

4 Método Numérico

Para a solução numérica das equações de conservação do *Modelo de Deslizamento*, o método dos volumes finitos (Patankar, 1980) foi escolhido. Na abordagem apresentada aqui, a Equação de Conservação de Quantidade de Movimento da Mistura é discretizada utilizando uma malha deslocada (*staggered grid*), isto é, as velocidades são armazenadas numa posição deslocada em relação aos nós onde as grandezas escalares (frações volumétricas, massas específicas e pressão) são armazenadas. Os símbolos maiúsculos P , W e E referem-se aos pontos nodais principais e seus vizinhos oeste (*west*) e leste (*east*), respectivamente, e correspondem aos centros dos volumes de controle escalares e as faces dos volumes de controle vetoriais (Fig. 4.1). Já os símbolos minúsculos w , ww e e , referem-se às faces dos volumes de controle escalares e seus vizinhos dos lados oeste e leste, respectivamente, sendo os centros dos volumes de controle vetoriais (Fig. 4.2). A malha foi considerada uniforme, com espaçamento definido por Δx . Nas fronteiras, as grandezas vetoriais (velocidades específicas das fases) ficam restritas a meio volume de controle.

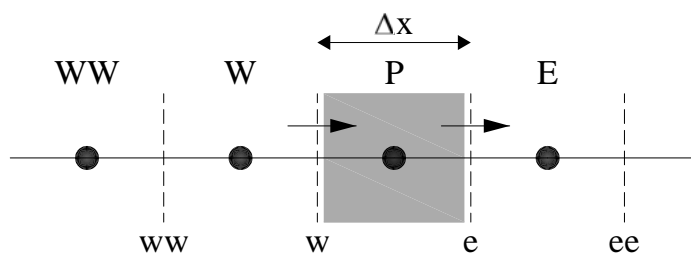


Figura 4.1 – Volumes de controle de grandeza escalar

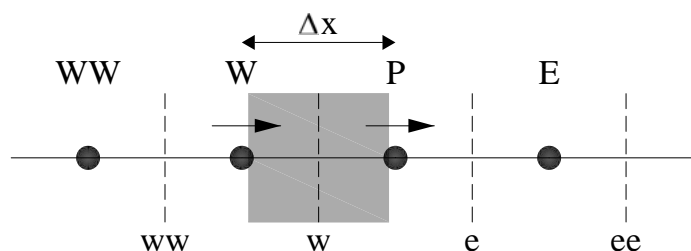


Figura 4.2 – Volumes de controle de grandeza vetorial

Na solução do sistema de equações descrito no Item 3.5.2, as variáveis dependentes $\rho_l \alpha_l$, $\rho_g \alpha_g$ e $\rho_l \alpha_l u_l + \rho_g \alpha_g u_g$ serão referenciadas daqui para frente respectivamente como w_1 , w_2 e w_3 conforme apresentado abaixo:

$$w_1 = \rho_l \alpha_l \quad (4.1)$$

$$w_2 = \rho_g \alpha_g \quad (4.2)$$

$$w_3 = \rho_l \alpha_l u_l + \rho_g \alpha_g u_g \quad (4.3)$$

Desta forma, as Eqs. (3.31) a (3.33) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(w_1 u_l) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(w_2 u_g) = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(w_1 u_l^2 + w_2 u_g^2) = -\frac{\partial P}{\partial x} - F_w - (w_1 + w_2) g \sin \theta \quad (4.6)$$

4.1 Cálculo da Pressão

A pressão é calculada em função de w_1 e w_2 da seguinte forma: primeiramente, isola-se α_l da Eq. (4.1) e α_g da Eq. (4.2):

$$\alpha_l = \frac{w_1}{\rho_l} \quad ; \quad \alpha_g = \frac{w_2}{\rho_g} \quad (4.7)$$

A seguir, ambas as expressões são substituídas na Eq. (3.2):

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \Rightarrow \frac{w_2}{\rho_g} + \frac{w_1}{\rho_l} = 1 \quad (4.8)$$

