

Betina Vath

**União de bolas, eixo medial e deformações no
espaço tridimensional**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Thomas Lewiner

Rio de Janeiro
agosto de 2007



Betina Vath

União de bolas, eixo medial e deformações no espaço tridimensional

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Thomas Lewiner

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Marcos Craizer

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Luiz Henrique de Figueiredo

Laboratório Visgraf — IMPA

Prof. Geovan Tavares

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Sandra Mara Cardoso Malta

Coordenação de Matemática Aplicada — LNCC

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de agosto de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Betina Vath

Graduou-se em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (2001–2005).

Ficha Catalográfica

Vath, Betina

União de bolas, eixo medial e deformações no espaço tridimensional / Betina Vath; orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 57 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. União de bolas; Eixo medial; Discretização de formas; Deformação. I. Lewiner, Thomas. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

À minha família e ao meu namorado pelo apoio e carinho.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Thomas Lewiner por toda a dedicação na produção desse trabalho e por sua prontidão em sanar minhas dúvidas.

Ao meu namorado Alex que acompanhou todo o meu trabalho de perto e contribuiu muito para o desenvolvimento do mesmo. Agradeço por seu imensurável apoio e incentivo.

Aos meus amigos, por dividirem comigo as alegrias e as tristezas.

Agradeço aos meus pais Arno e Sandra pela paciência e o amor que me dedicam.

À todos os funcionários e professores do departamento de matemática pela ajuda prestada.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Vath, Betina; Lewiner, Thomas. **União de bolas, eixo medial e deformações no espaço tridimensional**. Rio de Janeiro, 2007. 57p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O eixo medial é uma descrição compacta de um objeto que preserva sua topologia e induz naturalmente uma discretização da sua forma como união de bolas. O estudo de união de bolas possui aplicações em diversas áreas da Matemática, em particular na Geometria Computacional onde se usa, por exemplo, para reconstrução de curvas e superfícies. Este trabalho pretende utilizar união de bolas para simular deformações a partir do eixo medial, apresentando conceitos e teoremas a fim de construir algoritmos para a extração do eixo medial em \mathbb{R}^3 . A deformação será, então, definida por movimentos locais das bolas ao longo das direções do eixo medial. Este trabalho contém resultados com movimentos simples, em um programa que utiliza a biblioteca CGAL.

Palavras-chave

União de bolas; Eixo medial; Discretização de formas; Deformação.

Abstract

Vath, Betina; Lewiner, Thomas. **Union of balls, medial axis and deformations in three-dimensional space**. Rio de Janeiro, 2007. 57p. M.Sc. Thesis — Departament of Mathematics, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The medial axis is a compact description of an object that preserves its topology and naturally induces a discretisation of its forma in terms of union of balls. The study of union of balls has applications in various areas of Mathematics, in particular in Computational Geometry where it is used for curve and surface reconstruction. This work pretends to use union of balls in order to simulate deformations described on the medial axis. It introduces concepts and theorems in order to setup algorithms for medial axis extraction in \mathbb{R}^3 . The deformation will thus be defined by local ball moves along the medial axis directions. This work contains results with simple movements, in a program that uses the CGAL library.

Keywords

Union of balls; Medial axis; Forma discretisation; Deformation.

Sumário

1	Introdução	12
2	Conceitos Preliminares	14
2.1	Estruturas Fundamentais	14
2.2	União de Bolas	15
2.3	Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi	16
2.3.1	Diagrama de Voronoi	17
2.3.2	Triangulação de Delaunay	17
2.4	Triangulação Regular e Diagrama de Potência	18
2.4.1	Diagrama de Potência	18
2.4.2	Triangulação Regular	19
2.5	Alpha-Shape	20
2.5.1	Alpha-Shape de Pontos sem Peso	20
2.5.2	Alpha-Shape de Pontos com Peso	22
2.5.3	0-Shape	23
3	Eixo Medial	25
3.1	Eixo Medial de uma União de Bolas	25
3.2	Caracterização Combinatorial	26
3.3	<i>Crossing Edges</i> e Arestas do Alpha Forma	30
4	Implementação	33
4.1	Biblioteca CGAL	33
4.1.1	Descrição da Biblioteca CGAL	34
4.2	Implementação do Eixo Medial	35
4.2.1	Classe	36
4.2.2	Implementação do Alpha-Shape	36
4.2.3	Rotina para encontrar os vértices \mathcal{V} da união \mathcal{U}	36
4.2.4	Rotina do diagrama de Voronoi	37
4.2.5	Interseção do diagrama de Voronoi	37
5	Movimentos baseados no Eixo Medial	38
5.1	Motivação	38
5.2	Grafo de suporte	39
5.3	Bases do movimento	39
5.4	Movimento simples	40
5.5	Condição de amostragem	40
6	Resultados	41
6.1	Exemplo 1	41
6.1.1	Movimento de contração	41
6.1.2	Movimento de dilatação	41
6.2	Exemplo 2	43
6.2.1	Movimento de contração	43

