

## Referências Bibliográficas

- [1] AGARWAL, H.. **Reliability Based Design Optimization: Formulation and Methodologies**. PhD thesis, University of Notre Dame, 2004. 5.3, 5.7.1, 5.7.1
- [2] ALLEN, M.; MAUTE, K.. **Reliability-based design optimization of aeroelastic structures**. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 27:228–242, 2004. 1.3
- [3] ALMEIDA, A. A. D.. **Análise probabilística de segurança sísmica de sistemas e componentes estruturais**. Tese de Doutorado., PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2002. 1.3
- [4] ARORA, J. S.. **Introduction to Optimum Design**. McGraw-Hill, 1989. 3.1
- [5] BARBOSA, A. H.. **Análise de confiabilidade estrutural utilizando o método de monte carlo e rede neurais**. Dissertação de Mestrado., UFOP, Ouro Preto, Brasil, dezembro 2004. 4.5.1
- [6] BATHE, K.-J.. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Prentice Hall Inc., 1996. ISBN 0–13-301458 - 4. 2.2, 2.3.1, 2.3.2
- [7] BAZARAA, K. S.; SHERALI, H. D. ; SHETTY, C. M.. **Nonlinear Programming: theory and algorithms**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd ed. edition, 1993. 4.3.2, B.5, B.6
- [8] CARVAJALINO, J. D. J. L.. **Desempenho das ferramentas de inspeção em linha e sua influência na confiabilidade estrutural de dutos corroídos**. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2004. 1.3
- [9] CHOI, K. K.; YOUN, B. D.. **Hybrid analysis method for reliability-based design optimization**. In: *PROCEEDINGS OF DETC'01 ASME 2001 DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS AND INFORMATION IN ENGINEERING CONFERENCE*, Pittsburgh, Pennsylvania, September, 9–12 2001. 1.3

- [10] COOK, R. D.; MALKUS, D. S. ; PLESHA, M. E.. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. Wiley & Sons, New York, third edition, 1989. 2.2
- [11] CRISFIELD, M. A.. **Non - Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 1: Essentials**. John Wiley & Sons, Inc. New York, 605 Third Avenue, New York, NY 10158-0012, USA, 1991. 2.2, 2.3.2, 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3
- [12] **DAKOTA: Design Analysis Kit for Optimization and Terascale Applications**, <http://endo.sandia.gov/DAKOTA>. Sandia National Laboratories, Albuquerque, 2007. 6.4
- [13] EBOLI, C. R.. **Dimensionamento ótimo de seções de concreto armado à flexão composta oblíqua**. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 1989. 1.3, B.6, B.7, B.7, B.7
- [14] ELDRED, M.; AGARWAL, H.; PEREZ, V.; JR., S. W. ; RENAUDX, J.. **Investigation of reliability method formulations in DAKOTA/UQ**. Sandia National Laboratories, Albuquerque, 2005. 1.3, 5.4, 5.7.1, 5.7.1, 5.7.2, 5.7.2
- [15] ELDRED, M. S.; BICHON, B. J. ; ADAMS, B. M.. **Overview of reliability analysis and design capabilities in DAKOTA**. In: PROCEEDINGS OF THE NSF WORKSHOP ON RELIABLE ENGINEERING COMPUTING MODELING ERRORS AND UNCERTAINTY IN ENGINEERING COMPUTING, Savannah, GA, February 22-24 2006. 1.3, 5.4, 5.7.3
- [16] ELDRED, M. S.; BICHON, B. J.. **Second-order reliability formulations in DAKOTA/UQ**. In: PROCEEDINGS OF THE 47TH AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE AND 8TH AIAA NON-DETERMINISTIC APPROACHES CONFERENCE, Newport, Rhode Island, May 1-4 2006. 1.3, 5.7.3
- [17] EYHERAMENDY, D.; ZIMMERMAN, T.. **Object-oriented finite elements II. A symbolic environment for automatic programming**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 132(3-4):277-304, 1996. 6.4
- [18] EYHERAMENDY, D.; ZIMMERMAN, T.. **Object-oriented finite elements III. Theory and application of automatic programming**.

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 154(1-2):41–68, 1998. 6.4
- [19] EYHERAMENDY, D.; ZIMMERMANN, T.. **Object-oriented finite elements IV. Symbolic derivations and automatic programming of nonlinear formulations.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190:2729–2751, 2001. 6.4
- [20] FALCÓN, G. A. S.. **Otimização geométrica de estruturas treliçadas.** Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1991. 7.1
- [21] FALCÓN, G. A. S.. **Uma família de algoritmos de ponto interior para projeto ótimo em engenharia.** Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1996. 7.1
- [22] FARFÁN, A. D.. **Aplicação da análise limite a problemas geotécnicos modelados como meios contínuos convencionais e meios de cosserat.** Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2000. B.7
- [23] FIGUEIREDO, M. P.. **Avaliação estatística de metodologia para determinação de de espectros de resposta de projeto uniformemente prováveis.** Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2004. 1.3
- [24] FRANGOPOL, D. M.; IMAI, K.. **Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. II: applications.** Computers and Structures, 77:693–609, 2000. 1.3
- [25] GALVÃO, A. D. S.. **Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos.** Dissertação de Mestrado., UFOP, Ouro Preto, Brasil, 2000. (document), 2.2, 2.3
- [26] GALVÃO, A. D. S.. **Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas.** Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2004. 2.2
- [27] GANO, S. E.. **Simulation-Based Design Using Variable Fidelity Optimization.** PhD thesis, University of Notre Dame, april 2005. 5.3, 5.3
- [28] GRANDHI, R. V.; WANG, L.. **Reliability-based structural optimization using improved two-point adaptive nonlinear approximations.** Finite Elem. Anal. Des., 29(1):35–48, 1998. 1.3

- [29] HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z.. **Elements os Structural Optimization**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 3rd ed. edition, 1992. 1.1, 3.1, 6.3.1
- [30] HASOFER, A. M.; LIND, N. C.. **Exact and invariant second–moment code format**. Journal of the Engineering Mechanics Division, 100:111–121, 1974. 4.3.2, B.9.1
- [31] HAUKAAS, T.. **Finite Element Reliability and Sensitivity Methods for Performance–Based Engineering**. PhD thesis, University of California at Berkeley, 2003. 4.4, 6.4, B.9
- [32] HAUKAAS, T.; KIUREGHIAN, A. D.. **Strategies for finding the design point in non–linear finite element reliability analysis**. Probabilistic Engineering Mechanics, 1:1–15, 2005. B.9
- [33] HERSKOVITS, J.. **A view on nonlinear optimization**. Structural Optimization, p. 71–117, 1995. B.4, B.5, B.6, B.8
- [34] HERSKOVITS, J. & SANTOS, G.. **On the computer implementation of feasible direction interior point algorithms for nonlinear optimization**. Structural Optimization, 14:165–172, 1997. B.8, B.8.1
- [35] HERNÁNDEZ, A. O. V.. **Metodologia de calibração de fatores parciais de segurança para projeto de linhas de ancoragem baseada em confiabilidade**. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2004. 1.3
- [36] HOLM, C. A.. **Reliability Analysis of Structural Systems Using Nonlinear Finite Element Methods**. PhD thesis, The University of Trondheim, 1990. 4.5.1
- [37] IMAI, K.; FRANGOPOL, D. M.. **Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. I: theory**. Computers and Structures, 77:677–691, 2000. 1.3, 2.3.1
- [38] MCKENNA, F.; FENVES, G. ; SCOTT, M.. **Open system for earthquake engineering simulation**. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, 2006. 6.4
- [39] DER KIUREGHIAN, A.; LIU, P.. **Structural reliability under incomplete probability information**. J. Eng. Mech., 112:85–104, 1986. 4.1.3
- [40] KLEIBER, M.; ANTÚNES, H.; HIEN, T. D. ; KOWALCZYK, P.. **Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics**. John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 1997. 1.1, 3.1, 3.2