Substituindo as equações de estado para ρ_g e ρ_l , Eqs. (3.25) e (3.26), na Eq. (4.8) e colocando a pressão em evidência, obtém-se uma equação algébrica de segundo grau para a pressão, do tipo

$$a P^2 + b P + c = 0, \quad (4.9)$$

onde

$$a = \frac{1}{a_l^2}; \quad b = \rho_{l,0} - \frac{P_{l,0}}{a_l^2} - w_1 - \frac{w_2 a_g^2}{a_l^2}; \quad (4.10)$$

$$c = -w_2 a_g^2 \left(\rho_{l,0} - \frac{P_{l,0}}{a_l^2} \right) \quad (4.11)$$

A pressão pode então ser facilmente determinada extraindo a raiz positiva da Eq. (4.9), utilizando a fórmula de Báskara:

$$P = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4.12)$$

4.2 Cálculo da Velocidade do Líquido

A velocidade do líquido é calculada substituindo-se a equação que relaciona a velocidade do gás com a velocidade do líquido, devido ao escorregamento entre as fases (Eq. 3.20) na equação que define w_3 (Eq. 4.3) e isolando u_l :

$$u_l = \left[w_3 - \frac{\rho_g \alpha_g V_{gj}}{1 - C_o \alpha_g} \right] / \left[\rho_l \alpha_l + \frac{\rho_g \alpha_g C_o \alpha_l}{1 - C_o \alpha_g} \right] \quad (4.13)$$

4.3 Cálculo da Velocidade do Gás

A velocidade do gás é calculada a partir da equação que define w_3 (Eq. 4.6):

$$u_g = \frac{w_3 - \rho_l \alpha_l u_l}{\rho_g \alpha_g} \quad (4.14)$$

Para evitar que o termo $\rho_g \alpha_g$ presente no denominador não cause problemas relativos à divisão por zero, tomou-se o cuidado para que α_g nunca assumo o valor

zero. Quando for necessário que o sistema represente um escoamento sem a presença da fase gasosa, α_g irá assumir o valor 10^{-6} .

4.4

Discretização das Equações de Conservação de Massa

As equações de conservação de massa das fases são muito semelhantes, e o mesmo procedimento é empregado na discretização das duas. A equação de conservação de massa da fase líquida será utilizada para ilustrar o procedimento.

De acordo com o método de volumes finitos, a Eq. (4.4) é integrada no volume de controle escalar ($dV = A\Delta x$) ilustrado na Fig. 4.1, e ao longo do intervalo de tempo Δt , alterando-se a ordem da integração de acordo com a conveniência, como ilustrado a seguir:

$$A \int_w^{e} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial w_1}{\partial t} dt dx + A \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial (w_1 u_l)}{\partial x} dx dt = 0 \quad (4.15)$$

logo

$$A \int_w^e \left[(w_1)_P - (w_1)_P^o \right] dx + A \int_t^{t+\Delta t} \left[(w_1 u_l)_e A - (w_1 u_l)_w A \right] dt = 0 \quad (4.16)$$

onde o termo $(w_1)_P^o$ se refere ao instante de tempo anterior.

Na integração espacial do primeiro termo, consideram-se os valores armazenados no ponto nodal como constantes no volume de controle. Já para integração temporal do segundo termo, utiliza-se um esquema totalmente implícito, i.e., as variáveis do instante de tempo $t+\Delta t$ prevalecem durante todo o intervalo de tempo Δt . Após dividir toda a equação por Δt , a equação discretizada assume a forma:

$$\frac{(w_1)_P - (w_1)_P^o}{\Delta t} A \Delta x + (w_1 u_l)_e A - (w_1 u_l)_w A = 0 \quad (4.17)$$

Um esquema *upwind* de interpolação (Patankar, 1980) é utilizado para avaliar o valor de w_1 nas faces do volume de controle, da seguinte forma

$$(w_1 u_l)_e A = (w_1)_P A \|u_{l,e}, 0\| - (w_1)_E A \| - u_{l,e}, 0 \| \quad (4.18)$$

$$(w_1 u_l)_w A = (w_1)_W A \|u_{l,w}, 0\| - (w_1)_P A \| - u_{l,w}, 0 \| \quad (4.19)$$