6.2.2	Movimento de dilatação	43
6.3	Exemplo 3	45
6.3.1	Movimento de contração	45
6.3.2	Movimento de dilatação	45
6.4	Exemplo 4	47
6.4.1	Movimento de contração	47
6.4.2	Movimento de dilatação	47
6.5	Exemplo 5	49
6.5.1	Movimento de contração	49
6.5.2	Movimento de dilatação	49
6.6	Limitação do movimento	51
6.7	Movimentos com estruturas separadas	52
6.7.1	Movimento de contração	52
6.7.2	Movimento de dilatação	52
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	54
	Referências Bibliográficas	55
A	Apêndice	57

Lista de figuras

2.1	2-Esfera (corpo oco)/ 3-Bola (corpo maciço).	14
2.2	Exemplos de simplexos.	15
2.3	Conjunto de bolas \mathcal{B} e união \mathcal{U} em \mathbb{R}^2 .	15
2.4	Escrita Não Mínima Escrita Mínima.	16
2.5	Vértices do bordo da união \mathcal{U} .	16
2.6	Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi.	18
2.7	Potência de p em relação a x .	19
2.8	Triangulação Regular e Diagrama de Potência.	20
2.9	α -shapes para diferentes valores de α em \mathbb{R}^2 .	20
2.10	Triangulação de Delaunay e α -shape.	21
2.11	Aresta α -exposto/ Simplexo não α -exposto.	21
2.12	$DT(S)/ \partial S/ C_\alpha$.	22
2.13	Faces Singulares e Componentes Regulares de \mathcal{S} .	23
2.14	0-shape.	24
3.1	Bolas e o Eixo Medial em \mathbb{R}^2 .	25
3.2	Eixo Medial de uma união de bolas.	26
3.3	$\mathcal{U} - \mathcal{S}$.	27
3.4	Simplexos em \mathcal{S} e duais no $\partial\mathcal{U}$.	27
3.5	Pontos na componente regular \mathcal{C} de \mathcal{S} e respectivos pontos mais próximos em \mathcal{U} .	29
3.6	Faces singulares, componentes regulares e arestas do $Vor(\mathcal{V})$.	29
3.7	Simplexo σ particiona a célula de Voronoi de v .	30
3.8	Arestas do 0-shape.	31
3.9	Aresta do 0-shape e <i>crossing edge</i> .	31
4.1	Estrutura do CGAL.	35
6.1	Primeiro exemplo: eixo medial desenhado em lilás.	41
6.2	Primeiro exemplo: Movimento de contração nos dois primeiros e sexto passo da iteração.	42
6.3	Primeiro exemplo: Movimento de dilatação nos três primeiros passos da iteração.	42
6.4	Segundo exemplo: Boneco e seu eixo medial.	43
6.5	Segundo exemplo: Movimento de contração nas duas primeiras e quinta iteração.	43
6.6	Segundo exemplo: Movimento de contração depois de 13 iterações.	44
6.7	Segundo exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações.	44
6.8	Terceiro exemplo: eixo medial desenhado em preto.	45
6.9	Terceiro exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações.	45
6.10	Terceiro exemplo: Movimento de contração quarta, quinta e nona iteração.	46

6.11	Terceiro exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações.	46
6.12	Terceiro exemplo: Quarta, quinta e sexta iteração. Tendência para a formação de uma única bola.	46
6.13	Quarto exemplo: Futeboleno.	47
6.14	Quarto exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações.	47
6.15	Quarto exemplo: Movimento de contração na quinta, sexta e décima iteração.	48
6.16	Quarto exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações	48
6.17	Quinto exemplo: Molécula e eixo medial.	49
6.18	Quinto exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações.	49
6.19	Quinto exemplo: Movimento de contração na quarta, quinta e sétima iteração.	50
6.20	Quinto exemplo: Movimento de dilatação na segunda, terceira e quarta iteração.	50
6.21	Limitação: Movimento na quinta, décima e décima quinta iteração para $d = 1.01$.	51
6.22	Exemplo de estruturas não conectadas e eixo medial.	52
6.23	Contração: Movimento na primeira, segunda e sexta iteração com três estruturas para $d = 0.8$.	52
6.24	Dilatação: Movimento na primeira, segunda e terceira iteração para $d = 1.2$.	53
6.25	Dilatação: Movimento na quarta, quinta e sexta iteração para $d = 1.2$.	53
6.26	Dilatação: Movimento na sétima e oitava iteração para $d = 1.2$.	53