

## 4 Torção em Elementos de Concreto Armado

### 4.1. Histórico

As teorias para análise de vigas de materiais elásticos, homogêneos e isotropos solicitadas à torção datam dos séculos XVIII e XIX. O concreto armado como material estrutural teve seu uso difundido no mundo inteiro a partir do fim do século XIX, e as principais teorias para análise de vigas solicitadas à torção produzidas com esse material foram desenvolvidas ao longo do século XX (Figura 4.1).

A base para análise das vigas de concreto armado solicitadas à torção está fundamentada na analogia da treliça, proposta inicialmente por Ritter em 1889 e mais tarde por Mörsch 1902, utilizada para a análise do comportamento de vigas de concreto armado submetidas à força cortante, e na teoria de Bredt para tubos de paredes finas apresentada em 1896.

A analogia da treliça consiste em considerar o comportamento de uma viga fissurada similar ao de uma treliça isostática, com barras diagonais comprimidas com inclinação de  $45^\circ$ , ligando a parte superior comprimida à parte inferior tracionada.

Mörsch em 1904 conduziu nos laboratórios de Stuttgart, Alemanha, os primeiros ensaios à torção em corpos-de-prova de concreto armado cilíndricos, maciços e ocos, para analisar o comportamento deste material quando solicitado à torção. Em 1921, Mörsch, executou mais uma série de ensaios afim de aprofundar os estudos já iniciados.

A idéia de juntar a analogia da treliça com a teoria de Bredt para a análise de vigas à torção deve-se a Ernest Rausch, que em 1929, em sua tese de doutorado, onde se propôs um modelo denominado Analogia da Treliça Espacial, que considera diagonais comprimidas a  $45^\circ$ . A segunda edição desse trabalho foi apresentada em forma de livro, publicado em 1938, e a terceira edição em 1952.

Em 1958, com algumas adaptações, esse modelo foi incorporado à DIN-1045, que foi a primeira norma no mundo a ter prescrições sobre torção em seu

escopo. No ano de 1959 surgiu na antiga União Soviética um modelo para a análise da torção de vigas de concreto armado, de autoria de Lessig, fundamentado em equações de equilíbrio, admitindo-se os modos de ruptura da viga à torção.

A partir da década de 1960 houve um súbito interesse na pesquisa experimental sobre o comportamento das vigas de concreto armado e protendido solicitadas à torção. No ano de 1962, Yudin publicou um trabalho contendo contribuições que generalizavam o modelo de Lessig. Em 1963, Thomas T. C. Hsu publicou os resultados dos ensaios à torção de 53 vigas de concreto armado, que se tornaram referência na literatura. Em 1968 surgiu a publicação do American Concrete Institute intitulada *Torsion of Structural Concrete SP-18*, contendo uma coletânea de resultados de ensaios e de trabalhos teóricos. Os trabalhos dessa publicação adotavam, em geral, o modelo de Lessig.

