

3

Eixo Medial

O eixo medial de uma figura nos dá uma representação compacta de suas características e sua conectividade. O eixo medial é, às vezes, chamado de esqueleto, pois a simetria do esqueleto de um ser vivo é parecida com o eixo medial da forma do membros. A complexidade do eixo medial está relacionada com a complexidade do objeto. Além disso, existe uma série de relações entre o eixo medial e seu objeto. Como referência, podemos citar (3) e (13).

Definição 3.1 (Eixo Medial) *O eixo medial interior (ou simplesmente eixo medial) \mathcal{X} de um objeto \mathcal{O} é o fecho do conjunto de pontos $m \in \mathcal{O}$ tal que m é centro de bola tangente ao $\partial\mathcal{O}$ em pelo menos dois pontos.*

O eixo medial é, então, o conjunto dos centros de bolas maximais contidas em \mathcal{O} que tangenciam o $\partial\mathcal{O}$ em pelo menos dois pontos. Isso o torna particularmente adaptado para representar uniões de bolas.

3.1

Eixo Medial de uma União de Bolas

Considere uma bola b contida em um objeto \mathcal{O} e tocando $\partial\mathcal{O}$ em pelo menos dois pontos. A definição de eixo medial implica que o centro p de b é um ponto no eixo medial de \mathcal{O} , como, por exemplo, a curva fechada da Figura 3.1.

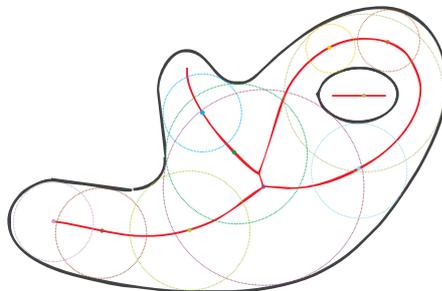


Figura 3.1: Bolas e o Eixo Medial em \mathbb{R}^2 .

Teorema 3.2 ((13), Teo 1) *Seja \mathcal{U} uma união de bolas, seja \mathcal{V} seus vértices e \mathcal{S} o 0-shape, então o eixo medial \mathcal{X} de \mathcal{U} consiste de:*

- (i) *faces singulares de \mathcal{S} , e*
- (ii) *subconjunto do diagrama de Voronoi $Vor(\mathcal{V})$ tais que o ponto mais próximo do $\partial\mathcal{U}$ é um vértice em \mathcal{V} .*

Observe a Figura 3.2.

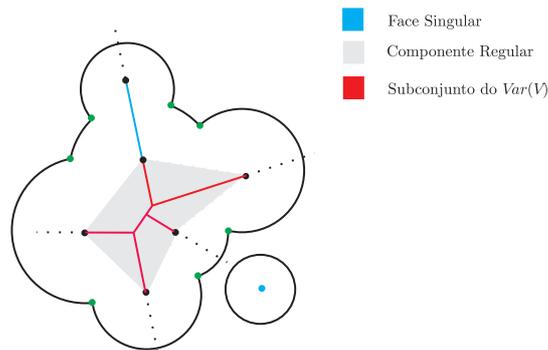


Figura 3.2: Eixo Medial de uma união de bolas.

Observação: Identificar algoritmicamente os elementos que satisfazem a condição (i) é fácil, mas não é óbvio fazê-lo para a condição (ii). Primeiro é preciso localizar os vértices, arestas e faces do $Vor(\mathcal{V})$ e determinar quais deles, ou quais partes, estão mais próximos de um vértice de \mathcal{V} do que de qualquer outro ponto no $\partial\mathcal{U}$. Combinatorialmente, isso tem algumas dificuldades numéricas, motivando, assim, a caracterização combinatorial do subconjunto do $Vor(\mathcal{V})$ pertencente ao eixo medial, que será visto adiante.

3.2 Caracterização Combinatorial

O teorema a seguir dá a caracterização do eixo medial de uma união de bolas \mathcal{U} .