- [41] KLEIBER, M.; SIEMASZKO, A. ; STOCKI, R.. **Interactive stability-oriented reliability-based design optimization**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 168:243–253, 1999. (document), 1.3, 6.2
- [42] KUSCHEL, N.; RACKWITZ, R.. **Two basic problems in reliability-based structural optimization**. Mathematical Methods of Operations Research, 46:309–333, 1997. (document), 5.7.1, 5.7.1, 5.7.3, 5.2
- [43] LEE, T. W.; KWAK, B. M.. **A reliability-based optimal design using advanced first order second moment method**. Mechanics of Structures and Machines, 15(4):523–542, 1987–88. 1.1, 1.3
- [44] LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D.. **Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances**. Probabilistic Engineering Mechanics, 1(2):105–112, 1986. 4.1.3, 4.1.3
- [45] LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D.. **Finite-element reliability methods for geometrically nonlinear stochastic structures**. Report No. UCB/SEMM–89/05, Dept. of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1989. 4.5.1
- [46] LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D.. **Optimization algorithms for structural reliability**. Structural Safety, 9:161–177, 1991. 4.5.1, B.9
- [47] MARTHA, L. F.; JUNIOR, E. P.. **An Object-Oriented Framework for Finite Element Programming**. In: PROCEEDINGS OF THE FIFTH WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, IACM, Vienna – Austria, 2002. ISBN 3-9501554-0-6. 6.4
- [48] MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H. ; ZIEMIAN, R. D.. **Matrix Structural Analysis**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000. 2.3.1
- [49] MELCHERS, R. E.. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, second edition, 1999. ISBN 0–471–98324 - 1. 4.1.3
- [50] MELO, A. M. C.. **Projeto Ótimo de Pórticos Planos de Concreto Armado**. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2000. 6.2
- [51] MODAK, S.; SOTELINO, E. D.. **An object-oriented programming framework for the parallel dynamic analysis of structures**. Computers and Structures, 80:77–84, 2002. 6.4

- [52] MÜLLER, A. L.. **Otimização de estruturas reticuladas considerando incertezas**. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2003. 1.3
- [53] SCHITTKOWSKI, K.. **Nonlinear Programming**. 2006. 6.5.1, 6.5.2
- [54] NAKIB, R.. **Deterministic and reliability-based optimization of truss bridges**. *Computers and Structures*, 65:767–775, 1997. 1.3
- [55] NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R.. **Reliability of Structures**. McGraw Hill, 2000. ISBN 0–07–048163–6. 4.1.1, A
- [56] OÑATE, E.; MATIAS, W. T.. **A critical displacement approach for predicting structural instability**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134:135–161, 1996. 2.7.2, 2.7.2, 2.7.2
- [57] MCKENNA, F.; FENVES, G. L.; FILIPPOU, F. C.; MAZZONI, S. ; SCOTT, M. H.. **OpenSees: Open system for earthquake engineering simulation**, <http://opensees.berkeley.edu>. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, 2007. 6.4
- [58] PARENTE, JR., E.. **Análise de sensibilidade e otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares**. Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2000. (document), 1.3, 2.5, 6.2, 6.1, 6.2, B.6, B.7, B.7.1, 1, B.8, B.8, B.10
- [59] PEREIRA, A.. **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, agosto 2002. 1.3, 6.2
- [60] PINHEIRO, L.. **Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rídos**. Dissertação de Mestrado, UFOP, Ouro Preto, Brasil, 2003. 2.7.1, 2.7.2
- [61] PINHEIRO, L.; SANTOS, M. N. ; SILVEIRA, R. A. M.. **Análise geometricamente não-linear de treliças 2D e 3D através do MEF**. In: XXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS (CILAMCE 2006), Belém, Pará – Brazil, 2006. 2.7.1, 2.7.1, 2.7.2, 2.7.2, 2.7.2
- [62] POWELL, G.; SIMONS, J.. **Improved iteration strategy for nonlinear structures**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:1455–1467, 1981. 2.7.1, 2.7.1

- [63] QU, X.; HAFTKA, R. T.. **Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor.** *Structural Multidisciplinary Optimization*, 27:314–325, 2004. 1.1, 1.3
- [64] RACKWITZ; FIESSLER, B.. **Structural reliability under combined load sequences.** *Computers and Structures*, 9:489–494, 1978. 4.3.2, B.9.1
- [65] RIHA, D.; THACKER, B.; HALL, D.; AUDEL, T. ; PRITCHARD, S.. **Capabilities and applications of probabilistic methods in finite element analysis.** In: PROC. INT. SOC. SCIENCE AND APPLIED TECHNOLOGIES (ISSAT) CONF. ON RELIABILITY AND QUALITY IN DESIGN, Las Vegas, Nevada, August 11-13 1999. 1.3
- [66] RIHA, D.; THACKER, B.; MILLWATER, H.; WU, Y.-T. ; ENRIGHT, M.. **Probabilistic engineering analysis using the nessus software.** In: 41ST STRUCTURAL DYNAMICS AND MATERIALS CONFERENCE, PAPER 2000-1512, Atlanta, Georgia, April 2000. 1.3
- [67] ROCHA, G.. **Estratégias de Incremento de Carga e de Iteração para Análise Não-Linear de Sistemas Estruturais.** Dissertação de Mestrado, UFOP, Ouro Preto, Brasil, 2000. 2.2
- [68] ROJAS, P. A. M.. **Otimização de pré-formas e matrizes em problemas bidimensionais de forjamento.** Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, Brasil, outubro 2003. (document), 1.1, 3.2, 3.3, 3.1
- [69] SAGRILO, L. V. S.. **Análise de confiabilidade estrutural utilizando os métodos analíticos FORM e SORM.** Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, fevereiro 1994. 1.3, 4.4, 4.5.1
- [70] SAGRILO, L. V. S.. **Apostila do curso de confiabilidade estrutural.** UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2003. 4, 4.2, 4.3, 4.3.1, 4.3.2, A, A.1, A.2, A.2.1
- [71] SAMPAIO, R. A. C.. **Espectro de resposta de projeto uniformemente provável para sistemas secundários inelásticos.** Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, Brasil, 2003. 1.3
- [72] HSIEN, S.-H.; MODAK, S. ; SOTELINO, E. D.. **Object-oriented parallel programming tools for structural engineering applications.** *Computing Systems in Engineering*, 6(6):533–548, 1995. 6.4
- [73] DE CARVALHO SOARES, R.; VENTURINI, W. S.. **Apostila do curso de confiabilidade estrutural.** São Paulo, Brasil, 2001. 4.4, 6.1.1

