

6

Otimização Baseada em Confiabilidade: Aplicação a Treliças Espaciais

6.1

Considerações Gerais

O desejo de se obter o projeto ideal, considerando aspectos relacionados com o consumo, desempenho ou eficiência, tais como quantidades mínimas de peso, volume ou massa, sempre foi um dos principais objetivos da engenharia estrutural. As técnicas de otimização são ferramentas valiosas na busca desse objetivo.

Um fator impulsionador no campo de otimização foi o desenvolvimento da indústria aeroespacial onde o objetivo principal é se obter estruturas mais leves. Em outras áreas, como a engenharia civil, mecânica e automotiva, o objetivo principal é minimizar o custo da estrutura, embora o peso afete o custo e o comportamento final do projeto.

A otimização de estruturas pode ser dividida em otimização de dimensões, otimização de forma e otimização topológica. O objetivo da otimização topológica é determinar a topologia ótima de uma estrutura através da eliminação de elementos desnecessários e da criação de vazios. Na otimização de forma, busca-se determinar a geometria ótima dos contornos externos e internos de estruturas contínuas e das coordenadas nodais de estruturas reticuladas cujas dimensões e topologia são fixas. A otimização de dimensões tem por objetivo determinar a dimensão (seções transversais, espessuras, etc) de cada componente de uma estrutura para a qual a forma e a topologia são fixas.

Durante o processo de otimização busca-se promover o aumento da eficiência na utilização da estrutura. Uma otimização com base no comportamento linear (geométrico) gera, para um grande número de casos práticos, uma estrutura com sérios problemas de instabilidade, pois a análise fornece uma incorreta capacidade de carga da estrutura. Esses problemas podem ser evitados desde que o modelo de otimização seja formulado com o objetivo de evitar problemas de instabilidade.

A utilização dos tradicionais critérios de projeto, através de coeficientes

parciais de segurança, não permite o conhecimento adequado dos níveis de segurança da estrutura. Fato este de extrema importância, uma vez que nos projetos atuais as estruturas estão cada vez mais esbeltas e complexas, trabalhando sempre próximas de seus limites. Para tratar esses problemas a análise probabilística é incorporada para se diminuir as incertezas na avaliação da segurança da estrutura. Na seção seguinte uma breve explanação com respeito a incorporação das incertezas nos projetos atuais será apresentada.

6.1.1

Consideração da Segurança nos Projetos

Um projeto de estrutura deve atender aos seguintes requisitos, segurança ao colapso, bom comportamento em serviço e economia. Durante séculos os engenheiros têm tentado sem sucesso criar critérios de projeto que conduzam a estruturas que atendam esses requisitos. Essas tentativas passaram por três níveis de evolução [73].

O nível I é o critério de projeto baseado no conceito de tensões admissíveis. Reconhecendo o caráter aleatório das resistências dos materiais de construção e procurando evitar que as resistências sejam ultrapassadas pelas solicitações, o critério recomenda minorar as resistências médias obtidas em ensaio via um coeficiente de segurança. Essa resistência minorada é denominada de resistência admissível e é utilizada para se obter os valores de projeto.

No nível II o critério de projeto passou a considerar duas propriedades estatísticas das resistências dos materiais e das cargas atuantes, nomeadamente, as médias e os desvios padrões. Para as resistências dos materiais, definem-se, uma vez conhecidos a média e os desvios padrões das variáveis, valores característicos que correspondem à probabilidade de 5% do valor da variável ser ultrapassado numa função de densidade de probabilidade normal no sentido mais desfavorável. Para as cargas a definição do valor característico depende do tipo de carga, se carga de peso próprio, variável etc. Esses valores característicos devem então ser majorados ou minorados, ainda no sentido mais desfavorável para o projeto, para se chegar aos valores de projeto que devem ser utilizados para a determinação das variáveis de projeto. Essa metodologia de projeto tem sido denominada de Método Semi-probabilístico.

O nível III difere do nível II apenas na maneira de se determinar o valor característico das variáveis aleatórias. No nível III deve-se usar a função de densidade de probabilidade mais apropriada a cada variável aleatória ao invés de se usar sempre a função de densidade de probabilidade normal para a determinação do valor característico da variável.