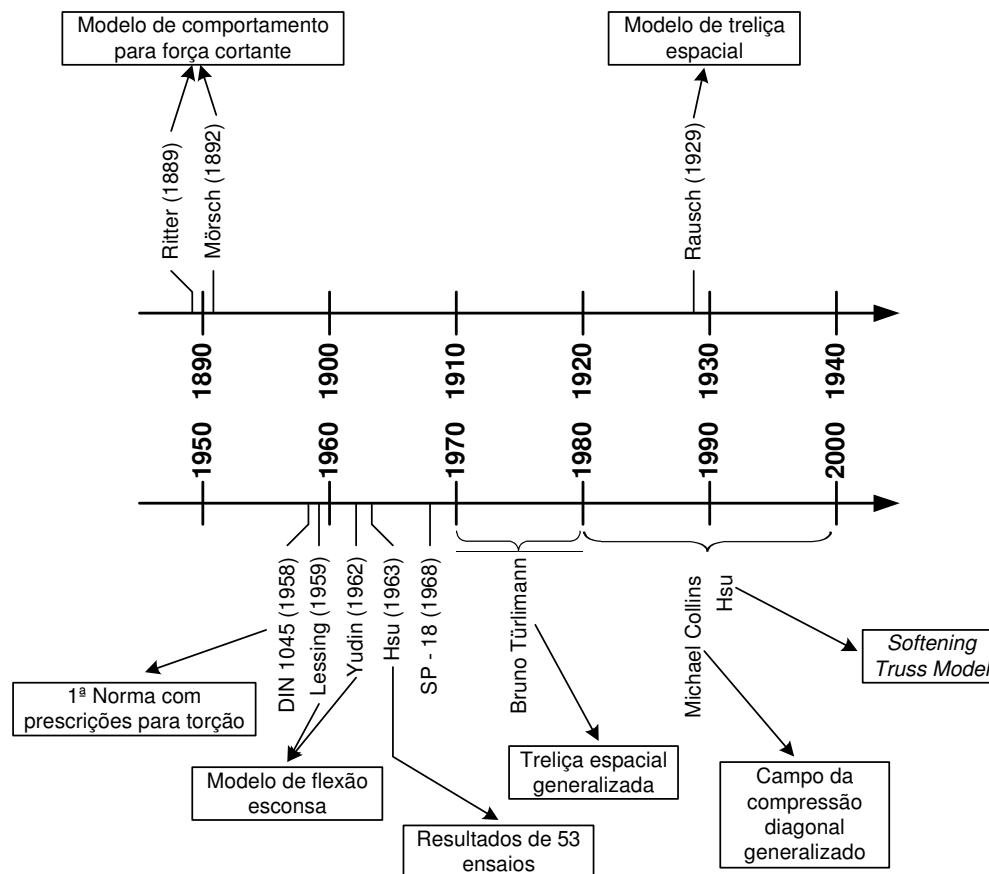


Figura 4.1 – Evolução das teorias para dimensionamento à torção de vigas de concreto armado.

Na Suíça, Alemanha e França, o modelo de treliça de Rausch recebeu diversas contribuições teóricas e experimentais. No ETH-Zürich sob o comando

do professor Bruno Thürlimann foi desenvolvido um amplo programa experimental, cujo objetivo foi generalizar o modelo da treliça espacial. Na Alemanha foram publicados pela *Deutsch Ausschuss für Stahlbeton* os resultados dos ensaios de vigas solicitadas à torção realizados por Fritz Leonhardt em Stuttgart (Leonhardt e Schelling, 1974).

A sistemática atual para dimensionamento de vigas de concreto estrutural solicitadas à torção, adotada por diversas normas internacionais entre elas, Eurocode 2, ACI, CSA *apud* Gabrielsson (1999) e também pela NBR 6118/2003, está fundamentada no modelo da treliça espacial generalizada.

## 4.2.

### Comportamento de Vigas de Concreto Armado Solicitadas à Torção

As vigas de concreto armado solicitadas à torção apresentam três estágios distintos de comportamento em função da magnitude da solicitação (Sánchez, 1989).

#### *1º Estágio – Nível de solicitação baixo:*

- para um torçor de pequena magnitude a fissuração é praticamente inexistente;
- a seção transversal é considerada de forma integral;
- os princípios utilizados para análise de peças de materiais homogêneos, isotrópicos e elástico lineares são aplicados.

#### *2º Estágio – Nível de solicitação médio:*

- existe dificuldade em se determinar quando ocorre o início e o término deste estágio de solicitação;
- mesmo com o aparecimento das primeira fissuras, as teorias elásticas ainda podem ser utilizadas;
- o mecanismo interno resistente da viga é modificado de modo considerável;

#### *3º Estágio – Nível de solicitação alto:*

- há o desenvolvimento da fissuração ao longo da viga;
- os modelos elásticos para análise do mecanismo interno resistente não podem ser aplicados, pois o comportamento da viga torna-se inelástico;
- é necessário a elaboração de modelos mais sofisticados, baseados na Teoria da Plasticidade.

De maneira geral, quando uma viga é solicitada à torção as fissuras ocorrem para baixos valores de sollicitação, dificultando o estabelecimento do início e do término de cada estágio citado anteriormente.

