

### 3 Modelagem Matemática

Neste capítulo serão apresentadas as equações de conservação que governam o escoamento bifásico em tubulações baseadas no *Modelo de Deslizamento*.

Uma vez que o interesse do presente estudo está relacionado com escoamento ao longo de tubulações muito compridas, a formulação estudada neste trabalho é unidimensional, ou seja, só serão adotadas equações para o escoamento ao longo do eixo do duto.

Nas formulações unidimensionais, as informações referentes ao comportamento das variáveis ao longo da seção transversal são perdidas ao serem aproximadas por médias. Desta forma, a influência destas informações no escoamento deve ser introduzida de alguma forma nas equações que governam o fenômeno, sendo muitas vezes necessário introduzir correlações empíricas que representem o comportamento real das variáveis.

A média na seção transversal de qualquer grandeza pode ser equacionada da seguinte forma:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{A} \int_A F dA \quad (3.1)$$

O símbolo  $\langle \rangle$  representa a média na área.

#### 3.1 Fração do Gás e do Líquido

A definição das frações das fases varia em função do método de medição empregado para determinar uma proporção entre as fases. Caso o método de medição apure as frações das fases para uma seção transversal do tubo, as frações se relacionarão através da área ocupada por cada fluido (Fig. 3.1). Caso o método de medição apure as frações das fases em um trecho de tubulação fechando as válvulas à montante e a jusante do mesmo e medindo os respectivos volumes das

fases, as frações se relacionarão através do volume ocupado por cada fluido no trecho em questão (Fig. 3.2).

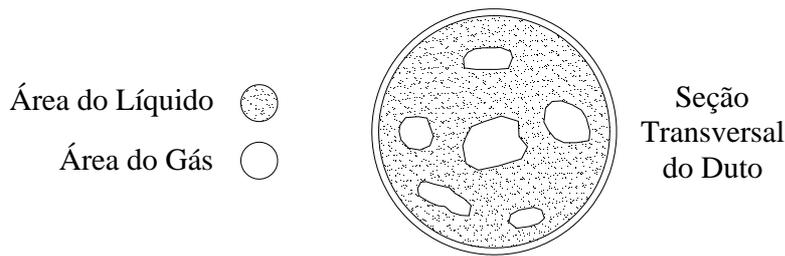


Figura 3.1 – Fração das fases por área ocupada por cada fluido

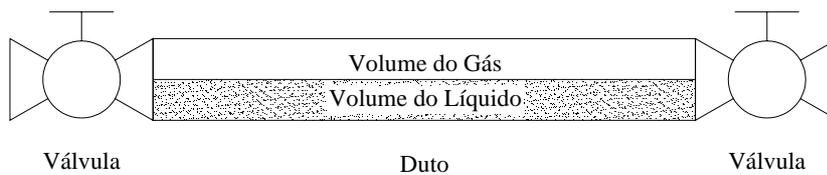


Figura 3.2 – Fração das fases por medição de volume

Na presente modelagem, as frações de gás e líquido representam a proporção que cada fase ocupa em cada volume de controle que o duto for dividido. Apesar da definição das frações das fases poderem ser definidas de diversas formas, a soma das mesmas será sempre a unidade conforme mostrado abaixo:

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \quad (3.2)$$

### 3.2 Equações de Conservação

Para determinar o escoamento bifásico ao longo de tubulações é necessário resolver as equações que governam este tipo de escoamento. A seguir estas equações são apresentadas, considerando o *Modelo de Deslizamento*. Como uma primeira aproximação o escoamento será considerado unidimensional, uma vez que o principal interesse é no escoamento em tubulações muito longas, sendo a variação na seção transversal menos crítica que ao longo do duto.

Geralmente, a troca de massa entre as fases ocorre devido a fenômenos ligados à cavitação ou ebulição, quando a fase líquida atinge a pressão de vapor e parte da massa de líquido é convertida em vapor. Neste trabalho não serão consideradas as trocas de massa entre as fases e o escoamento será considerado como isotérmico.