- [74] STOCKI, R.; KOLANEK, K.; JENDO, S. ; KLEIBER, M.. **Study on discrete optimization techniques in reliability-based optimization of truss structures**. Computers and Structures, 79:2235–2247, 2001. (document), 6.5.1, 6.5.1, 6.5.1, 6.5, 6.5.1, 6.5.2, 6.5.2, 6.5.2
- [75] STROUSTRUP, B.. **The C++ Programming Language**. Addison-Wesley, third edition, 1997. 6.4
- [76] TU, J.; CHOI, K.; ; PARK, Y.. **A new study on reliability-based design optimization**. J. Mech. Design, 121:557–564, december 1999. 1.1, 1.3, 5.3
- [77] VANDERPLAATS, G. N.. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications**. McGraw–Hill, Inc., New York, 1984. B.6
- [78] YANG, Y. B.; SHIEH, M. S.. **Solution method for nonlinear problems with multiple critical points**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 28(12):2110–2116, 1990. 2.5.2
- [79] YANG, Y. B.; KUO, S. R.. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**. Prentice-Hall, New York, 1994. 2.2, 2.5.1, 2.5.2, 2.5.2, 2.5.2, 2.7.2
- [80] YANG, R.; GU, L.. **Experience with approximate reliability-based optimization methods**. Structural Multidisciplinary Optimization, 26:152–159, 2004. 1.3, 5.7.2, 5.7.2
- [81] YOUN, B. D.; CHOI, K. K. ; PARK, Y. H.. **Hybrid analysis method for reliability-based design optimization**. Journal of Mechanical Design, ASME, 125(2):221–232, 2003. 1.3
- [82] YOUN, B. D.; CHOI, K. K.. **An investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches**. Journal of Mechanical Design, 126:403–411, 2004. (document), 1.3, 5.3, 5.1, 5.3, 5.2, 5.3
- [83] YOUN, B. D.; CHOI, K. K. ; DU, L.. **Enriched performance measure approach (PMA+) for reliability-based design optimization**. AIAA Journal, 43(4):874–884, April 2005. 7.1
- [84] YOUN, B. D.; CHOI, K. K. ; DU, L.. **Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value (HMV+) method**. Structural Multidisciplinary Optimization, 29(2):134–148, 2005. 7.1



- [85] ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.. **The Finite Element Method**. Butterworth–Heinemann, Oxford, Boston, 5th edition, 2000. ISBN 0–7506–5055–9. 2.2, 2.3.2
- [86] ZIMMERMAN, T.; EYHERAMENDY, D.. **Object-oriented finite elements I. Principles of symbolic derivations and automatic programming**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132(3-4):259–276, 1996. 6.4

## A Variáveis Randômicas

Um variável randômica é definida pela sua função cumulativa de distribuição (CDF, do inglês *Cumulative Distribution Function*),  $F_X$ . A função densidade de probabilidade  $f_X$ , identificada por PDF (do inglês *Probability Density Function*) é a primeira derivada de  $F_X$ , ou seja [70, 55]:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (\text{A-1})$$

A expressão

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (\text{A-2})$$

indica a probabilidade da variável  $X$  assumir valores entre  $a$  e  $b$ . Qualquer  $f_X(x)$  que satisfaça as seguintes condições pode ser considerada como uma PDF:

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0.0 \quad \text{para qualquer } x; \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= 1.0 \quad (\text{área unitária}) \text{ e}; \\ \int_a^b f_X(x) dx &= P(a \leq X \leq b) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

A CDF  $F_X(x)$  de  $X$  é definida da seguinte forma:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \quad (\text{A-4})$$

onde  $F_X(a)$  significa a probabilidade da variável  $X$  assumir valores menores ou iguais a  $a$ . Uma função cumulativa de probabilidades deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} F_X(-\infty) &= 0.0; \\ 0 &\leq F_X(x) \leq 1.0 \quad \text{e}; \\ F_X(\infty) &= 1.0 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

### A.1 Valores Característicos de uma Variável Randômica

O valor médio, ou a média, ou o valor esperado de uma variável randômica  $X$  é definido como:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (\text{A-6})$$

onde  $f_x(x)$  é a PDF de  $X$  definida anteriormente. Outro resultado interessante é o valor médio quadrático de  $X$  definido como:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (\text{A-7})$$

A variância mede a dispersão dos valores da variável em torno da média e é definida como:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \\ &= E(X^2) - \mu_X^2 \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

O desvio padrão de  $X$  é definido como a raiz quadrada da variância, i.e.,

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (\text{A-9})$$

O coeficiente de variação de  $X$  é definido como a razão entre o desvio padrão e a média, ou seja,

$$\text{c.o.v.} = \delta_X = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (\text{A-10})$$

O coeficiente de variação mede, de forma adimensional (ao contrário da variância) a dispersão dos dados da variável randômica em torno da média. Coeficientes de variação baixos indicam que os valores da variável randômica estão distribuídos próximos a média, enquanto que valores altos indicam uma forte dispersão em torno da mesma [70].

## A.2 Distribuições de Probabilidades

Qualquer função que satisfaça as condições dadas pela equação (A-3) pode ser usada como uma distribuição de probabilidades. O uso prático desta função depende da capacidade dela representar estatisticamente um determinado fenômeno que está sendo investigado. Porém, na literatura já existem várias funções que atendem às condições citadas anteriormente e que podem ser usadas na prática da engenharia [70]. A seguir são apresentadas diversas funções existentes na literatura e implementadas no presente trabalho.

### A.2.1

#### Distribuição Normal ou Gaussiana

Uma variável  $X$  é dita normalmente distribuída ou simplesmente uma variável Gaussiana, se a sua PDF for da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma} \varphi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

onde  $\varphi$  é a PDF da função normal padrão de uma variável auxiliar  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ :

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( \frac{-y^2}{2} \right) \quad (\text{A-12})$$

cuja média é igual a 0 e o desvio padrão igual a 1. A função cumulativa de probabilidades da distribuição  $\varphi(y)$  é usualmente denotada por  $\Phi(y)$ , onde

$$\Phi(y) = F_Y(y) = P(Y \leq y) = \Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(y) dy \quad (\text{A-13})$$

A distribuição Gaussiana tem somente como parâmetros a média  $\mu$  e o desvio padrão  $\sigma$  da variável randômica e é geralmente denotada por  $N(\mu, \sigma)$ . A sua função cumulativa só pode ser avaliada por integração numérica, ou usando tabelas disponíveis em livros de estatística [70]. Outras características desta distribuição são apresentadas a seguir:

- Restrições das variáveis e parâmetros

$$\sigma > 0 \quad (\text{A-14})$$

- CDF

$$F(x) = \Phi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \quad (\text{A-15})$$

- Inversa da CDF

$$x(F) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(F) \quad (\text{A-16})$$

### A.2.2

#### Distribuição Lognormal

Uma variável  $X$  tem uma distribuição lognormal quando estatisticamente  $\ln(X)$  pode ser representado por uma distribuição normal. A CDF de uma variável lognormal é definida como:

$$f(x) = \frac{1}{\xi x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(x) - \lambda}{\xi} \right)^2 \right] \quad (\text{A-17})$$

onde  $\lambda$  é o valor esperado de  $\ln(X)$ , i.e.  $\lambda = E[\ln(X)] = \mu_{\ln(X)}$ , e  $\xi$  é o desvio padrão de  $\ln(X)$ , i.e.  $\xi = \sqrt{\text{Var}(\ln(X))} = \sigma_{\ln(X)}$ .  $\lambda$  e  $\xi$  se relacionam com a média e o desvio padrão de  $X$  através da seguintes relações

$$\xi^2 = \ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right] \quad (\text{A-18})$$

$$\lambda = \ln \mu - \frac{1}{2} \xi^2 \quad (\text{A-19})$$

– CDF

$$F(x) = \Phi \left( \frac{\ln(x) - \lambda}{\xi} \right) \quad (\text{A-20})$$

– Inversa da CDF

$$x(F) = \exp[\Phi^{-1}(F)\xi + \lambda] \quad (\text{A-21})$$

– Média

$$\mu = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\xi^2\right) \quad (\text{A-22})$$

– Desvio padrão

$$\sigma = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\xi^2\right) \sqrt{\exp(\xi^2) - 1} \quad (\text{A-23})$$

### A.2.3

#### Distribuição Uniforme

– PDF

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad (\text{A-24})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros

$$a < x < b, \quad a < b \quad (\text{A-25})$$

– CDF

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad (\text{A-26})$$

– Inversa da CDF

$$x(F) = Fb - Fa + a \quad (\text{A-27})$$

– Média

$$(a + b)/2 \quad (\text{A-28})$$

– Desvio padrão

$$\left( \sqrt{3}(b - a) \right) / 6 \quad (\text{A-29})$$

### A.2.4

#### Distribuição Gamma

– Função Gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt \quad (\text{A-30})$$