Nas Equações (4.18) e (4.19), o símbolo $\|a, b\|$ denota o máximo valor entre a e b . Assim, o sistema de equações algébricas resultante para w_1 possui a seguinte forma:

$$a_P (w_1)_P = a_E (w_1)_E + a_W (w_1)_W + b \quad (4.20)$$

Os coeficientes a_P , a_E , a_W e b são os seguintes:

$$a_E = A \| - u_{l,e}, 0 \| \quad ; \quad a_W = A \| u_{l,w}, 0 \| \quad ; \quad a_P^o = \frac{A \Delta x}{\Delta t} \quad (4.21)$$

$$b = a_P^o (w_1)_P^o \quad ; \quad a_P = a_P^o + A \| u_{l,e}, 0 \| + A \| - u_{l,w}, 0 \| \quad (4.22)$$

Nota-se, nas equações acima, que todos os coeficientes são sempre positivos, o que garante que o produto da massa específica com a fração volumétrica de líquido seja sempre maior ou igual a zero, conforme desejado.

A equação discretizada de w_2 (equação de conservação para o gás) pode ser obtida de forma análoga. A equação discretizada e os coeficientes são

$$a_P (w_2)_P = a_E (w_2)_E + a_W (w_2)_W + b \quad (4.23)$$

$$a_E = A \| - u_{g,e}, 0 \| \quad ; \quad a_W = A \| u_{g,w}, 0 \| \quad ; \quad a_P^o = \frac{A \Delta x}{\Delta t} \quad (4.24)$$

$$b = a_P^o (w_2)_P^o \quad ; \quad a_P = a_P^o + A \| u_{g,e}, 0 \| + A \| - u_{g,w}, 0 \| \quad (4.25)$$

4.4.1

Equação de w_1 e w_2 para a Entrada

Para a fronteira, a Eq. (4.15) é aplicada ao meio volume de controle da fronteira, ilustrado na Fig. 4.3. A face leste é tratada de forma análoga ao volume de controle central. Já a condição de contorno para o fluxo de massa de líquido na

entrada é especificada na fronteira oeste, logo

$$\frac{(w_1)_P - (w_1)_P^o}{\Delta t} A \frac{\Delta x}{2} + (w_1 u_l)_e A - \underbrace{(w_1 u_l)_w A}_{(\rho_l \alpha_l u_l)_w A = \dot{m}_{l_{in}}} = 0 \quad (4.26)$$

onde $\dot{m}_{l_{in}}$ é a vazão mássica da fase líquida na entrada do duto.

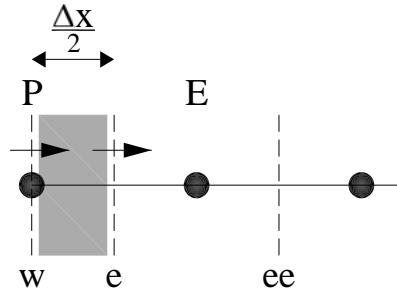


Figura 4.3 – Primeiro volume de controle escalar

Utilizando as mesmas aproximações utilizadas para um volume de controle central, a equação para o líquido na fronteira de entrada é igual a:

$$a_P (w_1)_P = a_E (w_1)_E + b \quad (4.27)$$

onde

$$a_E = A \left\| -u_{l,e}, 0 \right\| \quad ; \quad a_W = 0 \quad ; \quad a_P^o = \frac{A \Delta x / 2}{\Delta t} \quad ; \quad (4.28)$$

$$b = a_P^o (w_1)_P^o + \dot{m}_{l_{in}} \quad ; \quad a_P = a_P^o + A \left\| u_{l,e}, 0 \right\| \quad (4.29)$$

De forma análoga para o gás, a equação discretizada na entrada é:

$$a_P (w_2)_P = a_E (w_2)_E + b \quad (4.30)$$

onde

$$a_E = A \left\| -u_{g,e}, 0 \right\| \quad ; \quad a_W = 0 \quad ; \quad a_P^o = \frac{A \Delta x / 2}{\Delta t} \quad ; \quad (4.31)$$

$$b = a_P^o (w_2)_P^o + \dot{m}_{g_{in}} \quad ; \quad a_P = a_P^o + A \left\| u_{g,e}, 0 \right\| \quad (4.32)$$