Teorema 3.3 ((13), Teo 2) *Seja \mathcal{U} uma união de bolas em \mathbb{R}^d , seja \mathcal{V} os vértices de \mathcal{U} e seja \mathcal{S} o 0-shape de \mathcal{U} . O eixo medial \mathcal{X} de \mathcal{U} consiste de:*

- (i) *faces singulares de \mathcal{S} , e*
- (ii) *o subconjunto do diagrama de Voronoi $Vor(\mathcal{V})$ que intersecta as componentes regulares de \mathcal{S} .*

Para provar o Teorema 3.3 algumas propriedades do 0-shape serão usadas.

Observação 3.4 ((13)) Note que os pontos $\mathcal{U} - \mathcal{S}$ não pertencem ao eixo medial de \mathcal{U} .

Observação 3.5 ((13), Obs 3) Para cada ponto $x \in \mathcal{U} - \mathcal{S}$, existe um ponto $u \in \partial\mathcal{U}$ tal que para todo $v \in \partial\mathcal{U}$, $d(u, x) < d(v, x)$.

Para ilustrar as observações 3.4 e 3.5 vide Figura 3.3.

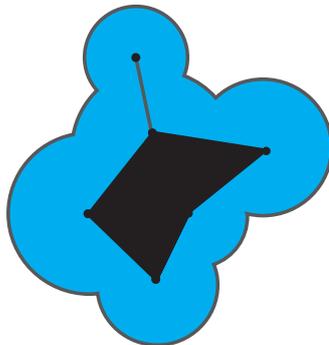


Figura 3.3: $\mathcal{U} - \mathcal{S}$.

Observação 3.6 ((13), Obs 4) Se $y \in \sigma_T$, onde σ_T é um simplexo em $\partial\mathcal{S}$, então y é o centro de uma bola^d b_y com face dual $s_T \subseteq \delta b_y \subseteq \mathcal{U}$. Vide Figura 3.4.

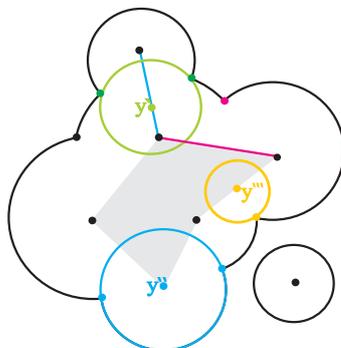


Figura 3.4: Simplexos em \mathcal{S} e duais no $\partial\mathcal{U}$.

Observação 3.7 ((13), Obs 5) Uma $(d - 1)$ -face singular em \mathcal{S} é dual a 0-face contendo dois vértices de \mathcal{U} . Uma $(d - 1)$ -face que pertence a uma componente regular de $\partial\mathcal{S}$ é dual a um único vértice de \mathcal{U} .

Em duas dimensões, uma aresta singular de \mathcal{S} é dual a uma 0-componente do bordo de \mathcal{U} contendo dois pontos do conjunto de vértices \mathcal{V} de \mathcal{U} . Um 1-simplexo que pertence a fronteira $\partial\mathcal{C}$ de uma componente regular \mathcal{C} de \mathcal{S} é dual

a uma 0-componente do bordo de \mathcal{U} contendo um único ponto do conjunto de vértices \mathcal{V} de \mathcal{U} . Um 0-simplexo em $\partial\mathcal{C}$ pode ser dual a mais de uma 1-componente do bordo de \mathcal{U} .

