

3 Torção

3.1. Introdução

A primeira tentativa de se solucionar problemas de torção em peças homogêneas de seção circular data do século XVIII, mais precisamente em 1784 com Coulomb. Este cientista criou um dispositivo para medir a relação entre cargas elétricas e forças magnéticas, que consistia simplesmente num fio suspenso com uma agulha metálica. Ele verificou que uma pequena força magnética na extremidade do fio causava uma torção e uma rotação angular no mesmo (Hsu, 1984).

Os problemas de torção analisados segundo as teorias elástico-lineares da resistência dos materiais dividem-se basicamente em: vigas com seções circulares, vigas com seções não circulares e vigas com seções vazadas de paredes finas.

Quando um eixo, sólido ou tubular de uma viga com seção circular, estiver submetido à torção, cada seção transversal permanece plana e gira em torno do eixo desse elemento. Por outro lado, as seções transversais de uma viga de seção retangular ficam distorcidas quando essa barra é torcida em torno do seu eixo.

3.2. Análise Elástica de Elementos Submetidos à Torção

3.2.1. Elementos de Seções Circulares

A análise de torção em vigas de seções circulares requer a consideração das seguintes hipóteses para sua formulação:

- as seções circulares permanecem circulares depois da torção, e o eixo da viga permanece reto e inextensível;
- cada seção transversal permanece plana e perpendicular ao eixo, sem apresentar qualquer tipo de empenamento após a torção da seção;

- as linhas radiais permanecem retas e radiais à medida que a seção transversal gira em torno do eixo longitudinal da viga;
- admite-se o regime elástico linear do material (lei de Hooke);
- admite-se o regime de pequenas deformações, e que material seja homogêneo e isótropo.

Seja uma viga com seção transversal circular com raio R e com uma extremidade engastada e outra livre. Aplicando-se um momento torçor T em sua extremidade livre, o seu eixo gira apresentando uma rotação ao longo da viga, resultando num ângulo de torção ϕ (Figura 3.1).

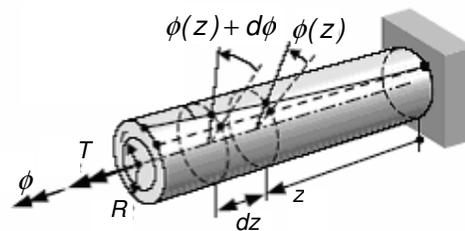


Figura 3.1 – Deformação em uma viga com seção circular solicitada à torção.

Considerando-se o elemento de comprimento dz (Figura 3.2) tem-se:

$$\operatorname{tg} \gamma = r \frac{d\phi}{dz} \quad (3.1)$$

onde

dz – elemento diferencial ao longo do eixo longitudinal;

$d\phi$ – elemento diferencial angular.

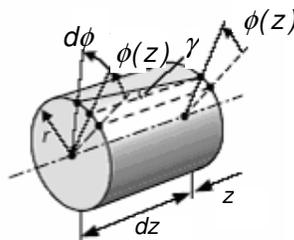


Figura 3.2 – Elemento longitudinal de uma viga com seção circular submetida à torção.

Como γ é pequeno tem-se que:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma \quad (3.2)$$

Reescrevendo-se a expressão 3.1:

$$\gamma = r \frac{d\phi}{dz} \quad (3.3)$$

onde γ é a distorção na seção transversal de abscissa z numa distância r do eixo da peça.

Admitindo-se que as seções não empenem, ou seja, as seções permanecem planas, pode-se aplicar lei de Hooke para se determinar a tensão de cisalhamento:

$$\tau(r) = G\gamma \quad (3.4)$$

onde G é o módulo de deformação transversal.

A distribuição da tensão cisalhante varia de forma linear desde o eixo da viga até a sua face externa (Figura 3.3), então:

$$\tau(r) = \tau_{m\acute{a}x} \frac{r}{R} \quad (3.5)$$

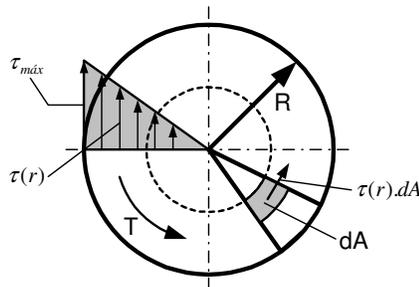


Figura 3.3 – Distribuição da tensão cisalhante na seção circular.