#### **4.3. Analogia da Treliça Espacial**

O modelo proposto por Rausch em 1929 está baseado nas seguintes concepções (Hsu, 1984; Alnuaimi, 1999):

- a treliça espacial é formada por bielas de concreto comprimidas a  $45^\circ$  e por barras de aço longitudinais e transversais conectadas formando nós;
- o elemento diagonal é carregado somente com compressão axial, sendo a resistência ao cisalhamento negligenciada;
- as barras de aço transversais e longitudinais são solicitadas somente à tração, sendo desprezado o efeito de pino;
- para uma seção maciça o núcleo de concreto não contribui para resistência última à torção, o que viabiliza o uso da teoria de Bredt para análise destes elementos.

Este modelo assume que o volume de aço longitudinal é igual ao volume de aço transversal. Os resultados experimentais mostram que o modelo com ângulo da biela igual a  $45^\circ$  é bastante conservador, principalmente em vigas com taxas de armadura reduzidas.

#### **4.4. Treliça Espacial Generalizada**

Lampert e Thürlimann (1971) generalizaram o modelo da treliça espacial para elementos de concreto estrutural sujeitos à torção, ou à combinação da flexão com a torção. Esses autores assumiram que o ângulo de inclinação das bielas pode diferir de  $45^\circ$ . Admitem um comportamento elasto-plástico perfeito e uma curva tensão-deformação específica para a armadura. No modelo com bielas inclinadas de  $45^\circ$  está implícito que as taxas volumétricas das armaduras transversal e longitudinal são iguais.

Equações análogas às deduzidas inicialmente por Lampert e Thürlimann (1971) são obtidas a partir do modelo do painel fissurado.

#### 4.5. Modelo do Pannel Fissurado

Seja um pannel de concreto de espessura  $t_d$ , de lados com dimensões unitárias e armaduras transversal e longitudinal distribuídas em seu interior, submetido a um fluxo de tensões tangenciais (Figura 4.2.a). Após a fissuração desse elemento este terá a configuração mostrada na Figura 4.2.b, onde as bielas de concreto são comprimidas, e têm inclinação  $\alpha$ . O uso desse elemento visa possibilitar uma análise genérica das solicitações combinadas (ações normais e tangenciais).

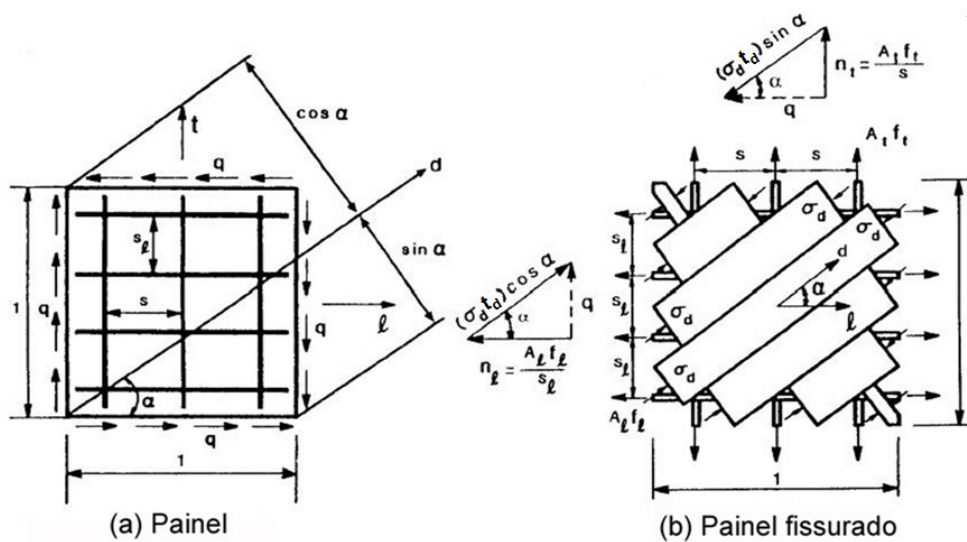


Figura 4.2 – Modelo do pannel fissurado.