Lema 3.8 ((13), Lema 6) *Qualquer k -simplexo de $\partial\mathcal{S}$, para $0 \leq k < (d-1)$ pertence ao eixo medial \mathcal{X} de \mathcal{U} .*

Prova do Lema: Considere a k -face σ_T de \mathcal{S} , com $k < (d-1)$. A dimensão s_T , a face dual σ_T , é maior do que zero. Pela Observação 3.6, qualquer ponto x contido em σ_T é o centro de uma bola b com $s_T \subseteq \partial b_y \subseteq \mathcal{U}$. Desde que a dimensão de s_T seja pelo menos um, ∂b contém mais de um ponto do $\partial\mathcal{U}$ e x é um ponto do eixo medial. \square

Em \mathbb{R}^2 , $0 \leq k < 1$, ou seja, $k = 0$. A 0-face σ_T está em \mathcal{S} , logo será um ponto e sua face dual s_T no $\partial\mathcal{S}$ tem dimensão maior do que 0. Daí, pela Observação 3.6, teremos mais de um ponto mais próximo no $\partial\mathcal{U}$, ou seja, será um ponto do eixo medial.

Lema 3.9 ((13), Lema 7) *Qualquer ponto pertencente à face singular de \mathcal{S} pertence ao eixo medial \mathcal{X} de \mathcal{U} .*

Prova do Lema: Considere σ_T de dimensão $(d-1)$ e um ponto x contido neste simplexo. Pela Observação 3.7, a face dual s_T consiste de dois vértices que, pela Observação 3.6, serão mais próximos de x no $\partial\mathcal{U}$. Logo, x pertence ao eixo medial. \square

O Lema 3.8 mostrou que, para $k < (d-1)$, qualquer ponto na k -face no bordo da componente regular \mathcal{C} pertence ao eixo medial. Agora será considerado o interior de \mathcal{C} . Começando, será mostrado que, para qualquer ponto em \mathcal{C} , os pontos mais próximos no $\partial\mathcal{U}$ é um vértice de \mathcal{U} .

Lema 3.10 ((13), Lema 8) *Seja \mathcal{C} uma componente regular de \mathcal{S} . Então, para qualquer $x \in \mathcal{C}$*

- (i) *x tem exatamente um ponto mais próximo p no $\partial\mathcal{U}$ e p é vértice de \mathcal{U} , ou*
- (ii) *x tem mais de um ponto mais próximo de $\partial\mathcal{U}$, pelo menos dois deles são vértices de \mathcal{U} .*

Alguns pontos na componente regular \mathcal{C} de \mathcal{S} e respectivos pontos mais próximos no bordo de \mathcal{U} são mostrados na Figura 3.5.

Agora é possível provar o Teorema 3.3, que caracteriza o eixo medial \mathcal{X} de \mathcal{U} .

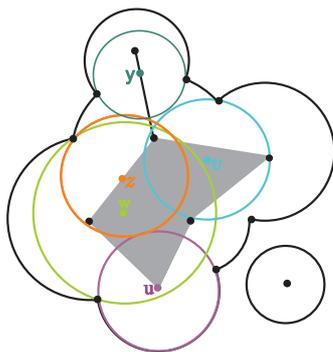


Figura 3.5: Pontos na componente regular \mathcal{C} de \mathcal{S} e respectivos pontos mais próximos em \mathcal{U} .

Prova do Teorema: Primeiro será provado que qualquer ponto da face singular de \mathcal{S} ou pertence à componente regular de \mathcal{S} e ao $Vor(\mathcal{V})$ é um ponto do eixo medial. Em seguida, será demonstrado que qualquer ponto do eixo medial pertence à face singular ou à componente regular de \mathcal{S} e ao $Vor(\mathcal{V})$.

Pelo Lema 3.9, qualquer ponto da face singular de \mathcal{S} pertence ao eixo medial. Com isso mostramos (i). Qualquer ponto x na componente regular pertencente ao $Vor(\mathcal{V})$ tem mais de um ponto mais próximo do $\partial\mathcal{U}$. O Lema 3.10 implica que não existe outro ponto no $\partial\mathcal{U}$ mais próximo de x e, então, x tem que pertencer ao eixo medial \mathcal{U} .