Considerando-se o equilíbrio de uma seção elemental de área dA tem-se:

$$dT = \tau(r)dAr \quad (3.6)$$

Substituindo-se a expressão 3.5 na expressão 3.6 tem-se:

$$dT = \tau_{m\acute{a}x} \frac{r}{R} dAr \quad (3.7)$$

Manipulando-se a expressão 3.7 segue-se:

$$dT = \tau_{m\acute{a}x} \frac{r^2}{R} dA \quad (3.8)$$

Integrando-se a expressão 3.8 tem-se:

$$T = \int_A \tau_{m\acute{a}x} \frac{r^2}{R} dA \quad (3.9)$$

donde

$$T = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{R} \int_A r^2 dA \quad (3.10)$$

O momento polar J_t para seções circulares é dado por:

$$J_t = \int_A r^2 dA \quad (3.11)$$

Substituindo-se a expressão 3.11 na expressão 3.10 tem-se:

$$T = \frac{\tau_{m\acute{a}x} J_t}{R} \quad (3.12)$$

ou

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{TR}{J_t} \quad (3.13)$$

3.2.2. Elementos com Seções Retangulares

A formulação desenvolvida no item anterior é aplicável apenas para o cálculo de tensões e deformações em vigas de seção circular.

Nas vigas com seção transversal retangular submetidas à torção as seções transversais empenam (Figura 3.4).

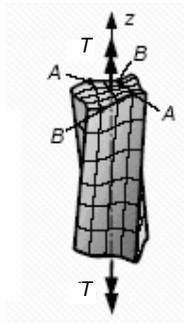


Figura 3.4 – Empenamento das seções de viga com seção retangular.

O desenvolvimento da teoria de torção em viga com seção genérica deve-se a Barré de Saint-Venant, que em 1853 apresentou sua famosa memória sobre torção à Academia Francesa de Ciências.

Numa viga com seção circular a tensão cisalhante varia de forma linear a partir do centro da seção, atingindo seu valor máximo na face externa da peça.

Para vigas com seção transversal retangular a tensão tangencial nos vértices desses elementos é nula. O seu valor máximo ocorre no meio do lado maior, que é o ponto externo mais próximo do centro da peça (Figura 3.5).

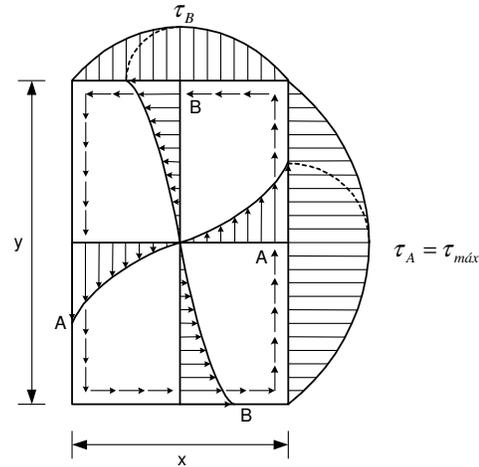


Figura 3.5 – Distribuição da tensão cisalhante devida à torção em seções retangulares.

A tensão cisalhante máxima em vigas com seção retangular submetidas à torção é dada por:

$$\tau_{máx} = \frac{T}{\eta y x^2} \quad (3.14)$$

onde

T – momento torçor solicitante;

η – constante adimensional obtida por meio da solução da teoria da elasticidade;

y – lado maior do retângulo;

x – lado menor do retângulo.

O ângulo de torção em elementos com seção retangular é dado por:

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (3.15)$$

onde:

$$J = \beta yx^3 \quad (3.16)$$

sendo β uma constante adimensional e L o comprimento do elemento.

Os valores de η e β são apresentados na Tabela 3.1. Esses valores são válidos apenas para $y/x \geq 1$.