Apesar da grande evolução que o nível III representa em relação ao nível I no sentido de conduzir a estruturas mais econômicas e com probabilidades de falha mais próximas das que se deseja, ele não permite que se obtenha uma estrutura com uma determinada probabilidade de falha alvo, previamente definida pelo engenheiro de projeto, nem que se atinja a opção mais econômica de projeto.

Nas últimas décadas, o grande desenvolvimento dos computadores, tanto em termos de crescimento da capacidade de memória como em termos do aumento da velocidade de processamento, permitiu o avanço de diversas áreas do projeto de engenharia como a análise da resposta, a análise de confiabilidade e a otimização de estruturas.

A análise de confiabilidade criou uma ferramenta que possibilita a determinação da probabilidade de falha correspondente a uma dada função de falha para uma estrutura, uma vez que sejam conhecidas as propriedades estatísticas de suas variáveis aleatórias tais como, média, desvio padrão, função de densidade de probabilidade e as correlações entre elas. Essa ferramenta não pode, porém, ser confundida com uma metodologia de projeto já que ela permite apenas uma verificação a posteriori de uma dada estrutura.

Paralelamente ao desenvolvimento de análise de confiabilidade ocorreu um grande progresso na área de programação matemática, tanto do ponto de vista teórico como em termos numéricos com o desenvolvimento de mais poderosos algoritmos de otimização, o que possibilitou um enorme impulso na otimização de estruturas. As primeiras aplicações das técnicas numéricas de otimização de estruturas utilizavam o nível II de segurança para se definir o problema de otimização de estrutura. Isso se deve em grande parte ao fato dessa metodologia ser utilizada por muitas normas de projeto em vários países do mundo, entre eles o Brasil. Como já mencionado anteriormente, essa metodologia não permite, todavia, que se tenha controle sobre a probabilidade de falha da estrutura. Assim, estruturas com uma probabilidade de falha indesejável podem ser obtidas por esse processo.

Nessa etapa o quadro que se tinha era o seguinte. O projeto ótimo pelo nível II não permitia o controle da probabilidade de falha da estrutura e a análise de confiabilidade era uma ferramenta de análise, mas não um método para projeto de estruturas.

A síntese dessas duas técnicas conduziu ao que se chama hoje de Projeto Ótimo de Estruturas Baseado em Confiabilidade (RBDO, Reliability Based Design Optimization, em inglês). Essa metodologia corresponde ao nível IV dos critérios de projeto. Na RBDO a estrutura é otimizada para atingir um valor alvo de probabilidade de falha. Várias funções de falha correspondendo

a estados limites últimos ou de serviço podem ser definidas associadas a diferentes probabilidades de falha. É possível se obter dessa forma estruturas econômicas e com níveis de segurança prefixados. Essa metodologia é chamada de Método Probabilístico Puro.

6.2 Metodologia de Otimização

O problema de otimização, a ser considerado neste trabalho, consiste na minimização do peso da estrutura modelada com elementos de treliça. Podem ser variáveis de projeto as dimensões da seção transversal dos elementos e as coordenadas nodais. Já as variáveis aleatórias podem ser as já definidas como variáveis de projeto, como também as propriedades do material e os carregamentos. Serão consideradas restrições sobre a carga crítica, deslocamentos e tensões.

No tratamento de estruturas que possam apresentar pontos críticos, dois fatores de carga distintos devem ser considerados [58, 59]. O primeiro corresponde à carga total aplicada ($\lambda_a = 1$), onde os deslocamentos devem ser avaliados, e o segundo corresponde à carga crítica (λ^*) da estrutura. Assim, existe a possibilidade da ocorrência de duas situações, conforme ilustrado na figura (6.1).