4.4.2

Equação de w_1 e w_2 para a Saída

Assim como para a entrada, na saída utiliza-se meio volume de controle, como ilustrado na Fig. 4.4:

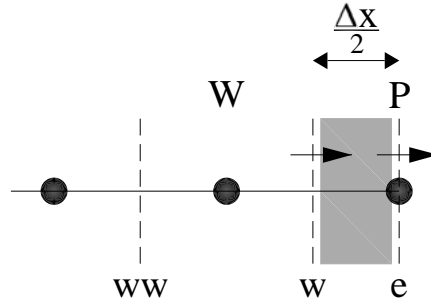


Figura 4.4 – Último volume de controle escalar

A Eq. (4.15) é aplicada ao volume de controle da fronteira e a face oeste é tratada de forma análoga ao volume de controle central. Neste caso a fronteira leste coincide com o ponto nodal principal, P . A equação discretizada resultante é

$$a_P(w_1)_P = a_W(w_1)_W + b \quad (4.33)$$

onde

$$a_W = A \left\| u_{l,w}, 0 \right\| \quad ; \quad a_E = 0 \quad ; \quad a_P^o = \frac{A \Delta x / 2}{\Delta t} \quad (4.34)$$

$$b = a_P^o(w_1)_P^o \quad ; \quad a_P = a_P^o + A \left\| -u_{l,w}, 0 \right\| + u_{l,e} \quad (4.35)$$

De forma análoga para o gás, a equação discretizada na saída é:

$$a_P(w_2)_P = a_W(w_2)_W + b \quad (4.36)$$

onde

$$a_W = A \left\| u_{g,w}, 0 \right\| \quad ; \quad a_E = 0 \quad ; \quad a_P^o = \frac{A \Delta x / 2}{\Delta t} \quad (4.37)$$

$$b = a_P^o(w_2)_P^o \quad ; \quad a_P = a_P^o + A \left\| -u_{g,w}, 0 \right\| + u_{g,e} \quad (4.38)$$

4.5

Discretização da Equação de Conservação da Quantidade de Movimento da Mistura

A obtenção da equação discretizada de conservação de quantidade de movimento da mistura é obtida de forma análoga às equações de conservação de massa. A Eq. (4.6) é integrada ao longo do intervalo de tempo Δt , e no volume de controle vetorial ($dV = A\Delta x$), que é deslocado como ilustrado na Fig. 4.2. Novamente a ordem de integração é alterada dependendo da conveniência, conforme a Eq. (4.39) a seguir:

$$\begin{aligned}
 & A \int_W^P \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial (w_1 u_l + w_2 u_g)}{\partial t} dt dx + \\
 & + A \int_t^{t+\Delta t} \int_W^P \frac{\partial (w_1 u_l^2 + w_2 u_g^2 + P)}{\partial x} dx dt = \\
 & = A \int_t^{t+\Delta t} \int_W^P \left[-\frac{f \rho_m |u_m| u_m}{2D} - g (w_1 + w_2) \sin \theta \right] dx dt
 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Utilizando a integração totalmente implícita no tempo, obtém-se a seguinte equação discretizada:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(w_3)_w - (w_3)_w^o}{\Delta t} A \Delta x + (P_P - P_W) A + \\
 & \left[w_{1,P} u_{l,P}^2 - w_{1,W} u_{l,W}^2 \right] A + \left[w_{2,P} u_{g,P}^2 - w_{2,W} u_{g,W}^2 \right] A = \\
 & = -\frac{f_w \rho_{m,w} |u_m|_w u_{m,w} A \Delta x}{2D} - g (w_{1,w} + w_{2,w}) \sin \theta A \Delta x
 \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde $(w_3)_w^o$ é referente ao instante de tempo anterior. Os termos $w_{1,w}$ e $w_{2,w}$ são avaliados nas faces de acordo com o esquema de interpolação linear da seguinte forma:

$$w_{1,w} = \frac{w_{1,P} + w_{1,W}}{2} ; \quad w_{2,w} = \frac{w_{2,P} + w_{2,W}}{2} \quad (4.41)$$

