalar do tipo 2 para o t -ésimo par de dado.

$y^{(t)}$ = saída desejada para o t -ésimo par de dado.

Os parâmetros do SIF são atualizados de forma a minimizar $e^{(t)}$ para E épocas de treinamento.

Este método, aplicado em SIF intervalares do tipo 2 Mamdani com entradas singleton e em SIF intervalares do tipo 2 TSK, difere na determinação dos valores ativos das funções de pertinência superior e inferior dos antecedentes para $x^{(t)}$, como também na determinação das derivativas que são ativadas.

Os métodos para a geração e redução de regras dos SIF intervalares do tipo 2 Mamdani com entradas singleton mais usados são:

- **Método ONE-PASS:** gera regras usando os dados de treinamento uma vez e depois combina as regras em uma base de regras para construir o SIF; todos os parâmetros devem ser especificados. Maiores detalhes deste método podem ser encontrados em [MEND00-I].
- **Método do SVD-QR:** conduz à redução de regras. É baseado nas funções de expansão FBFs (Funções Base Fuzzy) uma para y_l e a outra para y_r , no caso de um SIF intervalar do tipo 2 [MEND00-I]. O algoritmo SVD separa o espaço em espaços dominantes e subdominantes. Visualizando a matriz FBF como uma porção do subespaço de entrada, o SVD descompõe esta porção em um espaço ortogonal equivalente, no qual podem ser determinados os espaços dominantes e subdominantes. Desta forma, identificam-se os FBFs com maior contribuição. O algoritmo QR ordena as FBFs segundo um limiar, descartando aquelas que contribuem menos, reduzindo a parcimônia do SIF. Maiores detalhes deste método podem ser encontrados em [MEND00-I].

Um método iterativo é geralmente usado durante o aprendizado dos SIF intervalares do tipo 2 Mamdani. Neste método são combinados os métodos de Back-propagation e SVD-QR, até que o desempenho do SIF seja aceitável.

2.4.

Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os conjuntos fuzzy do tipo 2, assim como suas principais definições e terminologias. Foram também apresentados alguns dos principais Sistemas de Inferência Fuzzy do Tipo 2 que usam estes conjuntos, as suas principais arquiteturas, métodos para o ajuste de parâmetros e redução de regras.

O próximo capítulo apresenta os modelos propostos neste trabalho: os sistemas neuro-fuzzy hierárquicos BSP do tipo 2 que fazem uso dos paradigmas de inferência fuzzy do tipo 2.