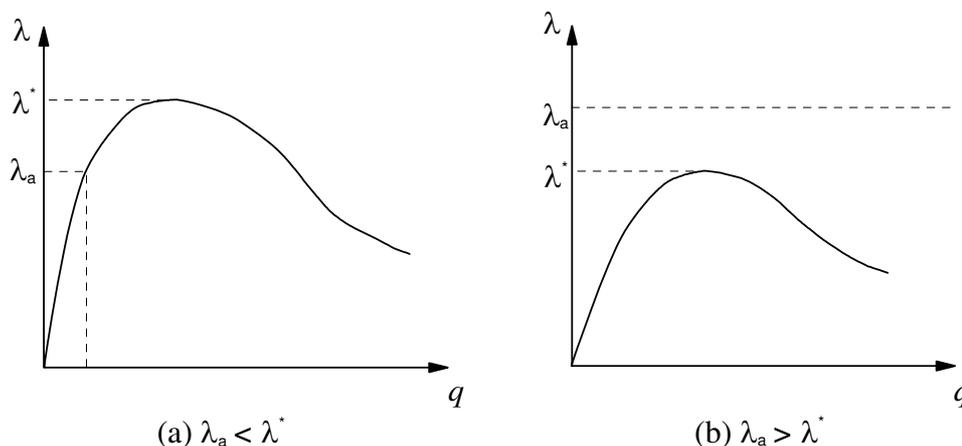


Figura 6.1: Situações encontradas na análise estrutural [58].

Na primeira situação, a carga aplicada é menor que a carga crítica, figura (6.1a). Neste caso, a análise pode ser completada sem problemas. Ao final, as respostas da estrutura e os respectivos gradientes são avaliados.

A outra situação ocorre quando a carga aplicada é superior à carga limite da estrutura, figura (6.1b). Neste caso, a análise não pode ser levada ao fim, pois

a carga aplicada não corresponde a nenhum ponto do caminho de equilíbrio. Portanto, é impossível se determinar os deslocamentos correspondentes ao nível de carga desejado. Como consequência, é impossível avaliar as sensibilidades destas grandezas, e o algoritmo de programação matemática é incapaz de prosseguir. Diferentes procedimentos podem ser utilizados para contornar este problema (Parente [58]; Melo [50]). A idéia é empregar um problema modificado, de maneira a sempre utilizar os deslocamentos avaliados em um nível de carga inferior à carga crítica. Neste trabalho optou-se pela solução adotada em Parente [58], onde sempre que houver risco da carga crítica ficar abaixo da carga aplicada, o uso do algoritmo de pontos interiores se torna mais conveniente.

O algoritmo de pontos interiores gera uma seqüência de pontos no interior da região viável com valores decrescentes da função objetivo. Portanto, a carga crítica de todos os projetos gerados é obrigatoriamente maior que a carga aplicada. A única desvantagem deste algoritmo é a necessidade de gerar um projeto inicial viável. Na maioria das vezes, contudo, este não é um problema sério, pois é simples criar uma estrutura com resistência maior que a necessária.

6.3 Formulação do Problema de Otimização

O problema de RBDO, apresentado no capítulo 5, pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) && \mathbf{h} \in \mathfrak{R}^n \\ &\text{sujeito a} && g_i^R(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \geq 0 && i = 1 \dots l \\ &&& h_i^l \leq h_i \leq h_i^u && i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (6-1)$$

onde \mathbf{h} são as variáveis de projeto e $g_i^R(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ são as restrições probabilísticas. A função objetivo adotada será o volume da estrutura, no caso de estruturas compostas por mais de um material, o volume deverá ser substituído diretamente pelo peso da estrutura.

$$f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = V(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{ne} A_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) l_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \quad (6-2)$$

As restrições probabilísticas exigem a definição de uma função de performance, onde, neste trabalho, podem ser adotadas:

- deslocamento máximo permitido

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 1 - \frac{|q_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{q^a} \quad (6-3)$$

onde q_i é um deslocamento nodal selecionado e q^a é o deslocamento máximo permitido.

- tensão máxima permitida dos elementos / flambagem global da barra

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 1 - \frac{|\sigma_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{\sigma^a} \quad (6-4)$$

onde σ_i é uma tensão axial selecionada e σ^a é a tensão máxima permitida. $\sigma^a = \min[\sigma^0, \sigma^{cr}]$ onde σ^0 é a tensão de escoamento e σ^{cr} é a tensão crítica de Euler, dada pela seguinte expressão:

$$\sigma^{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{Al} \quad (6-5)$$

onde E é o módulo de elasticidade e I_{min} é o momento de inércia mínimo da seção.