As equações de conservação para o escoamento bifásico tiveram como base, as seguintes hipóteses:

- 1) Escoamento unidimensional;
- 2) Escoamento isotérmico;
- 3) Ausência de mudança de fase;
- 4) Viscosidade constante;
- 5) Gás ideal;
- 6) Velocidade do som no líquido constante;
- 7) Escoamento localmente hidrodinamicamente desenvolvido.
- 8) Pressão uniforme na seção transversal, i.e., em cada fase e na interface.

O conjunto de equações de conservação para um escoamento bifásico em sua forma unidimensional, utilizando a média definida na Eq. (3.1), é mostrado a seguir para uma tubulação que pode possuir uma inclinação  $\theta$  em relação à direção horizontal, como mostrado na Fig. 3.3.

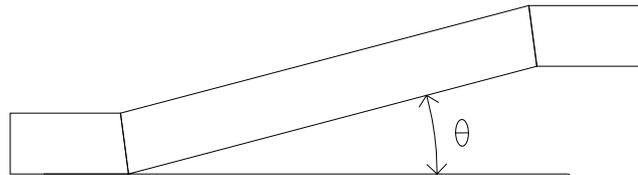


Figura 3.3 – Ângulo de inclinação com a horizontal

*Conservação da massa para o líquido:*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho_l \rangle \langle \alpha_l \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \alpha_l \rangle \langle \rho_l \rangle \langle u_l \rangle) = 0 \tag{3.3}$$

*Conservação da massa para o gás:*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho_g \rangle \langle \alpha_g \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \alpha_g \rangle \langle \rho_g \rangle \langle u_g \rangle) = 0 \tag{3.4}$$

*Conservação da quantidade de movimento para o líquido*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\langle \alpha_l \rangle \langle \rho_l \rangle \langle u_l \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \alpha_l \rangle \langle \rho_l \rangle \langle u_l \rangle^2) = \\ & = - \langle \alpha_l \rangle \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} - F_{w,l} + F_i - \langle \alpha_l \rangle \langle \rho_l \rangle g \text{ sen } \theta \end{aligned} \tag{3.5}$$

*Conservação da quantidade de movimento para o gás*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \alpha_g \rangle \langle \rho_g \rangle \langle u_g \rangle) + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \alpha_g \rangle \langle \rho_g \rangle \langle u_g \rangle^2) = \\ = - \langle \alpha_g \rangle \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} - F_{w,g} - F_i - \langle \alpha_g \rangle \langle \rho_g \rangle g \text{ sen } \theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde os subscritos  $l$  e  $g$  representam as fases líquida e gasosa, respectivamente.  $x$  e  $t$  são as coordenadas espacial e temporal;  $\rho$ ,  $u$  e  $\alpha$  são a massa específica, velocidade e frações volumétricas (ou “hold-up”) de cada fase.  $P$  é a pressão na seção transversal.  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\theta$  é a inclinação da tubulação com a horizontal.  $F_{w,g}$  e  $F_{w,l}$  representam as forças viscosas por unidade de volume entre gás/parede e entre líquido/parede, respectivamente, e  $F_i$  é a força por unidade de volume que atua na interface entre as duas fases.

Para simplificar a apresentação, o símbolo  $\langle \rangle$  será omitido ao longo deste trabalho.

As equações (3.3) à (3.6) representam as equações do *Modelo de Dois Fluidos*. Para fechar este modelo é necessário introduzir correlações para as forças viscosas entre fases e entre fases/paredes.

Como mencionado, o *Modelo de Deslizamento* é um caso particular do *Modelo de Fluidos*, onde as equações para as fases são combinadas de forma a fornecer equações de conservação de massa e quantidade de movimento para a mistura, isto é, para determinar a velocidade de mistura  $\overline{u_m}$  e pressão  $P$ . A fração volumétrica do gás  $\alpha_g$  pode ser obtida da equação de conservação de massa da fase gasosa.