Uma interpolação linear também é utilizada para avaliar as velocidades das fases nos pontos principais P e W;

$$u_{l,W} = \frac{u_{l,w} + u_{l,ww}}{2} \quad ; \quad u_{g,W} = \frac{u_{g,w} + u_{g,ww}}{2} \quad (4.42)$$

$$u_{l,E} = \frac{u_{l,e} + u_{l,w}}{2} \quad ; \quad u_{g,E} = \frac{u_{g,e} + u_{g,w}}{2} \quad (4.43)$$

A equação discretizada resultante acopla w_3 com w_1 e w_2 da seguinte forma:

$$a_w w_{3,w} = b + c w_{1,P} + d w_{2,P} + e w_{1,W} + f w_{2,W} \quad (4.44)$$

onde os coeficientes são iguais a:

$$a_w = a_w^o \quad ; \quad a_w^o = \frac{A \Delta x}{\Delta t} \quad (4.45)$$

$$b = - \frac{f_w \rho_{m,w} |u_m|_w u_{m,w} A \Delta x}{2 D} + a_w^o w_{3,w}^o + (P_W - P_P) A \quad (4.46)$$

$$c = u_{l,P}^2 A + \frac{g \sin \theta A \Delta x}{2} \quad ; \quad d = u_{g,P}^2 A + \frac{g \sin \theta A \Delta x}{2} \quad (4.47)$$

$$e = u_{l,W}^2 A - \frac{g \sin \theta A \Delta x}{2} \quad ; \quad f = u_{g,W}^2 A - \frac{g \sin \theta A \Delta x}{2} \quad (4.48)$$

4.5.1 Equação de w_3 para a Entrada

Para esta fronteira, w_3 é prescrito em função das vazões mássicas das fases conforme demonstrado abaixo:

$$w_{3in} = (\rho_l \alpha_l u_l)_{in} + (\rho_g \alpha_g u_g)_{in} = \frac{\dot{m}_{lin}}{A} + \frac{\dot{m}_{gin}}{A} \quad (4.49)$$

Desta forma, o sistema de equações algébricas resultantes para w_3 possui a seguinte forma:

$$a_w w_{3,w} = b \quad \text{onde} \quad a_w = 1 \quad ; \quad b = \frac{\dot{m}_{lin}}{A} + \frac{\dot{m}_{gin}}{A} \quad (4.50)$$

4.5.2

Equação de w_3 para a Saída

A variável w_3 é armazenada nas faces. Para N pontos, existem $N+1$ faces, logo w_3 e as velocidades da fronteira estão armazenadas na face $N+1$. A solução da equação de w_3 independe do valor desta variável armazenada na última face do domínio. A variável w_3 só seria necessária para o cálculo das velocidades das fases na fronteira de saída. No entanto, esta grandeza não foi utilizada, optou-se por obter as velocidades das fases a partir de extrapolações para o interior do domínio. As velocidades u_l e u_g do meio volume de controle ilustrado na Fig. 4.4, são extrapoladas para o interior do domínio de acordo com.

$$\frac{u_{l,N+1} - u_{l,N-1}}{3\Delta x/2} = \frac{u_{l,N} - u_{l,N-1}}{\Delta x} \Rightarrow u_{l,N+1} = \frac{(3u_{l,N} - u_{l,N-1})}{2} \quad (4.51)$$

$$\frac{u_{g,N+1} - u_{g,N-1}}{3\Delta x/2} = \frac{u_{g,N} - u_{g,N-1}}{\Delta x} \Rightarrow u_{g,N+1} = \frac{(3u_{g,N} - u_{g,N-1})}{2} \quad (4.52)$$

4.6

Solução do Sistema Algébrico

Uma vez que a aproximação unidimensional foi utilizada, o sistema algébrico resultante da discretização das equações de conservação apresentadas nas seções anteriores não é grande. Dessa forma optou-se pelo Método MTDMA - *MultiTriDiagonal Matrix Algorithm* (Mendes e Phillipi, 2002), que é um método direto de solução das equações algébricas.