- carga crítica global da estrutura

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = \lambda_{cr}(\mathbf{h}, \mathbf{p}) - \lambda^a \quad (6-6)$$

onde λ_{cr} é carga crítica global da estrutura e λ^a representa o limite mínimo para capacidade de carga da estrutura. No caso de $\lambda^a = 1.0$ o carregamento total é considerado.

6.3.1 Fatores de escala

A diversidade de medidas presente no problema de otimização pode acarretar diferenças significativas entre as suas magnitudes e causar problemas na estabilidade numérica do algoritmo de solução. Segundo Haftka & Gürdal [29], o uso de fatores de escala tem o efeito de colocar todas as variáveis de projeto sobre uma mesma base. Isto quer dizer que variações de 1% nestas variáveis tenham aproximadamente o mesmo significado para cada uma delas. Desta forma a variável de projeto, h_i , é definida como a razão entre o valor corrente do parâmetro e o correspondente valor inicial, i. e.,

$$\bar{h}_i = \frac{h_i}{h_i^0} \quad (6-7)$$

O problema de otimização é resolvido então para a variável $\bar{\mathbf{h}}$, e as derivadas da função objetivo e restrições em relação a $\bar{\mathbf{h}}$ são obtida da seguinte forma:

$$\frac{d(.)}{d\bar{h}_i} = \frac{d(.)}{dh_i} \frac{dh_i}{d\bar{h}_i} = \frac{d(.)}{dh_i} h_i^0 \quad (6-8)$$

A função objetivo e as restrições ficam definidas em termos da variável de projeto adimensional, onde a função objetivo é agora a relação entre o volume corrente da estrutura (V) e o volume inicial (V_0):

$$\bar{f} = \frac{V}{V_0} \quad (6-9)$$

6.3.2 Cálculo dos Gradientes

Os algoritmos de programação matemática utilizados neste trabalho precisam dos gradientes da função objetivo e das restrições para a determinação da direção de busca. Assim, derivando-se a equação (6-9), obtém-se o gradiente da função objetivo:

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{h}_i} = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dh_i} \quad (6-10)$$

onde, conforme (6-8), tem-se

$$\frac{dV}{dh_i} = h_i^0 \frac{dV}{dh_i} \quad (6-11)$$

onde $\frac{dV}{dh_i}$ é a sensibilidade do volume da estrutura.

As restrições probabilísticas são formuladas em função do índice de confiabilidade β no caso de se usar o RIA ou através da função de performance g^P para o PMA. Desta forma, obtém-se as seguintes expressões:

$$\frac{d\beta}{d\bar{h}_i} = h_i^0 \frac{d\beta}{dh_i} \quad (6-12)$$

$$\frac{dg^P}{d\bar{h}_i} = h_i^0 \frac{dg^P}{dh_i} \quad (6-13)$$

onde $\frac{d\beta}{dh_i}$ e $\frac{dg^P}{dh_i}$ necessitam da sensibilidade das funções de falha. Partindo-se da equação (6-3), os gradientes podem ser escritos como:

$$\frac{dg}{dh_i} = -\frac{\text{sign}(q_i)}{q^a} \frac{dq_i}{dh_i} \quad (6-14)$$

onde $\text{sign}(\cdot) = \pm 1$ é o sinal da expressão avaliada. A partir de (6-4) e (6-6) chega-se, respectivamente, (6-15) e (6-16):

$$\frac{dg}{dh_i} = -\frac{\text{sign}(\sigma_i)}{\sigma^a} \frac{d\sigma_i}{dh_i} + \frac{|\sigma_i|}{(\sigma^a)^2} \frac{d\sigma^a}{dh_i} \quad (6-15)$$

$$\frac{dg}{dh_i} = \frac{d\lambda_{cr}}{dh_i} \quad (6-16)$$

6.4 Implementação da Formulação

A metodologia de RBDO aqui aplicada é a de duplo laço (loop). Um fluxograma típico desta metodologia é mostrado na figura (6.2). O laço externo é associado com a otimização das variáveis de projeto e o interno com a análise de confiabilidade. Os laços computacionais postos desta maneira solicitam FEA/DSA de maneira intensa, provocando, desta maneira, um grande custo computacional.