– PDF

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1} \exp(-\lambda x)}{\Gamma(k)} \quad (\text{A-31})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros

$$x > 0, \quad \lambda > 0, \quad k > 0 \quad (\text{A-32})$$

– CDF 
$$F(x) = \frac{\Gamma(k, \lambda x)}{\Gamma(k)} \quad (\text{A-33})$$

– Média 
$$k/\lambda \quad (\text{A-34})$$

– Desvio padrão 
$$\sqrt{k}/\lambda \quad (\text{A-35})$$

### A.2.5 Distribuição Beta

Beta  $Bet(a, b, q, r)$

– PDF 
$$f(x) = \frac{(x-a)^{q-1}(b-x)^{r-1}}{B(q, r)(b-a)^{q+r-1}} \quad (\text{A-36})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros 
$$a < x < b, \quad q > 0, \quad r > 0 \quad (\text{A-37})$$

– CDF 
$$F(x) = \text{sem expressão fechada} \quad (\text{A-38})$$

– Inversa da CDF 
$$x(F) = \text{sem expressão fechada} \quad (\text{A-39})$$

– Média 
$$(ar + bq)/(q + r) \quad (\text{A-40})$$

– Desvio padrão 
$$\frac{b-a}{q+r} \sqrt{\frac{qr}{q+r+1}} \quad (\text{A-41})$$

### A.2.6 Distribuição Gumbel

Gumbel  $Gum(u, \alpha)$

– PDF 
$$f(x) = \alpha \exp[-\alpha(x-u) - \exp[-\alpha(x-u)]] \quad (\text{A-42})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros 
$$\alpha > 0 \quad (\text{A-43})$$

– CDF 
$$F(x) = \exp[-\exp(-\alpha(x-u))] \quad (\text{A-44})$$

– Inversa da CDF 
$$x(F) = \frac{\alpha u - \ln(-\ln(F))}{\alpha} \quad (\text{A-45})$$

– Média  $u + \gamma/\alpha$  sendo  $\gamma = 0.5772156649$  (A-46)

– Desvio padrão  $\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$  (A-47)

### A.2.7 Distribuição Tipo I Mínimos

Tipo I Mínimos  $Mínimos(u, \alpha)$

– PDF  $f(x) = \alpha \exp[\alpha(x - u) - \exp(\alpha(x - u))]$  (A-48)

– Restrições das variáveis e parâmetros  $\alpha > 0$  (A-49)

– CDF  $F(x) = 1 - \exp(-\exp(\alpha(x - u)))$  (A-50)

– Inversa da CDF  $x(F) = \frac{\alpha u + \ln(-\ln(1 - F))}{\alpha}$  (A-51)

– Média  $u - \gamma/\alpha$  sendo  $\gamma = 0.5772156649$  (A-52)

– Desvio padrão  $\frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$  (A-53)

### A.2.8 Distribuição Tipo II Máximos

Tipo II Máximos  $Máximos(u, \alpha)$

– PDF  $f(x) = \frac{k}{u} \left(\frac{u}{x}\right)^{k+1} \exp\left(-\left(\frac{u}{x}\right)^k\right)$  (A-54)

– Restrições das variáveis e parâmetros  $x > 0, u > 0, k > 0$  (A-55)

– CDF  $F(x) = \exp\left(-\left(\frac{u}{x}\right)^k\right)$  (A-56)

– Inversa da CDF  $x(F) = u(-\ln(F))^{-1/k}$  (A-57)

– Média  $u\Gamma(1 - 1/k)$  (A-58)

– Desvio padrão  $u\sqrt{\Gamma(1 - 2/k) - \Gamma(1 - 1/k)^2}$  (A-59)

### A.2.9

#### Distribuição Tipo III Mínimos

Tipo III Mínimos  $Mínimos(e, u, k)$

– PDF 
$$f(x) = \frac{k}{u - e} \left( \frac{x - e}{u - e} \right)^{k-1} \exp \left( - \left( \frac{x - e}{u - e} \right)^k \right) \quad (\text{A-60})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros

$$x > e, \quad u > 0, \quad k > 0, \quad u \neq e \quad (\text{A-61})$$

– CDF 
$$F(x) = 1 - \exp \left( - \left( \frac{x - e}{u - e} \right)^k \right) \quad (\text{A-62})$$

– Inversa da CDF

$$x(F) = (u - e) \left( \frac{e}{u - e} + (-\ln(1 - F))^{1/k} \right) \quad (\text{A-63})$$

– Média

$$e + (u - e)\Gamma(1 + 1/k) \quad (\text{A-64})$$

– Desvio padrão

$$(u - e)\sqrt{\Gamma(1 + 2/k) - \Gamma(1 + 1/k)^2} \quad (\text{A-65})$$

### A.2.10

#### Distribuição Weibull

Weibull  $Wbl(u, k)$

– PDF 
$$f(x) = \frac{k}{u} \left( \frac{x}{u} \right)^{k-1} \exp \left( - \left( \frac{x}{u} \right)^k \right) \quad (\text{A-66})$$

– Restrições das variáveis e parâmetros

$$x > 0, \quad k > 0, \quad k > 0 \quad (\text{A-67})$$

– CDF 
$$F(x) = 1 - \exp \left( - \left( \frac{x}{u} \right)^k \right) \quad (\text{A-68})$$

– Inversa da CDF

$$x(F) = u (-\ln(1 - F))^{1/k} \quad (\text{A-69})$$

– Média

$$u\Gamma(1 + 1/k) \quad (\text{A-70})$$

– Desvio padrão

$$u\sqrt{\Gamma(1 + 2/k) - \Gamma(1 + 1/k)^2} \quad (\text{A-71})$$



## B Algoritmos de Otimização

São apresentados a seguir os conceitos de Programação Matemática (PM) necessários à compreensão do processo de otimização, assim como uma descrição dos algoritmos de otimização utilizados.

### B.1 Formulação do Problema

Em problemas típicos de engenharia, podem ser obtidas várias, ou possivelmente infinitas, soluções. Em um problema de otimização deseja-se obter um *projeto ótimo*, maximizando ou minimizando uma função a qual denominamos *função objetivo*. Isto deve ser realizado através da determinação dos parâmetros que definem o sistema. Estes parâmetros são chamados de *variáveis de projeto*. Na maioria dos problemas encontraremos *restrições* impostas para que o *projeto* seja *admissível* ou *viável*, devido às leis físicas da natureza, leis políticas, limitações de orçamento, etc.

A PM é a disciplina que estuda a minimização de funções em problemas com ou sem restrições. Matematicamente, estes problemas são enunciados como:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{b}) && \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n \\
 &\text{sujeito a} && c_i(\mathbf{b}) = 0 && i = 1 \dots l \\
 &&& c_i(\mathbf{b}) \leq 0 && i = l + 1 \dots m \\
 &&& b_i^l \leq b_i \leq b_i^u && i = 1 \dots n
 \end{aligned} \tag{B-1}$$

onde  $\mathbf{b}$  é um ponto do  $\mathfrak{R}^n$  sobre o qual são impostos os limites mínimos e máximos (restrições laterais),  $f(\mathbf{b})$  é a função a ser minimizada e as funções  $c_i(\mathbf{b})$  representam as restrições de igualdade e desigualdade. Assume-se que tanto a função objetivo quanto as restrições são funções contínuas no  $\mathfrak{R}^n$ . Em geral, elas são funções não-lineares e implícitas das variáveis ( $\mathbf{b}$ ) que definem o problema.