Tabela 3.1 – Valores de η e β .

y/x	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
η	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,298	0,307	0,312	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,98	0,307	0,312	0,333

Prandt em 1903 apresentou uma formulação matemática para a solução de problemas de torção utilizando a analogia da membrana. Este modelo estabelece relações particulares entre a superfície deformada de uma membrana sob carregamento uniformemente distribuído, e a distribuição de tensões em seções submetidas à torção.

3.2.3. Torção em Elementos de Parede Fina

Bredt em 1896 solucionou o problema de torção em vigas com seções vazadas de paredes finas. Esta formulação é a base para a resolução de problemas em vigas de concreto estrutural solicitados à torção.

Por meio da consideração de hipóteses simplificadoras o problema de torção em seções de paredes finas pode ser resolvido de modo imediato. Estas hipóteses são:

- o elemento é cilíndrico com seção transversal constante ao longo do seu comprimento;
- a seção transversal é fechada;
- a espessura da parede quando comparada às dimensões da seção transversal é pequena;
- as seções permanecem planas após as deformações, logo não empenam;
- admite-se o regime elástico linear (lei de Hooke);
- admite-se o regime de pequenas deformações, e que o material seja homogêneo e isótropo.

3.2.3.1. 1ª Fórmula de Bredt

A Figura 3.6 apresenta um elemento de parede fina submetida à torção. O equilíbrio deste elemento é dado pela expressão 3.17:

$$-\tau \cdot t \Delta x + \left(\tau + \frac{d\tau}{ds} \right) \left(t + \frac{dt}{ds} \Delta s \right) \Delta x = 0 \quad (3.17)$$

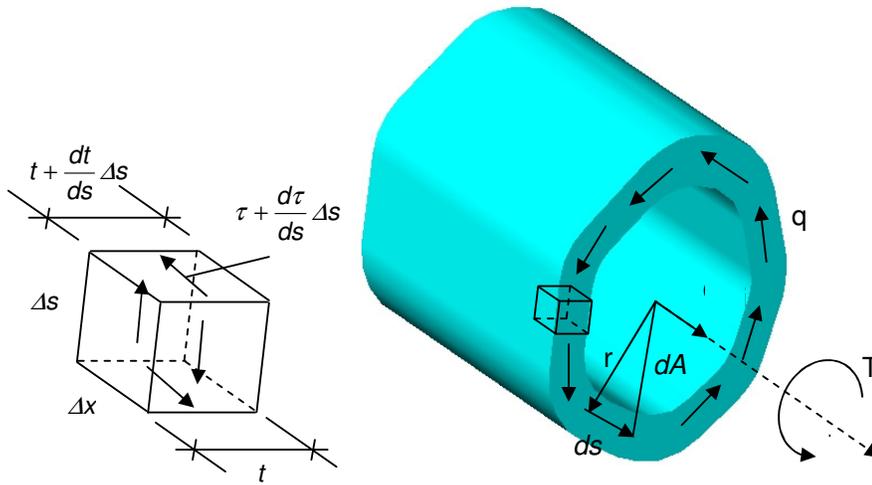


Figura 3.6 – Seção vazada de parede fina submetida a um momento torçor.

Expandindo-se e manipulando-se a expressão 3.17:

$$\left(\tau \frac{dt}{ds} + t \frac{d\tau}{ds} \right) \Delta s + \frac{d\tau}{ds} \frac{dt}{ds} (\Delta s)^2 = 0 \quad (3.18)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior dessa expressão tem-se:

$$\left(\tau \frac{dt}{ds} + t \frac{d\tau}{ds} \right) = 0 \quad (3.19)$$

Verifica-se que expressão 3.19 é a diferencial de:

$$\frac{d(\tau \cdot t)}{ds} = 0 \quad (3.20)$$

Definindo-se o fluxo de tensões tangenciais por:

$$q = \tau \cdot t \quad (3.21)$$

Substituindo-se a expressão 3.21 na expressão 3.20 resulta:

$$\frac{dq}{ds} = 0 \quad (3.22)$$

Conclui-se que o fluxo de tensões cisalhantes é constante ao longo das paredes desse tubo.