O uso da abordagem orientada a objetos aplicada em FEA tem sido difundida por diversos autores nas últimas décadas. Nos problemas de engenharia modelados por elementos finitos pode-se citar Zimmermann & Eyheramendy [86], Eyheramendy & Zimmermann [17, 18, 19], em especial nas áreas de análise não-linear e matemática simbólica. Hsien et. al [72] e Modak [51] apresentaram trabalhos na área de computação paralela, área esta que parece bem promissora.

Diversas bibliotecas de classes de objetos de código livre estão disponíveis para *download* e foram utilizadas como referência para a organização das classes do presente trabalho, entre elas a desenvolvida pela PUC-Rio (FEMOOP [47]), a desenvolvida na Universidade de Berkeley (OpenSees [38]) e a desenvolvida por pesquisadores do *Sandia National Laboratory*, (DAKOTA), descritas a seguir:

- FEMOOP é um programa de análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos que vem sendo desenvolvido no Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio há bastante tempo. Este programa utiliza a filosofia de Programação Orientada a Objetos com o objetivo de facilitar sua expansão e manutenção. O programa contempla diversos modelos de análise (estado plano de tensão, estado plano de deformação, axissimétrico, sólido, etc.) e uma variedade de elementos finitos (T3, T6, Q4, Q8, treliça, pórtico, etc.). Contempla ainda elementos para análise não-linear geométrica, algoritmos para determinação de pontos críticos e procedimentos para cálculo das sensibilidades com relação as coordenadas nodais.
- OpenSees [57] é um código aberto de elementos finitos orientado a objetos escrito em C++, especificamente desenvolvido para a análise de terremotos. É a plataforma computacional oficial da *Pacific Earthquake Engineering Research (PEER) Center*. Recentemente foram incorporados ao código módulos de análise de confiabilidade e sensibilidade desenvolvidos por Haukaas [31].
- DAKOTA (*Design Analysis Kit for Optimization and Terascale Applications*) [12] é um conjunto de ferramentas, desenvolvidas por pesquisadores do *Sandia National Laboratory*, que provêem uma interface flexível e extensível entre os códigos de análise. DAKOTA contém algoritmos para otimização com métodos com gradientes ou sem gradientes; quantificação de incertezas com amostragem, confiabilidade, métodos estocásticos de elementos finitos; entre outros. O código emprega a filosofia orientada a objetos, desenvolvido em linguagem C++, e está disponível para uso de acordo com a licença pública GNU *General Public License* (GPL).

6.5 Exemplos

6.5.1 Treliça de 10 Barras

Este exemplo trata da otimização da treliça de 10 barras apresentada na figura (6.3). A estrutura está sujeita a dois carregamentos não correlacionados, o primeiro $P_1 = 100kN$ aplicado no nó 1 e o segundo $P_2 = 50kN$ aplicado nos nós 2 e 4, conforme apresentado na figura (6.3). Os elementos são feitos de aço com seções transversais de cantoneiras de abas iguais, A resposta estrutural é determinada empregando-se uma análise linear elástica. Os dados utilizados aqui são os mesmos apresentados por Stocki et. al [74] e consistem em 22 variáveis randômicas listadas na tabela (6.1). As seções transversais dos elementos e as coordenadas na direção vertical dos nós 1 ao 4, são também variáveis de projeto Para as seções transversais adotou-se um coeficiente de variação constante igual a 5%, já para as coordenadas, o desvio padrão se manteve constante em 2 cm.

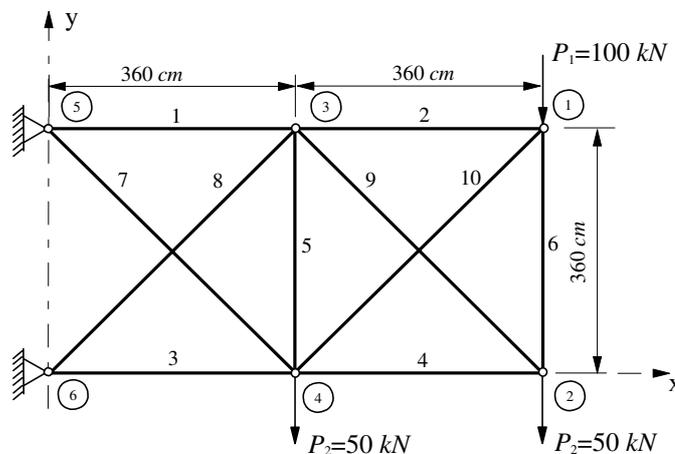


Figura 6.3: Treliça de 10 barras.