Definindo-se a massa específica da mistura  $\rho_m$  como

$$\rho_m = \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l, \quad (3.7)$$

e a velocidade de mistura  $\overline{u_m}$  como

$$\overline{u_m} = \frac{\alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l}{\rho_m}, \quad (3.8)$$

a equação da continuidade para a mistura pode ser obtida com combinando-se as equações de conservação da massa para a fase líquida e gasosa, Eqs. (3.3) e (3.4):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l) = 0 \quad (3.9)$$

ou

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m \overline{u_m})}{\partial x} = 0 \quad (3.10)$$

A conservação de quantidade de movimento da mistura pode ser obtida de forma análoga, somando-se as Eqs. (3.5) e (3.6) correspondentes a cada fase.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l \rho_l u_l^2) = \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} - F_w - \rho_m g \text{ sen } \theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_m \overline{u_m})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m \overline{u_m^2})}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - F_w - \rho_m g \text{ sen } \theta + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_m \overline{u_m^2} - (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l \rho_l u_l^2) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que nas equações acima, a força que atua na interface desaparece naturalmente, e  $F_w$  representa a força viscosa por unidade de volume entre a mistura e a parede. A relação entre as velocidades de cada fase da Eq. (3.11), assim como o último termo da Eq. (3.12) dependem do escorregamento entre as fases. Para fechar este modelo é necessário introduzir correlações para a força viscosa entre mistura/parede e para o escorregamento entre as fases.

A conservação de massa da fase gasosa na ausência da transferência de massa entre as fases é:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \quad (3.13)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g \overline{u_m}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha_g \rho_g (\overline{u_m} - u_g) \right] \quad (3.14)$$

Uma das vantagens do *Modelo de Deslizamento* em relação ao *Modelo de*

*Dois Fluidos* consiste na redução do número de equações a resolver. Outra vantagem é a redução do número de correções para avaliar o atrito com a parede, pois em vez de ser necessário estimar esta grandeza para cada fase, basta estimar o atrito da mistura com a parede. No entanto, apesar da eliminação da força desconhecida na interface  $F_i$  do *Modelo de Dois Fluidos*, o *Modelo de Deslizamento* necessita de uma correlação para avaliar a relação entre as velocidades de cada fase, i.e., a velocidade de escorregamento.

### 3.3 Equações de Fechamento

Como mencionado, as equações de conservação apresentadas não se encontram completas em si. Desta forma, há a necessidade de se complementar as equações com algumas relações empíricas para avaliar o atrito e relação entre as velocidades das fases.

#### 3.3.1 Velocidade de Escorregamento entre as Fases

Esta velocidade é descrita por uma correlação que representa o escorregamento entre as fases. Esta correlação é obtida empiricamente e varia com o regime de escoamento, com as características dos fluidos e com a inclinação do duto.

A formulação que representa a velocidade de escorregamento entre as fases descreve a interação entre o *Parâmetro de Distribuição* ( $C_o$ ) e a velocidade de *Drift* ( $V_{gj}$ ).

Antes de definir a relação entre as velocidades das fases, é conveniente introduzir algumas definições:

- i) *Velocidade superficial de cada fase*: são as velocidades que seriam obtidas se somente uma fase escoasse no duto

$$Us_g = \frac{Q_g}{A} = \alpha_g u_g \quad ; \quad Us_l = \frac{Q_l}{A} = \alpha_l u_l \quad (3.15)$$

- ii) *Fluxo volumétrico total*: é a velocidade composta pela soma das velocidades superficiais  $Us$  de ambas as fases:

$$j = Us_g + Us_l \tag{3.16}$$

ou

$$j = \alpha_g u_g + \alpha_l u_l \tag{3.17}$$

iii) *Velocidade de Drift modificada*  $\overline{V_{gj}}$

$$\overline{V_{gj}} = V_{gj} + (C_o - 1)j \tag{3.18}$$

De acordo com Zuber e Findlay (1965) a velocidade da fase gás está relacionada com o *Fluxo volumétrico total* da seguinte forma:

$$u_g = C_o j + V_{gj} \tag{3.19}$$

Combinando a Eq. (3.17) e (3.18), a velocidade da fase líquida pode ser escrita em função do *Fluxo volumétrico total* como

$$u_l = \frac{j - \alpha_g (C_o j + V_{gj})}{\alpha_l} \tag{3.20}$$

Por outro lado, combinando as mesmas equações, a velocidade da fase gás pode ser escrita em função da velocidade da fase líquida:

$$u_g = \frac{C_o \alpha_l u_l + V_{gj}}{1 - C_o \alpha_g} \tag{3.21}$$

Também é possível escrever as velocidades das fases em função da velocidade de mistura  $\overline{u_m}$ , ao combinarmos as Eqs. (3.8), (3.16) e (3.18), como

$$u_g = \overline{u_m} + \frac{\rho_l}{\rho_m} \overline{V_{gj}} \tag{3.22}$$

$$u_l = \overline{u_m} - \frac{\alpha_g}{1 - \alpha_g} \frac{\rho_g}{\rho_m} \overline{V_{gj}} \tag{3.23}$$

Note que o *Modelo Homogêneo* é um caso particular do *Modelo de*

*Deslizamento*, onde a velocidade de escorregamento é nula, logo,  $C_o = 1,0$  e  $V_{gj} = 0,0$ .

### 3.3.2 Perda de Carga e Atrito

No presente trabalho a força viscosa por unidade de volume entre a mistura e a parede é calculada utilizando-se as Eqs. (2.2) e (2.6), as quais são repetidas aqui

$$F_w = 4 \tau_w \quad ; \quad \tau_w = \left( - \frac{d P}{d x} \right) \frac{D}{4} \quad \text{onde} \quad \left( - \frac{d p}{d x} \right) = \frac{f \rho_m |V_c| V_c}{2 D} \quad (3.24)$$

sendo  $V_c$  a velocidade característica do escoamento. As expressões utilizadas para o fator de atrito variaram dependendo do teste e são indicadas no Capítulo de Resultados.

### 3.4 Propriedades

Para completar a formulação é necessário definir as propriedades termofísicas de cada fase. Como a modelagem é isotérmica, somente é necessário definir a massa específica e viscosidade.

As equações de estado para a fase gás e líquida definem o comportamento da massa específica dos fluidos. Tanto a fase líquida quanto a fase gasosa serão consideradas compressíveis, sendo que o gás será considerado ideal, conforme as relações abaixo:

$$\rho_l = \rho_{l,ref} + \frac{P - P_{l,ref}}{a_l^2} \quad (3.25)$$

$$\rho_g = \frac{P}{a_g^2} \quad ; \quad a_g^2 = RT_{ref} \quad (3.26)$$

onde  $\rho_{l,ref}$  é a massa específica de referência do líquido, avaliada na pressão de referencia  $P_{l,ref}$ .  $a$  é a velocidade do som, sendo definida como  $a^2 = (\partial P / \partial \rho)_T$ ,

i.e., proporcional a variação da pressão com a massa específica em processos isotérmicos. Especificou-se  $a_l$  e  $a_g$  como constantes, sendo  $a_g$  baseada na temperatura de referência  $T_{ref}$ .

Existem diversas equações para o cálculo da viscosidade para escoamentos bifásicos unidimensionais. Segundo Omgba-Essama (2004), para escoamentos onde a fase gasosa se encontra dispersa na fase líquida e até mesmo para o escoamento em regime de golfada, pode-se utilizar uma forma simples de equação para a viscosidade da mistura. Nesta equação, utilizada no modelo Homogêneo (Dukler et al., 1964), e adotada neste trabalho, calcula-se uma média das viscosidades do gás e do líquido ponderadas pela fração de cada fase.

$$\mu_m = \alpha_g \mu_g + \alpha_l \mu_l \tag{3.27}$$

Tendo como premissa o escoamento isotérmico, não será considerada a dependência da viscosidade de cada fluido com a temperatura. Como simplificação, também não será considerada a dependência da viscosidade com a pressão.

### 3.5 Variáveis Dependentes

Para a determinação de um escoamento bifásico, baseado no *Modelo de Deslizamento*, é necessário resolver três equações de conservação. No presente trabalho, duas formulações foram implementadas. Na primeira, as equações foram escritas de acordo com a formulação utilizada por Hibiki e Ishii (2003b), sendo as variáveis dependentes a velocidade da mistura  $\overline{u_m}$ , a pressão  $P$  e fração volumétrica de gás  $\alpha_g$ . Na segunda, utilizou-se a formulação de Evje e Fjelde (2003), no qual as variáveis dependentes são  $\rho_l \alpha_l$ ,  $\rho_g \alpha_g$  e  $\rho_l \alpha_l u_l + \rho_g \alpha_g u_g$ .