Formulando-se o equilíbrio na face vertical do elemento tem-se:

$$tg \alpha = \frac{q}{n_\ell} \quad (4.1)$$

ou

$$q = n_\ell tg \alpha \quad (4.2)$$

Na face horizontal do elemento tem-se:

$$tg \alpha = \frac{n_t}{q} \quad (4.3)$$

ou

$$q = n_t cotg \alpha \quad (4.4)$$

Escrevendo-se o fluxo de tensões em termos da tensão na biela resulta:

$$q = \sigma_d (t_d sen \alpha) cos \alpha \quad (4.5)$$

ou

$$q = \sigma_d t_d (\text{sen } \alpha \cos \alpha) \quad (4.6)$$

Definido-se as forças por unidade de comprimento  $n_\ell$  e  $n_t$  como:

$$n_\ell = \frac{A_\ell f_\ell}{s_\ell} \quad (4.7)$$

e

$$n_t = \frac{A_t f_t}{s_t} \quad (4.8)$$

Igualando-se as expressões 4.1 e 4.3 de modo a se eliminar  $\alpha$  tem-se:

$$\frac{q}{n_\ell} = \frac{n_t}{q} \quad (4.9)$$

logo

$$q = \sqrt{n_\ell n_t} \quad (4.10)$$

De forma análoga, eliminando-se  $q$  tem-se:

$$n_t \cotg \alpha = n_\ell tg \alpha \quad (4.11)$$

donde

$$tg \alpha = \sqrt{\frac{n_t}{n_\ell}} \quad (4.12)$$

A tensão na biela é dada por:

$$\sigma_d = \frac{q}{t_d (\text{sen } \alpha \cos \alpha)} \quad (4.13)$$

onde

- $q$  – fluxo de tensões tangenciais;
- $\alpha$  – ângulo de inclinação das bielas comprimidas;
- $n_\ell$  – força normal na armadura longitudinal;
- $n_t$  – força normal na armadura transversal;
- $\sigma_d$  – tensão de compressão na biela de concreto;
- $t_d$  – espessura do painel;
- $A_\ell$  – área de uma barra da armadura longitudinal;
- $f_\ell$  – tensão na armadura longitudinal;
- $s_\ell$  – espaçamento da armadura longitudinal;
- $A_t$  – área de uma barra da armadura transversal;
- $f_t$  – tensão na armadura transversal;
- $s_t$  – espaçamento da armadura transversal.

#### 4.6. Treliça Espacial Generalizada Considerando-se o Modelo do Painel Fissurado

As vigas de concreto estrutural solicitadas à torção comportam-se de maneira semelhante às vigas com seção vazada (Figura 4.3). Desta forma o fluxo de tensões tangenciais é dado por meio da 1ª equação de Bredt.