Neste problema o volume da estrutura é minimizado sujeito a 11 restrições de confiabilidade correspondentes às seguintes funções de estado limite.

- deslocamento vertical do nó 2 (q_2^2)

$$g_1(\mathbf{q}(\mathbf{h}, \mathbf{p})) = 1 - \frac{|q_2^2(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{q^a} \quad (6-17)$$

onde $q^a = 3.5$ cm.

- tensão máxima permitida/flambagem global dos elementos

$$g_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 1 - \frac{|\sigma_{i-1}(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{\sigma_{i-1}^a(\mathbf{p})} \quad i = 2, \dots, 11, \quad (6-18)$$

onde σ^a , no caso de barras comprimidas, considera a flambagem global da barra (ou local da estrutura). Desta forma, precisa-se do valor do momento de inércia mínimo da seção (I_{min}) para se avaliar a equação (6-5). Foi feita então, uma aproximação de segundo grau dos perfis de cantoneira de abas iguais disponíveis que relaciona I_{min} e A , apresentada na figura (6.4).

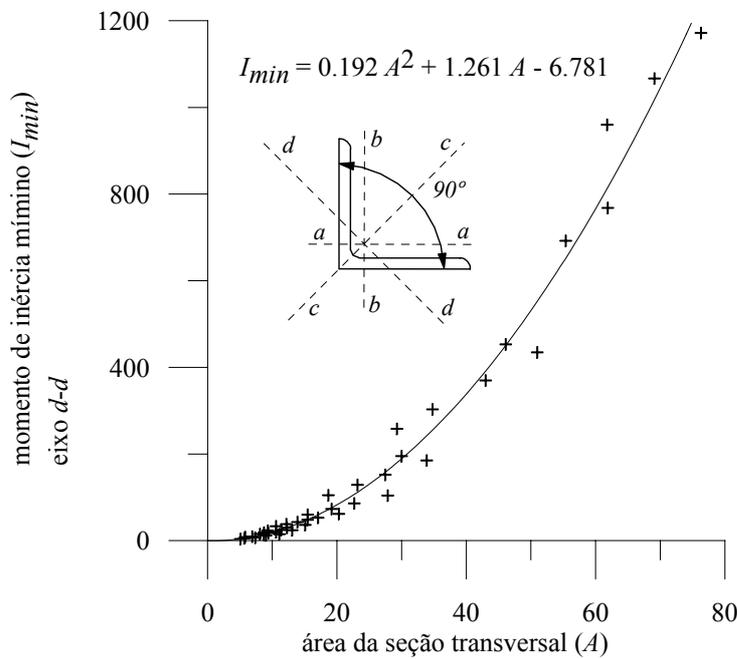


Figura 6.4: Cantoneira de abas iguais - Relação entre a área da seção transversal e o momento mínimo de inércia.

As funções de falha apresentadas em (6-17)-(6-18) definem as restrições de confiabilidade do problema de otimização. Para todas estas restrições o valor alvo β_t foi fixado em 3.7, o que corresponde a uma probabilidade de falha de aproximadamente 10^{-4} . As variáveis de projeto estão sujeitas a restrições laterais definidas no problema de RBDO formulado em (6-19).