O algoritmo MTDMA resolve os três sistemas de equações simultaneamente. As equações discretizadas podem ser representadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_p^{w1} & 0 & 0 \\ 0 & a_p^{w2} & 0 \\ c & d & a_w^{w3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \\ w_{3,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_E^{w1} & 0 & 0 \\ 0 & a_E^{w2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,i+1} \\ w_{2,i+1} \\ w_{3,i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_W^{w1} & 0 & 0 \\ 0 & a_W^{w2} & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,i-1} \\ w_{2,i-1} \\ w_{3,i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^{w1} \\ b^{w2} \\ b^{w3} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

ou

$$\mathbf{A}_i \Phi_i = \mathbf{B}_i \Phi_{i+1} + \mathbf{C}_i \Phi_{i-1} + \mathbf{D}_i \quad (4.54)$$

onde

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} w_{1,i} \\ w_{2,i} \\ w_{3,i} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_p^{w1} & 0 & 0 \\ 0 & a_p^{w2} & 0 \\ c & d & a_w^{w3} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} a_E^{w1} & 0 & 0 \\ 0 & a_E^{w2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} a_W^{w1} & 0 & 0 \\ 0 & a_W^{w2} & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} b^{w1} \\ b^{w2} \\ b^{w3} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Nas equações acima, foi adicionado um sobrescrito aos coeficientes principal a_p , leste a_E e oeste a_W , de forma a indicar a que variáveis estes correspondem.

Cada linha corresponde a um sistema algébrico referente a uma equação do *Modelo de Deslizamento*. A primeira linha corresponde à Equação da Conservação da Massa para o Líquido, Eq. (4.20), a segunda corresponde à Equação da Conservação da Massa para o Gás, Eq. (4.23), e a terceira corresponde à Equação da Conservação da Quantidade de Movimento da Mistura, Eq. (4.44).

Nota-se o acoplamento entre as variáveis w_1 e w_2 na equação para w_3 representado pelos coeficientes “fora das diagonais” c , d , e e f .

Para resolver este sistema, emprega-se o método TDMA, ou algoritmo de Thomas (Patankar, 1980), na forma matricial como mostrado a seguir:

$$\mathbf{A}_i \Phi_i = \mathbf{B}_i \Phi_{i+1} + \mathbf{C}_i \Phi_{i-1} + \mathbf{D}_i \quad (4.57)$$

Supondo que podemos encontrar Φ_i em função de Φ_{i+1} :

$$\Phi_i = \mathbf{P}_i \Phi_{i+1} + \mathbf{Q}_i \quad (4.58)$$

Reescrevendo para o ponto $i-1$, tem-se: $\Phi_{i-1} = \mathbf{P}_{i-1} \Phi_i + \mathbf{Q}_{i-1}$, substituindo em (4.57) e comparando-se com a Eq. (4.58), obtém-se:

$$\mathbf{P}_i = \frac{\mathbf{B}_i}{(\mathbf{A}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{P}_{i-1})} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_i = \frac{(\mathbf{D}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{Q}_{i-1})}{(\mathbf{A}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{P}_{i-1})} \quad (4.59)$$

Uma vez que a matriz \mathbf{C} do primeiro nó, \mathbf{C}_1 , é nula, as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{Q} podem ser inicializadas com

$$\mathbf{P}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mathbf{A}_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{D}_1}{\mathbf{A}_1} \quad (4.60)$$

Finalmente, como a matriz \mathbf{B} do último nó, \mathbf{B}_N , é nula, $\mathbf{P}_N = 0$, logo $\Phi_N = \mathbf{Q}_N$. Dessa forma, os outros valores de Φ_i por ser obtidos por substituição regressiva, utilizando a Eq. (4.58).