Agora considere um ponto m no eixo medial \mathcal{U} ; m não pode ser um ponto em $\mathcal{U} - \mathcal{S}$, pela observação 3.5. O fato de m pertencer à uma face singular já foi feito. Caso contrário, m pertence à componente regular e precisa ter mais de um ponto mais próximo de \mathcal{V} . Assim, pelo Lema 3.10, m pertence ao $Vor(\mathcal{V})$.

□

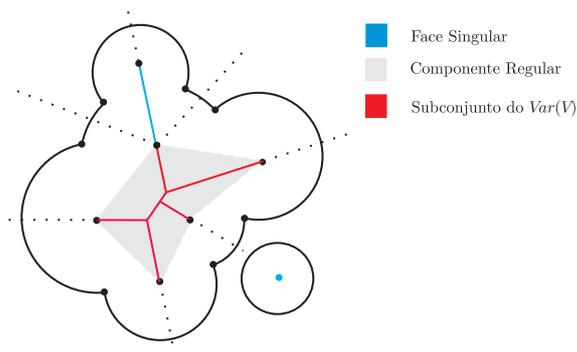


Figura 3.6: Faces singulares, componentes regulares e arestas do $Vor(\mathcal{V})$.

3.3

Crossing Edges e Arestas do Alpha Forma

Pelos Teoremas 3.2 e 3.3 é sabido que parte do eixo medial consiste do subconjunto do diagrama de Voronoi que está contido na componente regular \mathcal{C} . Essa seção, mostra que só existem dois modos nos quais os simplexes do $\partial\mathcal{C}$ interagem com $Vor(\mathcal{V})$. Essa diferenciação evitará instabilidade numérica na construção do eixo medial.

Lema 3.11 ((13), Lema 9) *O interior de qualquer $(d - 1)$ -simplexo $\sigma \in \partial\mathcal{C}$ de vértice dual v está no interior das células de Voronoi.*

Lema 3.12 ((13), Lema 10) *Cada k -simplexo $\sigma_T \in \partial\mathcal{C}$ para $k < (d - 1)$ é parte da face do $Vor(\mathcal{V})$ de dimensão $\leq (d - 1)$.*

Teorema 3.13 ((13), Teo 11) *Seja σ um $(d - 1)$ -simplexo no bordo de $\partial\mathcal{C}$ e seja $v \in \mathcal{V}$ seu vértice dual. A face σ divide a célula de Voronoi $Vor(v)$ de v em duas partes, uma dentro e outra fora de \mathcal{C} . Vide Figura 3.7.*

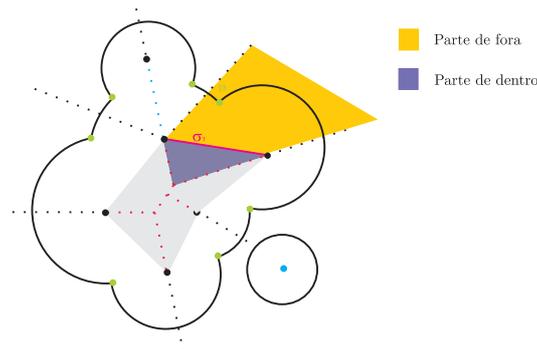


Figura 3.7: Simplexo σ particiona a célula de Voronoi de v .

O próximo Lema implicará que a interseção das arestas do $Vor(\mathcal{V})$ com $\partial\mathcal{C}$ recaem em duas categorias.

Lema 3.14 ((13), Lema 12) *Seja e uma aresta do $Vor(\mathcal{V})$ que intersecta $\partial\mathcal{C}$, e seja σ uma face do $\partial\mathcal{C}$ de menor dimensão que contém a interseção de e e $\partial\mathcal{C}$. Então*

- (i) σ é um vértice de \mathcal{C} , ou
- (ii) σ é idêntico a e .