O momento torçor solicitante deve ser equilibrado pelas ações internas resistentes, ou seja, pela integral do produto vetorial entre o vetor r e o fluxo de tensões tangenciais ao longo da seção do tubo, logo:

$$T_i = \oint r \times (\tau t) ds \quad (3.23)$$

Substituindo-se a expressão 3.21 na expressão 3.23:

$$T_i = q \oint r \times ds \quad (3.24)$$

O produto vetorial entre dois vetores resulta num vetor axial perpendicular a estes. O módulo deste vetor resultante é igual à área do paralelogramo cujos lados são esses dois vetores.

O módulo do produto vetorial $r \times ds$ é igual a duas vezes a área dA indicada na Figura 3.6, e o vetor resultante perpendicular ao plano da seção é o vetor referente às ações internas. O somatório dessas ações internas é dado por:

$$\oint r \times ds = 2A_{0i} \quad (3.25)$$

A integral fechada na expressão 3.25 indica que essas áreas elementares devem ser somadas ao longo da coordenada setorial s , logo:

$$T_i = 2A_{0i}(\tau t) \quad (3.26)$$

onde A_0 é a área definida pela linha média do tubo.

Isolando-se a tensão tangencial na expressão 3.26:

$$\tau = \frac{T}{2A_0 t} \quad (3.27)$$

Substituindo-se a expressão do fluxo de tensões tangenciais na expressão 3.27 e isolando-o tem-se:

$$q = \frac{T}{2A_0} \quad (3.28)$$

As expressões 3.27 e 3.28 são denominadas 1ª fórmula de Bredt.

Esta formulação mostra que o fluxo de tensões tangenciais se desenvolve ao longo das paredes das seções. Como o fluxo é constante, se a espessura da parede varia a tensão tangencial também varia.

3.2.3.2. 2ª Fórmula de Bredt

Essa fórmula pode ser deduzida por meios energéticos, desde que se admita um comportamento elástico linear para o material. Para a energia potencial de deformação unitária devida ao cisalhamento puro tem-se:

$$\frac{dW_{INT}}{dV} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \quad (3.29)$$

com o volume elementar

$$dV = t ds dx \quad (3.30)$$

Substituindo-se a expressão 3.30 na expressão 3.29 tem-se:

$$dW_{INT} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} t ds dx \quad (3.31)$$

Integrando-se em ambos os lados dessa expressão resulta:

$$W_{INT} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \oint \frac{\tau^2}{G} t ds dx \quad (3.32)$$

O trabalho externo de uma viga submetida à torção no regime elástico linear é dado por:

$$W_{EXT} = \frac{1}{2} T\phi \quad (3.33)$$

onde ϕ é o ângulo de torção.

Aplicado-se o princípio dos trabalhos virtuais, no qual o trabalho externo deve ser igual ao trabalho interno tem-se:

$$W_{EXT} = W_{INT} \quad (3.34)$$

Substituindo-se as expressões 3.32 e 3.33 na expressão 3.34 resulta:

$$T\phi = \int_0^{\ell} \oint \frac{\tau^2}{G} t ds dx \quad (3.35)$$

Integrando-se essa expressão ao longo do perímetro da seção obtém-se:

$$T\phi = \frac{\ell}{G} \oint \tau^2 t ds \quad (3.36)$$

Manipulando-se a expressão 3.36 resulta:

$$\frac{T\phi}{\ell} = \frac{1}{G} \oint \tau^2 t ds \quad (3.37)$$

$$\frac{\phi}{\ell} = \frac{d\phi}{dx} \quad (3.38)$$

Substituindo-se expressão 3.38 na expressão 3.37 seguem-se:

$$T \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{G} \oint \tau^2 t ds \quad (3.39)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4A_0^2 G} \oint \frac{ds}{t} \quad (3.40)$$

Como a espessura t é constante, tem-se o ângulo de torção por unidade de comprimento:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T u}{4 A_0^2 G t} \quad (3.41)$$

onde u é o perímetro da área A_0 .