4.7

Procedimento de Execução para a Solução Simultânea

A partir das variáveis w_1 , w_2 e w_3 é possível descobrir as variáveis de interesse α_g , α_l , u_g , u_l e P . O fluxograma do procedimento utilizado para a solução das equações de conservação e determinação do campo de velocidades, pressão e frações em massa é apresentado na Fig. 4.5, o qual possui os seguintes passos:

- 1) Definição das condições iniciais do problema: velocidades superficiais do líquido e do gás na entrada e pressão na saída.
- 2) Consideração da solução do passo de tempo anterior como estimativa inicial para a solução do passo de tempo atual
- 3) Cálculo do atrito
- 4) Cálculo dos coeficientes para w_1
- 5) Cálculo dos coeficientes para w_2
- 6) Cálculo dos coeficientes para w_3
- 7) Solução do sistema de equações pelo método MTDMA
- 8) Cálculo da pressão
- 9) Cálculo das massas específicas das fases
- 10) Cálculo das frações das fases

- 11) Cálculo da velocidade de *Deslizamento*
- 12) Cálculo das velocidades das fases
- 13) Verificação dos resíduos das equações. Caso todos os resíduos estejam abaixo de uma tolerância pré-determinada ou o número máximo de iterações seja atingido deve-se avançar no tempo e voltar ao passo (2), caso contrário deve-se voltar ao passo (3) e repetir a sequência de cálculos até que a convergência seja atingida.

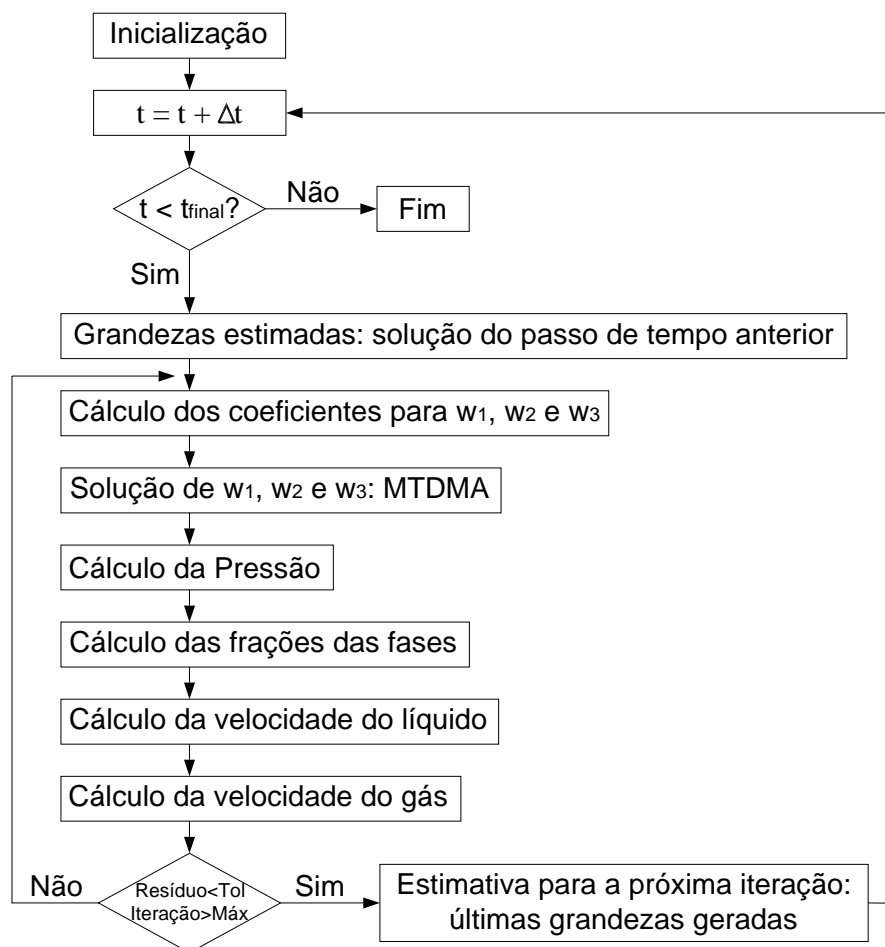


Figura 4.5 – Fluxograma esquemático - MTDMA

4.8 Malha Computacional e Passo de Tempo

A malha computacional foi considerada uniforme com espaçamento Δx . O passo de tempo Δt está intimamente ligado ao espaçamento da malha pela Condição de Courant–Friedrichs–Lewy ou simplesmente Condição CFL (Courant et al, 1967).