Um ponto que satisfaça todas as restrições é denominado um *ponto viável* e o conjunto de todos os pontos que satisfaçam todas as restrições é conhecido como *região viável*. Uma restrição de desigualdade define uma fronteira que divide o  $\mathfrak{R}^n$  em uma região viável e outra inviável. Quando um ponto está

sobre esta fronteira, a restrição é dita *ativa*; quando um ponto está no interior da região viável, a restrição está *inativa* e, quando um ponto está fora desta região, a restrição está *violada*.

## B.2

### Condições de Ótimo

A solução  $\mathbf{b}^*$  do problema enunciado em (B-1) tem que necessariamente atender as condições de Kuhn-Tucker enunciadas por:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{b}} \mathcal{L}(\mathbf{b}^*, \boldsymbol{\kappa}^*) &= 0 \\ c_i(\mathbf{b}^*) &= 0 & i = 1 \dots l \\ c_i(\mathbf{b}^*) &\leq 0 & i = l + 1 \dots m \\ \kappa_i^* &\geq 0 & i = l + 1 \dots m \\ \kappa_i^* c_i(\mathbf{b}^*) &= 0 & \forall i \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

onde  $\mathcal{L}(\mathbf{b}^*, \boldsymbol{\kappa}^*)$  é a função Lagrangeana dada pela expressão a seguir:

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}^*, \boldsymbol{\kappa}^*) = f(\mathbf{b}^*) + \sum_{i=1}^l \kappa_i^* c_i(\mathbf{b}^*) \quad (\text{B-3})$$

onde  $\kappa_i^*$  são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições no ponto  $\mathbf{b}^*$ , solução do problema.

As condições de Kuhn-Tucker são também conhecidas como condições de primeira ordem. Para determinadas classes de problemas de programação matemática as condições de Kuhn-Tucker são suficientes para a determinação de uma solução ótima global. São incluídos nessas classes os problemas de programação convexa, tais como os de programação linear e quadrática. O problema de programação convexa é caracterizado por função objetivo e restrições convexas.

Porém, se o problema não é de programação convexa, o que é mais comum, as condições de primeira ordem não são mais suficientes para a determinação da solução ótima global, devendo ser verificada a condição de segunda ordem, expressa na equação (B-4) a seguir

$$\mathbf{d}^t \mathbf{W}^* \mathbf{d} \geq 0, \quad \forall \mathbf{d} \neq 0 \quad \text{tal que} \quad \mathbf{d}^t \mathbf{a}_i^* = 0 \quad (\text{B-4})$$

onde  $\mathbf{a}_i^* = \nabla c_i(\mathbf{b}^*)$  para todas as restrições ativas e  $\mathbf{W}^* = \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{b}^*)$  é a Hessiana da função Lagrangeana. O que significa que  $\mathbf{W}^*$  em  $\mathbf{b}^*$  é positiva definida no ponto ótimo para qualquer direção estacionária  $\mathbf{d}$ .

## B.3

Tipos de Otimização	$f(\mathbf{b})$	$c_i(\mathbf{b})$
Programação Linear	linear	linear
Programação Quadrática	quadrática	linear
Programação Não-Linear	linear / não-linear	não-linear / linear

Tabela B.1: Divisão dos problemas de Programação Matemática.

### Forma Geral dos Algoritmos de Otimização

Para resolver um problema de otimização, além dos algoritmos ditos evolucionários, existem diversos algoritmos de programação matemática que são definidos de acordo com as características da função-objetivo e das restrições. Assim, os problemas de otimização podem se dividir em diferentes formas, como mostra a tabela (B.1).

Algoritmos de otimização para problema de programação linear e programação quadrática têm solução em um número finito de passos, já os algoritmos de programação não-linear podem não ter solução em um número finito de passos, mas espera-se que a seqüência gerada convirja (no limite) para um mínimo local. Portanto, um problema adicional no processo de otimização ocorre quando a função objetivo e as restrições são funções não-lineares do vetor de variáveis de projeto,  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$ .

Os algoritmos de programação não-linear, restrita e irrestrita, são procedimentos iterativos em que novos pontos  $\mathbf{b}$  são gerados a partir do ponto corrente  $\mathbf{b}_0$  através da expressão:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + t\mathbf{d} \quad (\text{B-5})$$

Assim, os algoritmos podem ser divididos em duas etapas principais: a primeira etapa é a determinação da direção de busca  $\mathbf{d}$  e a segunda é a avaliação do parâmetro escalar  $t$ , que representa o tamanho do passo a ser dado ao longo da direção de busca. A partir da expressão (B-5) diversos algoritmos podem ser construídos utilizando diferentes técnicas para a determinação da direção de busca e do tamanho do passo.

Os algoritmos de PM podem ser classificados de acordo com a ordem da derivação da função objetivo e das restrições utilizadas para a determinação da direção de busca. Desta forma, um algoritmo é dito de primeira ordem se utilizar apenas os gradientes da função objetivo e das restrições para calcular a direção de busca. Por outro lado, se o algoritmo utiliza informações sobre as Hessianas destas funções, então ele é dito de segunda ordem.

## B.4

### Método de Newton para Problemas de Otimização sem Restrição

O método de Newton utiliza a informação de segunda ordem da função a otimizar. Assim, a sua convergência é quadrática. Com tal propósito a função  $f(\mathbf{b})$  é expandida até a segunda ordem, ou seja, a expansão de Taylor em torno do ponto  $\mathbf{b}_0$  será:

$$f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}_0) + \nabla f(\mathbf{b}_0)(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0)^t \nabla^2 f(\mathbf{b}_0)(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) \quad (\text{B-6})$$

se

$$\mathbf{d} = \Delta \mathbf{b} = (\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{d} + \mathbf{b}_0 \quad (\text{B-7})$$

e

$$\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{b}_0) \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{b}_0) \quad (\text{B-8})$$

Substituindo-se (B-7) e (B-8) em (B-6), tem-se:

$$f(\mathbf{d} + \mathbf{b}_0) = f(\mathbf{b}_0) + \mathbf{d}^t \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d} \quad (\text{B-9})$$

onde  $\mathbf{d}$  é o incremento de  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{g}$  é vetor gradiente de  $f$  e  $\mathbf{H}$ , uma matriz simétrica positiva definida, é a hessiana da função  $f$  no ponto  $\mathbf{b}_0$ . A equação (B-9) é uma equação quadrática cuja variável é  $\mathbf{d}$ . Portanto, o algoritmo de otimização procura determinar um  $\mathbf{d}$  tal que  $f(\mathbf{d} + \mathbf{b}_0) < f(\mathbf{b}_0)$  em cada passo, ou seja, uma direção de decréscimo em  $f$ , assim:

$$\min f(\mathbf{d} + \mathbf{b}_0) = \min(\mathbf{d}^t \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d}) \quad (\text{B-10})$$

Escrevendo a condição de otimalidade de (B-10) ( $\nabla_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d} + \mathbf{b}_0) = 0$ ), obtém-se:

$$\mathbf{d} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} \quad (\text{B-11})$$

Assim, (B-11) fornece um mínimo global único para a função aproximadora de  $f$ . Este método necessita da montagem da matriz  $\mathbf{H}$  e conseqüentemente a solução do sistema da eq. (B-11), o que pode demandar um grande esforço computacional, sobretudo em problemas com grande número de variáveis.

Os métodos Quase-Newton surgiram para resolver esse problema sem perder as boas propriedades de convergência do método de Newton. Nesses métodos, uma aproximação da Hessiana (ou de sua inversa) é construída a partir dos valores dos gradientes ao longo das iterações. Esses métodos, dos quais o BFGS (Broyden—Fletcher—Goldfarb—Shanno) é o mais popular, possuem convergência superlinear e são amplamente utilizados em problemas de otimização [33].