#### 3.5.1 $\overline{u_m}, P$ e $\alpha_g$

Na formulação do *Modelo de Deslizamento* utilizada por Hibiki e Ishii (2003b) as variáveis a serem resolvidas são  $\alpha_g$ ,  $\overline{u_m}$  e  $P$ . O conjunto de equações de conservação é composto pela equação de conservação de massa da mistura, Eq. (3.10), equação de conservação de quantidade de movimento linear da mistura,

Eq. (3.12) pela equação de conservação de massa da fase gás, Eq. (3.14), e pelas as fórmulas de velocidade de escorregamento, as quais relacionam as velocidades das fases com a velocidade de mistura. O conjunto de equações a ser resolvido é:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m \overline{u_m})}{\partial x} = 0 \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_m \overline{u_m})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m \overline{u_m^2})}{\partial x} = \\ = - \frac{\partial P}{\partial x} - F_w - \rho_m g \text{sen } \theta - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho_g \alpha_g \rho_l}{(1 - \alpha_g) \rho_m} \overline{V_{gj}^2} \right] \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial (\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g \overline{u_m})}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha_g \rho_g \frac{\rho_l}{\rho_m} \overline{V_{gj}} \right] \tag{3.30}$$

A velocidade característica utilizada para calcular a força devido ao atrito  $F_w$  é a velocidade da mistura  $\overline{u_m}$ .

A solução deste conjunto de equações foi testada com sucesso para escoamentos monofásicos, porém, infelizmente, este procedimento falhou no caso de misturas bifásicas, i.e., não foi possível obter solução convergida em nenhum caso. Acredita-se que para se obter sucesso com este conjunto de equações seria necessário utilizar um procedimento de solução mais robusto, como maior acoplamento entre as equações. Detalhes do método de solução deste sistema de equações encontram-se no Apêndice A. No Capítulo 4 será apresentado o método de solução somente para o conjunto de equações descrito a seguir.

### 3.5.2

$$\rho_l \alpha_l, \rho_g \alpha_g \text{ e } \rho_l \alpha_l u_l + \rho_g \alpha_g u_g$$

Todos os casos testados neste trabalho, cujos resultados se encontram no Capítulo 5, foram obtidos a partir da formulação utilizada por Evje e Fjelde (2003). Neste caso, as três equações utilizadas para modelar o escoamento foram: equação de conservação de massa para o líquido, Eq. (3.3), equação de conservação de massa para a fase gasosa, Eq. (3.13) e a equação de conservação de quantidade de movimento da mistura, Eq. (3.11). Nesta formulação as equações são resolvidas em função das variáveis  $\rho_l \alpha_l, \rho_g \alpha_g$  e  $\rho_l \alpha_l u_l + \rho_g \alpha_g u_g$ .

As equações de conservação são as seguintes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g u_g + \alpha_l \rho_l u_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_l \rho_l u_l^2) = \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} - F_w - \rho_m g \sin \theta \end{aligned} \tag{3.33}$$

A velocidade característica utilizada para calcular a força devido ao atrito  $F_w$  é o fluxo volumétrico total  $j$ .

### 3.6 Condições de Contorno e Iniciais

Como condição inicial dos casos analisados, considerou-se a tubulação cheia de líquido em repouso com pressão uniforme.

Como condição de contorno, a pressão na saída foi sempre mantida constante. Na entrada, foram especificadas as vazões em massa de cada fase.

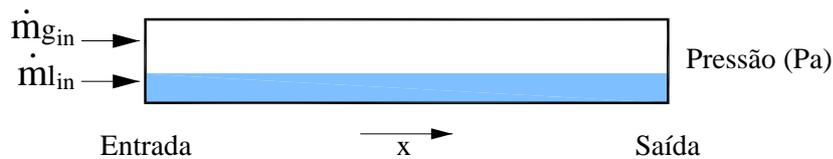


Figura 3.4 – Condições de contorno