A condição CFL estabelece um Δt máximo para um determinado Δx de modo a se garantir a convergência do sistema algébrico utilizados para resolver as equações diferenciais. Se uma onda está atravessando um volume de controle com largura Δx , o passo de tempo deve ser menor que o tempo necessário para que a onda percorra todo o volume. A condição CFL é representada da seguinte forma:

$$CFL = \frac{u_{max} \Delta t}{\Delta x} \quad (4.61)$$

onde u_{max} é a máxima velocidade do domínio. A constante CFL depende dos tipos de equação a serem resolvidos e não de Δx ou Δt e u_{max} representa a maior velocidade de propagação encontrada em um determinado instante.

A condição CFL tem um impacto grande quando o caso a ser estudado necessita de uma malha muito refinada (pequenos volumes de controle), nestes casos o passo de tempo também será muito pequeno e consequentemente o esforço computacional será muito grande. Sabe-se que quanto mais refinada a malha mais precisa fica a solução.

Segundo Toumi I. (1999), ao contrário do escoamento monofásico, no escoamento bifásico a velocidade do som na mistura não é a velocidade do som associada às velocidades de onda encontradas no sistema, mas sim uma velocidade inferior. A maior velocidade de propagação de uma onda seria encontrada quando escoasse somente a fase líquida. Depois de realizar diversos testes, adotou-se a constante CFL igual a 0,5 e uma velocidade constante e igual a do som no líquido. Desta forma, o passo de tempo passou a depender somente do espaçamento da malha e do fluido conforme apresentado abaixo:

$$\Delta t = \frac{0,5}{a_l} \Delta x \quad (4.62)$$

4.9

Critério de Convergência

O processo de discretização gera um sistema de equações algébricas para cada uma das equações do *Modelo de Deslizamento*. Considerou-se a solução convergida quando o maior resíduo encontrado entre todas as equações foi inferior a uma tolerância tol pré-definida. Com a normalização dos resíduos, é possível

considerar uma tolerância para as três variáveis envolvidas. Neste trabalho foi utilizada uma tolerância igual para as três variáveis a serem resolvidas (w_1 , w_2 e w_3), $tol = 10^{-5}$.

O maior resíduo da equação para a conservação da massa da fase líquida e da fase gasosa é definido, respectivamente, como:

$$Res_{max}(w_1) = \frac{\max_{1 \leq i \leq N} \left(a_{Pi}^{w_1} w_{1i} - \left(a_{Wi}^{w_1} w_{1i-1} + a_{Ei}^{w_1} w_{1i+1} + b_i^{w_1} \right) \right)}{a_{Pi}^{w_1} w_{1i}} \quad (4.63)$$

$$Res_{max}(w_2) = \frac{\max_{1 \leq i \leq N} \left(a_{Pi}^{w_2} w_{2i} - \left(a_{Wi}^{w_2} w_{2i-1} + a_{Ei}^{w_2} w_{2i+1} + b_i^{w_2} \right) \right)}{a_{Pi}^{w_2} w_{2i}} \quad (4.64)$$

O maior resíduo da equação de conservação da quantidade de movimento da mistura é definido da seguinte forma:

$$Res_{max}(w_3) = \frac{\max_{1 \leq i \leq N} \left(a_{Wi}^{w_3} w_{3i} - b_i^{w_3} + c w_{1i} + d w_{2i} + e w_{1i+1} + f w_{2i+1} \right)}{a_{Pi}^{w_3} w_{3i}} \quad (4.65)$$

Nas definições acima para os resíduos máximos são calculados utilizando coeficientes atualizados na iteração atual, porém as variáveis w_1 , w_2 e w_3 são as variáveis disponíveis da iteração anterior.

O critério final de convergência é

$$Res_{max} = \max[Res_{max}(w_1), Res_{max}(w_2), Res_{max}(w_3)] \leq tol \quad (4.66)$$