**B.5****Busca Linear**

A busca linear é um procedimento adotado tanto nos algoritmos de problemas sem restrição como nos de problemas com restrição. Após a determinação da direção de busca  $\mathbf{d}$  é necessário calcular o tamanho do passo a ser dado nessa direção, a fim de se obter o novo vetor das variáveis de projeto em (B-5). O tamanho do passo é calculado fazendo-se uma minimização da função unidimensional  $p$  definida através da expressão:

$$p(t) = f(\mathbf{b}_0 + t\mathbf{d}) \quad (\text{B-12})$$

A partir desta definição, pode-se verificar que:

$$p(0) = f(\mathbf{b}_0) \quad (\text{B-13})$$

e

$$p'(0) = \frac{f(\mathbf{b})^t}{\partial \mathbf{b}} \frac{df(\mathbf{b})}{dt} \Big|_{t=0} \quad (\text{B-14})$$

onde  $p'$  indica a derivada em relação à  $t$ .

A busca linear pode ser exata ou aproximada, dependendo do método utilizado para a minimização. A busca aproximada é uma forma mais moderna, na qual o objetivo é determinar  $t$  de forma que  $f$  apresente um certo nível de decréscimo, segundo um critério preestabelecido, como:

$$p(t) \leq f(\mathbf{b}_0) + t\gamma \mathbf{d}^t \mathbf{g} \quad , \quad \gamma \in (0, 1) \quad (\text{B-15})$$

De acordo com esta equação, o parâmetro  $\gamma$  controla o tamanho do passo. Assim, um  $\gamma$  pequeno permite a utilização de passos maiores e a utilização de um  $\gamma$  grande força a utilização de passos pequenos.

Uma forma bastante popular de busca linear é fazer uma aproximação quadrática de  $p$  e calcular  $t$  como o mínimo desta aproximação, verificando se a equação (B-15) é satisfeita. Se isto não ocorrer, então a aproximação é atualizada utilizando o novo ponto e o processo é repetido. Uma forma ainda mais simples é o método de Armijo [33, 7], no qual  $t$  é igual ao primeiro número da seqüência  $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ , para o qual  $p(t)$  satisfaz a condição (B-15).

**B.6****Programação Quadrática**

A Programação Quadrática (PQ) tem como objetivo determinar o vetor solução  $\mathbf{b}^*$  do problema colocado na seguinte forma [33, 7, 77]:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \mathbf{g}^t \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^t \mathbf{H} \mathbf{b} \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{a}_i^t \mathbf{b} = b_i \quad i = 1 \dots l \\ & && \mathbf{a}_i^t \mathbf{b} \leq b_i \quad i = l + 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

onde  $\mathbf{a}$  é uma matriz que contém os coeficientes dos gradientes das restrições,  $\mathbf{b}$  é o vetor dos termos independentes das restrições.

Sendo  $\mathbf{H}$  uma matriz positiva definida, o problema quadrático é convexo e pode-se garantir a existência de um único mínimo local.

A solução deste problema pode ser obtida em três etapas bem definidas (Eboli [13] e Parente [58]):

1. As  $l$  restrições de igualdade são eliminadas do problema diminuindo-se o número das variáveis independentes para  $n - l$ , obtendo-se um problema de programação quadrática (reduzida), chamado problema padrão de PQ, só com as restrições de desigualdade.
2. O problema quadrático reduzido é transformado em um Problema Linear Complementar (LCP), que pode ser resolvido através de métodos de pivoteamento como o de Lemke.
3. Recupera-se a solução para o espaço original com o cálculo das variáveis eliminadas na primeira etapa, obtendo-se os valores de  $\mathbf{b}$  e  $\boldsymbol{\kappa}$ .

## B.7

### Algoritmo de Han-Powell - Programação Quadrática Seqüencial

O algoritmo de otimização de Han-Powell proposto por Han em 1976 e 1977 e por Powell em 1978 [13], foi implementado e aplicado a problemas de Engenharia Estrutural no DEC/PUC-Rio por Eboli [13], Parente [58] e Farfán [22]. Este algoritmo utiliza a técnica de Programação Quadrática Seqüencial (SQP) através da resolução de um subproblema quadrático (PQ).

O método de SQP pode ser considerado como o resultado da aplicação do método de Newton à minimização de uma aproximação quadrática da função Lagrangeana do problema. Este método fornece a cada iteração os vetores  $\mathbf{d}$  (correção de  $\mathbf{b}$ ) e  $\Delta \boldsymbol{\kappa}$  (correção dos multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\kappa}$ ), os quais atualizados são aproximadores da solução  $\mathbf{b}^*$  e  $\boldsymbol{\kappa}^*$ . Este fato pode ser demonstrado considerando o problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(\mathbf{b}) \\ & \text{sujeito a} && c_i(\mathbf{b}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

cuja função Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\kappa}) = f(\mathbf{b}) + \sum_i \kappa_i c_i(\mathbf{b}) \quad (\text{B-18})$$

Desenvolvendo  $\nabla\mathcal{L}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\kappa})$  em séries de Taylor em torno de  $(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k)$  até a primeira ordem, obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{L}(\mathbf{b}^k + \mathbf{d}^{k+1}, \boldsymbol{\kappa}^k + \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1}) &= \nabla\mathcal{L}(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k) + \dots \\ &\dots + [\nabla^2\mathcal{L}(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k)] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

Considerando  $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k$  e  $\Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1} = \boldsymbol{\kappa}^{k+1} - \boldsymbol{\kappa}^k$  e aplicando a condição de estacionariedade a (B-19) no ponto  $(\mathbf{b}^k + \mathbf{d}^{k+1}, \boldsymbol{\kappa}^k + \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1})$ , resulta:

$$[\nabla^2\mathcal{L}(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k)] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\nabla\mathcal{L}(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\kappa}^k) \quad (\text{B-20})$$

ou, expresso matricialmente, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^k & \mathbf{A}^{k^t} \\ \mathbf{A}^k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^k + \mathbf{A}^k \boldsymbol{\kappa}^k \\ \mathbf{c}^k \end{Bmatrix} \quad (\text{B-21})$$

Substituindo  $\boldsymbol{\kappa}^{k+1}$  por  $\boldsymbol{\kappa}^k + \Delta\boldsymbol{\kappa}^{k+1}$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^k & \mathbf{A}^{k^t} \\ \mathbf{A}^k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \boldsymbol{\kappa}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^k \\ \mathbf{c}^k \end{Bmatrix} \quad (\text{B-22})$$

onde,  $\mathbf{A}^k$  é a matriz dos gradientes das restrições,  $\mathbf{W}^k$  é a Hessiana da Lagrangeana, e  $\mathbf{g}^k$  é o gradiente de  $f(\mathbf{b})$  sendo todos avaliados no ponto  $\mathbf{b}^k$ . A solução de (B-22) equivale à solução do subproblema de PQ [13]:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \mathbf{g}^{k^t} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{W}^k \mathbf{d} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{c}^k + \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{d} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B-23})$$

Ou seja, cada iteração  $k$  da solução do problema original é aproximada pela solução do PQ obtido pela linearização das restrições e pela expansão quadrática de  $f$  em torno de  $\mathbf{b}_0$ .

Em problemas em que todas as restrições são de igualdade, a direção de busca e os multiplicadores de Lagrange podem ser obtidos pela solução do sistema de equações lineares gerado pelo método de Newton aplicado a Lagrangeana do problema, como mostrado em (B-22).