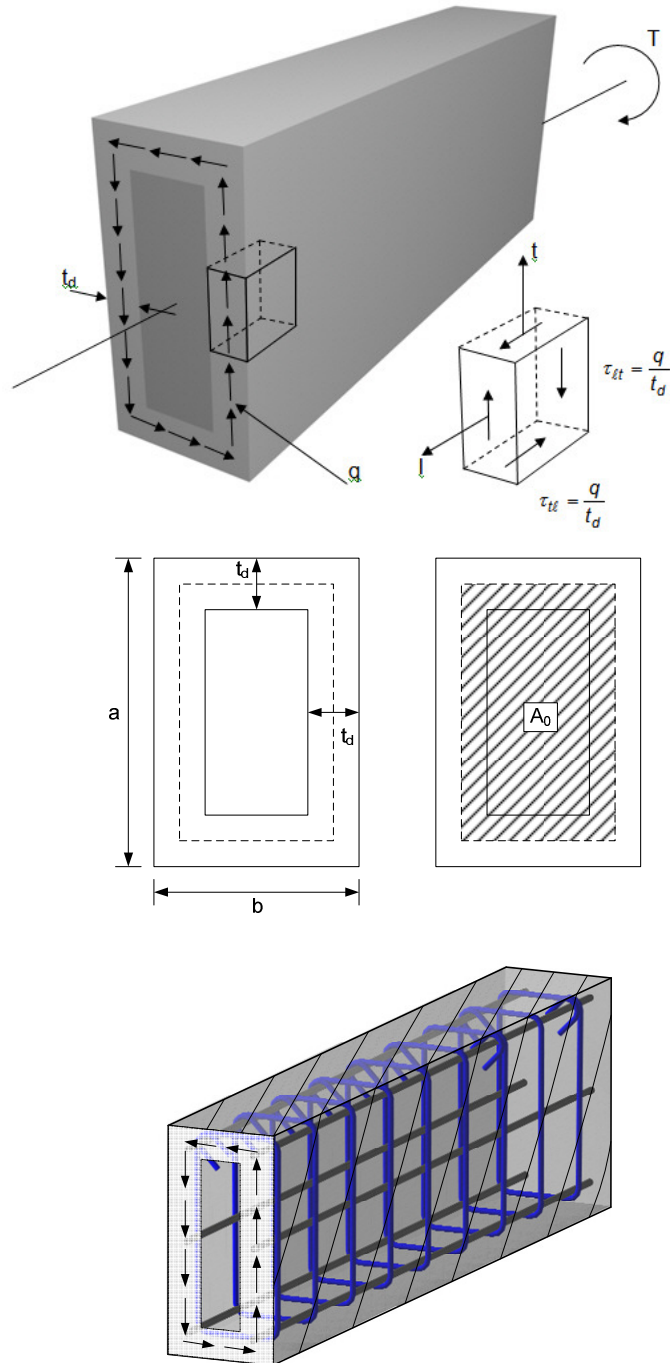


Figura 4.3 – Torção em vigas retangulares de concreto estrutural.

Considerando-se que a viga de concreto armado seja composta por painéis fissurados formando uma elemento com seção vazada, a resultante das forças na armadura longitudinal  $N_\ell$  é dada por:

$$N_\ell = n_\ell u \quad (4.14)$$

Substituindo-se as expressão 4.14 e a 1ª fórmula de Bredt na expressão 4.2, tem-se para a armadura longitudinal:

$$\frac{T}{2A_0} = \frac{N_\ell}{u} \operatorname{tg} \alpha \quad (4.15)$$

$$T = \left( \frac{N_\ell}{u} \right) 2A_0 \operatorname{tg} \alpha \quad (4.16)$$

Para a armadura transversal tem-se:

$$\frac{T}{2A_0} = n_t \operatorname{cotg} \alpha \quad (4.17)$$

$$T = n_t 2A_0 \operatorname{cotg} \alpha \quad (4.18)$$

Para a biela tem-se:

$$\frac{T}{2A_0} = (\sigma_d t_d) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \quad (4.19)$$

$$T = (\sigma_d t_d) 2A_0 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \quad (4.20)$$

Quando do escoamento da armadura longitudinal e transversal tem-se  $n_\ell = n_{\ell y}$ ,  $N_\ell = N_{\ell y}$  e  $n_t = n_{ty}$ , logo:

$$T = \left( \frac{N_{\ell y}}{u} \right) 2A_0 \operatorname{tg} \alpha \quad (4.21)$$

$$T = n_{ty} 2A_0 \operatorname{cotg} \alpha \quad (4.22)$$

Eliminando-se  $T$  das expressões 4.21 e 4.22:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_{ty}}{\sqrt{\left( \frac{N_{\ell y}}{u} \right)}} \quad (4.23)$$

Eliminando-se o ângulo  $\alpha$  das expressões 4.21 e 4.22 tem-se:

$$T_y = 2A_0 \sqrt{\left( \frac{N_{\ell y}}{u} \right)} n_{ty} \quad (4.24)$$

onde

$N_\ell$  – força resultante na armadura longitudinal;

$u$  – perímetro da região limitada pela metade da espessura  $t$ ;

$A_0$  – área da região limitada pela metade da espessura  $t$ ;



$T$  – momento torçor solicitante;

$n_{\ell y}$  – força normal unitária para o escoamento da armadura longitudinal;

$n_{\ell y}$  – força normal unitária para o escoamento da armadura transversal;

$N_{\ell y}$  – força resultante para o escoamento da armadura longitudinal;

$T_y$  – momento torçor quando do escoamento das armaduras.