Quando e intersecta $\partial\mathcal{C}$ em um vértice chamamos e de **aresta cortante** (item i) e quando e é a própria aresta do $\partial\mathcal{C}$ chamamos e de **aresta do 0-shape** (item ii).

A Figura 3.8 dá um exemplo de união de bolas induzindo uma aresta do 0-shape: a aresta longa que une os centros das duas bolas maiores no 0-shape é também aresta do $Vor(\mathcal{V})$, equidistante dos quatro vértices na interseção das duas maiores bolas.

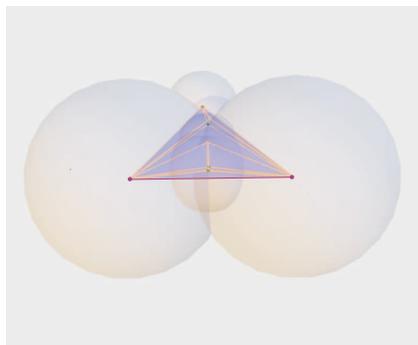


Figura 3.8: Arestas do 0-shape.

Os próximos dois Lemas mostram como as *crossing edge* e arestas do 0-shape, respectivamente, podem ser identificadas, examinando o conjunto de bolas que induzem características do $Vor(\mathcal{V})$ e de \mathcal{C} .

Lema 3.15 ((13), Lema 13) *Seja e_v uma aresta do $Vor(\mathcal{V})$ induzida pelo conjunto $V \subseteq \mathcal{V}$. Seja σ um vértice de $\partial\mathcal{C}$, que é centro da bola de entrada b . A aresta e_v passa por σ se, e somente se, todos os vértices em V estão no bordo de b .*

Lema 3.16 ((13), Lema 14) *Seja e_v uma aresta do $Vor(\mathcal{V})$ induzida pelo conjunto $V \subseteq \mathcal{V}$. Seja σ uma aresta no $\partial\mathcal{C}$, que conecta os centros das bolas b_1, b_2 . A aresta e_v é idêntica à σ se, e somente se, os vértices em V estão na interseção de $b_1 \cap b_2$.*

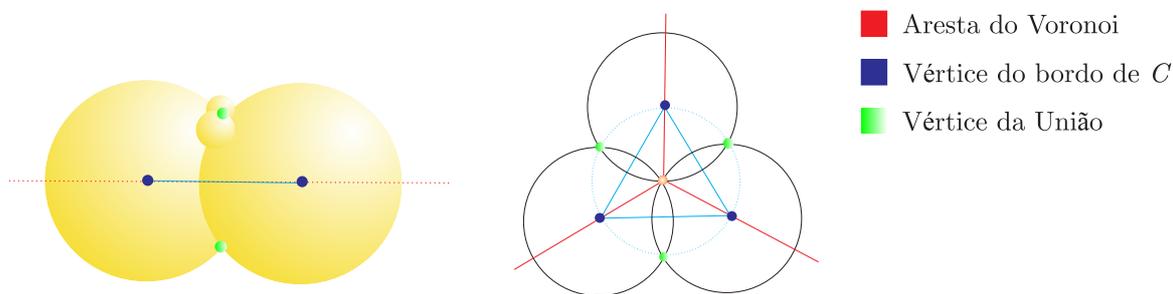


Figura 3.9: Aresta do 0-shape e *crossing edge*.

Observe que, em duas dimensões, não teremos aresta de Voronoi como Voronoi como aresta do $\partial\mathcal{C}$.

Usando os lemas 3.15 e 3.16 identificamos as *crossing edges* e as arestas do 0-shape. Para cada aresta e_v no $Vor(\mathcal{V})$, calcularemos a interseção do conjunto de famílias:

$$\mathcal{B} = \bigcap \{T \mid v_T \in e_v\}$$

Se \mathcal{B} consiste de uma única bola b , e_v é uma *crossing edge*. Se \mathcal{B} contém um par de b_1, b_2 , e_v é uma aresta do 0-shape.