Para considerar o caso de restrições de desigualdade, pode-se resolver o problema geral de PM da seguinte forma [13]:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(\mathbf{b}) \\ \text{sujeito a} \quad & c_i(\mathbf{b}) = 0 \quad i = 1 \dots l \\ & c_i(\mathbf{b}) \leq 0 \quad i = l + 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-24})$$

definindo uma direção de busca  $\mathbf{d}$  e uma nova estimativa dos multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\kappa}$  através da solução do PQ:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \mathbf{g}^{k^t} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{W}^k \mathbf{d} \\ & \text{sujeito a} \quad c_i^k + \mathbf{a}_i^{k^t} \mathbf{d} = 0 \quad i = 1 \dots l \\ & \quad \quad \quad c_i^k + \mathbf{a}_i^{k^t} \mathbf{d} \leq 0 \quad i = l + 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-25})$$

cujos método de solução foi visto na seção anterior.

### B.7.1

#### Etapas do Algoritmo Não-Linear Han-Powell (SQP)

As etapas que formam o algoritmo Han-Powell são [58]:

1. Dado um ponto inicial  $\mathbf{b}_0$  e uma aproximação da Hessiana da função Lagrangeana  $\mathbf{B}_0$ , fazer  $k = 0$ .  $\mathbf{B}_0$  é dada pela seguinte função:

$$\mathbf{B}_0 = b_0 \mathbf{I} \quad (\text{B-26})$$

onde  $b_0$  é um parâmetro definido pelo usuário do algoritmo. O número de reinícios da matriz  $\mathbf{B}$  é controlado pelo parâmetro  $n_r$  definido pelo usuário. Segundo Parente [58], o reinício de  $\mathbf{B}$  serve para descartar a influência de pontos muito distantes do ponto corrente.

2. Para  $k = k + 1$ , montar e resolver o problema de programação quadrática definido pela equação (B-25) determinando os vetores  $\mathbf{d}^k$  e  $\boldsymbol{\kappa}^k$ :

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \mathbf{g}^{k-1^t} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{k-1} \mathbf{d} \quad \mathbf{d} \in \Re^n \\ & \text{sujeito a} \quad c_i^{k-1} + \mathbf{a}_i^{k-1^t} \mathbf{d} = 0 \quad i = 1 \dots l \\ & \quad \quad \quad c_i^{k-1} + \mathbf{a}_i^{k-1^t} \mathbf{d} \leq 0 \quad i = l + 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-27})$$

onde  $c_i^{k-1}$  é o vetor com as restrições,  $\mathbf{a}_i^{k-1^t}$  é uma matriz com o gradiente das restrições e  $\mathbf{B}^{k-1}$  é uma aproximação da Hessiana no ponto  $\mathbf{b}^{k-1}$ .

3. Verificar os critérios de convergência do algoritmo:

$$\begin{cases} |\mathbf{g}^{k-1^t} \mathbf{d}^k| \leq tol_1 \\ \max(c_i^k) \leq tol_2 \end{cases} \quad (\text{B-28})$$

onde o primeiro critério representa a variação da função objetivo na direção  $\mathbf{d}^k$  e o segundo critério verifica explicitamente o valor da restrição mais violada.

Verificar também os critérios de parada tais como: número de avaliações da função objetivo e número de iterações.

4. Se os critérios de convergência e/ou os de parada não são atendidos, faz-se então uma busca linear unidimensional para determinar o tamanho do passo  $t^k$ , na direção  $\mathbf{d}^k$  de forma que o novo estimador da solução



$\mathbf{b}^k = \mathbf{b}^{k-1} + t^k \mathbf{d}^k$  seja um ponto que contribua para o decréscimo da função objetivo. A busca é feita sobre a função de penalidade ( $p$ ), construída no intuito de impor um alto custo à violação das restrições. Esta função é definida pela expressão:

$$p(t) = p(\mathbf{b} + t\mathbf{d}) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^l r_i |c_i(\mathbf{b})| + \sum_{i=l+1}^m r_i \max [c_i(\mathbf{b}), 0] \quad (\text{B-29})$$

onde os  $r_i$  são os fatores de penalidades. A busca é aproximada, isto é a solução  $t^*$  não é o mínimo de  $p(t)$ , mas atende a um certo decréscimo pré-estipulado em  $p(t)$  considerado satisfatório. O coeficiente de decréscimo da função é dado pelo parâmetro  $\gamma$  definido pelo usuário.

5. Atualização da matriz  $\mathbf{B}^k$  do subproblema quadrático através do método BFGS.
6. Retorno à etapa 2.

## B.8

### Método dos Pontos Interiores

O algoritmo de Pontos Interiores (IP), desenvolvido por Herskovitz [33], foi implementado e aplicado a problemas de Engenharia Estrutural no DEC/PUC-Rio por Parente [58].

O algoritmo utilizado neste trabalho baseia-se na aplicação do método de Newton para a solução do sistema de equações não-lineares obtidas a partir da aplicação das condições de Kuhn-Tucker do problema de otimização [33]. Neste trabalho, apenas o algoritmo para restrições de desigualdade será discutido, uma vez que os problemas de projeto ótimo a serem resolvidos não possuem restrições de igualdade. No entanto, as mesmas idéias aqui apresentadas também são válidas para os problemas que possuem simultaneamente restrições de igualdade e de desigualdade e podem ser vistas em mais detalhes em (Herskovitz [33]; Herskovitz & Santos [34]).

O método de Pontos Interiores tem como característica gerar uma seqüência de pontos no interior da região viável que converge para a solução do problema. Outra propriedade importante deste algoritmo é que cada um dos pontos intermediários possui valores decrescentes da função objetivo, ou seja, se por algum motivo a convergência não for alcançada o ponto final é sempre viável e melhor que os anteriores.

Considere o problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(\mathbf{b}) \\ & \text{sujeito a } c_i(\mathbf{b}) \leq 0 \quad i = 1 \dots m \end{aligned} \quad (\text{B-30})$$

cujas condições de Kuhn-Tucker são:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^m \kappa_i \mathbf{a}_i &= 0 \\ \kappa_i^* c_i(\mathbf{b}^*) &= 0 \\ c_i(\mathbf{b}^*) &\leq 0 \\ \kappa_i^* &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B-31})$$

Sendo  $\mathbf{A}$  a matriz dos gradientes das restrições e  $\mathbf{C}$  uma matriz diagonal contendo os valores das restrições, as duas primeiras equações podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} + \mathbf{A}^t \boldsymbol{\kappa} &= 0 \\ \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-32})$$

Aplicando o método de Newton para resolver o problema acima, obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{A}^t \\ \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \boldsymbol{\kappa}_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B-33})$$

Na equação acima,  $\boldsymbol{\Lambda}$  é uma matriz diagonal para a qual  $\boldsymbol{\Lambda}_{ii} = \kappa_i$ ,  $\mathbf{d}_0$  é a direção de busca e  $\boldsymbol{\kappa}_0$  é a estimativa dos multiplicadores de Lagrange. Pode-se demonstrar que  $\mathbf{d}_0$  é uma direção de decréscimo de  $f$  e que  $\mathbf{d}_0 = 0$  se  $\mathbf{b}$  for um ponto estacionário [58].

A direção de busca fornecida por (B-33) nem sempre é uma direção viável. Expandindo-se uma equação da parte inferior do sistema (B-33), chega-se a:

$$\kappa_i \mathbf{a}_i^t \mathbf{d}_0 + c_i \kappa_0 = 0 \quad (\text{B-34})$$

Esta equação implica que  $\mathbf{a}_i^t \mathbf{d}_0 = 0$  para todo  $i$  tal que  $c_i = 0$ . Geometricamente, isto significa que  $\mathbf{d}_0$  é tangente às restrições ativas, indicando que a direção aponta para fora da região viável.

Uma solução para evitar este efeito é adicionar uma constante negativa do lado direito da equação acima:

$$\kappa_i \mathbf{a}_i^t \mathbf{d} + c_i \bar{\kappa}_i = -\rho \kappa_i \quad (\text{B-35})$$

onde  $\bar{\kappa}_i$  é a nova estimativa de  $\kappa_i$ .

Este procedimento faz com que a direção original seja defletida, de um valor proporcional a  $\rho$ , para o interior da região viável. Como a deflexão é proporcional a  $\rho$  e  $\mathbf{d}_0$  é uma direção de decréscimo de  $f$ , é possível encontrar limites em  $\rho$  para que  $\mathbf{d}$  também seja uma direção de decréscimo. Este objetivo pode ser atingido impondo-se que:

$$\mathbf{g}^t \mathbf{d} \leq k_a \mathbf{g}^t \mathbf{d}_0 \quad (\text{B-36})$$

para  $k_a \in (0; 1)$ . Em geral, a taxa de decréscimo de  $f$  ao longo de  $\mathbf{d}$  é menor que ao longo de  $\mathbf{d}_0$ . No entanto, este é o preço a ser pago para se obter uma direção de decréscimo viável.

Considerando o sistema auxiliar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{A}^t \\ \Lambda \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (\text{B-37})$$

é fácil mostrar que:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \rho \mathbf{d}_1 \quad (\text{B-38})$$

e

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa}_0 + \rho \boldsymbol{\kappa}_1 \quad (\text{B-39})$$

Substituindo (B-38) em (B-36) chega-se a:

$$\rho \leq (k_a - 1) \frac{\mathbf{g}^t \mathbf{d}_0}{\mathbf{g}^t \mathbf{d}_1} \quad (\text{B-40})$$

Definida a direção de busca  $\mathbf{d}$ , é necessário realizar uma busca linear restrita ao longo dessa direção, de forma a garantir que o ponto gerado esteja no interior da região viável. Além disso, é necessário atualizar os valores dos multiplicadores de Lagrange de maneira a assegurar a convergência para a solução correta.

### B.8.1

#### Etapas do Algoritmo de Pontos Interiores (IP)

O algoritmo de Pontos Interiores para problemas de restrições de desigualdade necessita de um ponto inicial viável  $\mathbf{b}_0$ , uma estimativa para os multiplicadores de Lagrange de forma que  $\kappa_i > 0$  e uma matriz  $\mathbf{B}$  simétrica e positiva definida, que é uma aproximação de  $\mathbf{W}$ . O algoritmo pode ser dividido nos seguintes passos [34]:

1. Obter a direção de busca  $\mathbf{d}$ :
  - (a) Determinar os vetores  $(\mathbf{d}_0, \boldsymbol{\kappa}_0)$  através da solução do sistema linear definido em (B-33).
  - (b) Verificar o critério de convergência:

$$\|\mathbf{d}\| \leq tol_3 \quad (\text{B-41})$$

- (c) Determinar os vetores  $(\mathbf{d}_1, \boldsymbol{\kappa}_1)$  através da solução do sistema linear definido em (B-37).

(d) Calcular o valor de  $\rho$ :

$$\begin{cases} \text{se } \mathbf{g}^t \mathbf{d}_1 > 0, \text{ então} & \rho = \min[k_f \|\mathbf{d}_0\|^2, (k_a - 1) \mathbf{g}^t \mathbf{d}_0 / \mathbf{g}^t \mathbf{d}_1] \\ \text{se } \mathbf{g}^t \mathbf{d}_1 \leq 0, \text{ então} & \rho = k_f \|\mathbf{d}_0\|^2 \end{cases} \quad (\text{B-42})$$

sendo  $k_f > 0$ .

(e) Calcular a direção de busca  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \rho \mathbf{d}_1 \quad (\text{B-43})$$

e

$$\bar{\kappa} = \kappa_0 + \rho \kappa_1 \quad (\text{B-44})$$

2. Fazer uma busca linear sobre  $\mathbf{d}$ , determinando o tamanho do passo  $t$  que satisfaça um critério sobre o decréscimo da função objetivo e para o qual:

$$\begin{cases} c_i(\mathbf{b} + t\mathbf{d}) \leq 0, & \text{se } \bar{\kappa}_i \geq 0 \\ c_i(\mathbf{b} + t\mathbf{d}) \leq c_i(\mathbf{b}), & \bar{\kappa}_i < 0 \end{cases} \quad (\text{B-45})$$

e o novo ponto  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + t\mathbf{d} \quad (\text{B-46})$$

3. Atualizar a matriz  $\mathbf{B}$ , que é uma aproximação da Hessiana da função Lagrangeana, através do método BFGS.

4. Definir uma nova estimativa para os multiplicadores de Lagrange:

$$\kappa_i = \max[\kappa_{0i}, k_e \|\mathbf{d}_0\|^2] \quad (\text{B-47})$$

sendo  $k_e > 0$ .

5. Fazer  $\mathbf{b}$  igual a  $\mathbf{b}_0$  e retornar ao passo 1.

A aproximação inicial e o reinício da Hessiana da função Lagrangeana são controlados pelos mesmos parâmetros utilizados pelo algoritmo de Programação Quadrática Sequencial.

## B.9

### Algoritmos de Otimização para Análise de Confiabilidade

Vários algoritmos de otimização, além dos já vistos SQP e IP, podem ser usados no solução do problema de confiabilidade estrutural (apresentado no capítulo 4). O esforço principal nos métodos de análise de confiabilidade está em achar o ponto de distância mínima da superfície de falha à origem. O mesmo é formulado como um problema de otimização restringida e pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && F(\mathbf{u}) \\ &\text{sujeito a} && G(\mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \tag{B-48}$$

onde  $F(\mathbf{u}) = 1/2\mathbf{u}^T\mathbf{u}$  é a função objetivo e  $G(\mathbf{u})$  é a função de estado limite no espaço normal padrão. Assume-se que a restrição  $G(\mathbf{u}) = 0$  é contínua e diferenciável.

Em Liu & Der Kiureghian [46], Haukaas [31], Haukaas & Der Kiureghian [32] este assunto é abordado em detalhes.

#### B.9.1

##### Algoritmo (Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler) HLRF

Este método, originalmente proposto por Hasofer e Lind [30] para análise de confiabilidade de segundo-momento e depois estendido por Rackwitz e Fiessler [64] para incluir informação de distribuição, é atualmente o método mais usado para resolver o problema de otimização em confiabilidade estrutural.

A equação (B-5) é reescrita aqui para o problema enunciado na eq. (B-48):

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + t_k \mathbf{d}_k \tag{B-49}$$

onde  $t_k = 1$  e  $\mathbf{d}_k$  é calculado da seguinte forma:

$$\mathbf{d}_k = \frac{1}{|\nabla G(\mathbf{u}_k)|^2} [\nabla G(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{u}_k - G(\mathbf{u}_k)] \nabla G(\mathbf{u}_k)^T - \mathbf{u}_k \tag{B-50}$$

##### HLRF com Busca Linear

O método HLRF foi posteriormente aperfeiçoado por Zhang & Der Kiureghian de maneira a executar uma busca linear determinando assim o tamanho do passo a ser utilizado em (B-49). A busca linear pode ser qualquer um dos procedimentos mostrados na seção B.5, Zhang & Der Kiureghian propuseram a seguinte função para a determinação de  $t_k$ :

$$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + c|G(\mathbf{u})| \quad (\text{B-51})$$

onde  $c$  é um parâmetro de penalidade que satisfaz a seguinte equação:

$$c \geq \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\Delta G(\mathbf{u})\|} \quad (\text{B-52})$$

e  $t_k$  é determinado como o mínimo da função unidimensional  $p(t) = p(\mathbf{u}_k + t\mathbf{d}_k)$ .

## **B.10 Implementação**

Os algoritmos IP/SQP foram implementados em linguagem C++ a partir dos códigos utilizados por Parente [58], sendo a maioria das rotinas transcritas de C e outras modificadas de acordo com a adaptação do programa aos demais módulos. Os demais algoritmos estão implementados seguindo a mesma filosofia.