X	Descrição	Tipo	Momen.	Valor inicial	h	Pres. trab.	Stocki et. al [74]
X_1	Área da seção - el. 1 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_1)$	20.00	h_1	29.22	28.85
			$\sigma(X_1)$	1.0			
X_2	Área da seção - el. 2 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_2)$	20.00	h_2	13.04	18.57
			$\sigma(X_2)$	1.0			
X_3	Área da seção - el. 3 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_3)$	20.00	h_3	40.34	40.21
			$\sigma(X_3)$	1.0			
X_4	Área da seção - el. 4 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_4)$	20.00	h_4	25.30	16.40
			$\sigma(X_4)$	1.0			
X_5	Área da seção - el. 5 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_5)$	20.00	h_5	5.09	5.09
			$\sigma(X_5)$	1.0			
X_6	Área da seção - el. 6 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_6)$	20.00	h_6	5.09	5.09
			$\sigma(X_6)$	1.0			
X_7	Área da seção - el. 7 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_7)$	20.00	h_7	5.09	6.03
			$\sigma(X_7)$	1.0			
X_8	Área da seção - el. 8 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_8)$	20.00	h_8	24.22	24.60
			$\sigma(X_8)$	1.0			
X_9	Área da seção - el. 9 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_9)$	20.00	h_9	10.70	5.75
			$\sigma(X_9)$	1.0			
X_{10}	Área da seção - el. 10 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_{10})$	20.00	h_{10}	30.41	35.53
			$\sigma(X_{10})$	1.00			
X_{11}	Módulo de elasticidade para todos os elementos	LN	$E(X_{11})$	21000.0			
			$\sigma(X_{11})$	1050.0			
X_{12}	Tensão de escoamento para todos os elementos	LN	$E(X_{12})$	21.0			
			$\sigma(X_{12})$	1.0			
X_{13}	Coordenada x do nó 1	N	$E(X_{13})$	720.0			
			$\sigma(X_{13})$	2.0			
X_{14}	Coordenada y do nó 1	N	$E(X_{14})$	360.0	h_{11}	150.0	150.0
			$\sigma(X_{14})$	2.0			
X_{15}	Coordenada x do nó 2	N	$E(X_{15})$	720.0			
			$\sigma(X_{15})$	2.0			
X_{16}	Coordenada y do nó 2	N	$E(X_{16})$	0.0	h_{12}	98.74	10.1
			$\sigma(X_{16})$	2.0			
X_{17}	Coordenada x do nó 3	N	$E(X_{17})$	360.0			
			$\sigma(X_{17})$	2.0			
X_{18}	Coordenada y do nó 3	N	$E(X_{18})$	360.0	h_{13}	245.83	259.9
			$\sigma(X_{18})$	2.0			
X_{19}	Coordenada x do nó 4	N	$E(X_{19})$	360.0			
			$\sigma(X_{19})$	2.0			
X_{20}	Coordenada y do nó 4	N	$E(X_{20})$	0.0	h_{14}	22.11	35.3
			$\sigma(X_{20})$	2.0			
X_{21}	Carregamento nodal P_1	GU	$E(X_{21})$	100.0			
			$\sigma(X_{21})$	20.0			
X_{22}	Carregamento nodal P_2	LN	$E(X_{22})$	50.0			
			$\sigma(X_{22})$	2.5			

Tabela 6.1: Treliça com 10 barras - variáveis randômicas e de projeto.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } V(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \\
 &\text{sujeito a } \beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 3.7 \quad i = 1, \dots, 11 \\
 &\quad 5.09 \text{ cm}^2 \leq h_k \leq 76.4 \text{ cm}^2 \quad k = 1, \dots, 10 \\
 &\quad 150.0 \text{ cm} \leq h_k \leq 450.0 \text{ cm} \quad k = 11, 13 \\
 &\quad -100.0 \text{ cm} \leq h_k \leq 100.0 \text{ cm} \quad k = 12, 14
 \end{aligned} \tag{6-19}$$

Empregando o algoritmo de programação quadrática seqüencial (SQP) em conjunto com o método PMA sem linearização, o projeto ótimo foi obtido após 18 iterações. O volume inicial de 83929.35 cm³ é reduzido em cerca de 17%, ou seja, para 69988.61 cm³. O resultado apresentado é ligeiramente superior ao obtido em Stocki et. al [74] ($V = 69878.4 \text{ cm}^3$), contudo, fazendo-se uma análise da solução apresentada nesta referência, percebe-se que as restrições associadas as tensões nos elemento 3, 4, 8 e 10, que têm como valores de índices de confiabilidade 3.64, 3.56, 3.56 e 3.64, respectivamente, estão violadas. Estas diferenças podem estar relacionadas à relação entre I_{min} e A já que na referência a mesma não é fornecida. A estrutura obtida ao final do processo de otimização para o presente trabalho e para o apresentado em Stocki et. al [74] podem ser vistas nas figuras (6.5a) e (6.5b), respectivamente, onde as espessuras das linhas representam esquematicamente a magnitude das seções transversais.

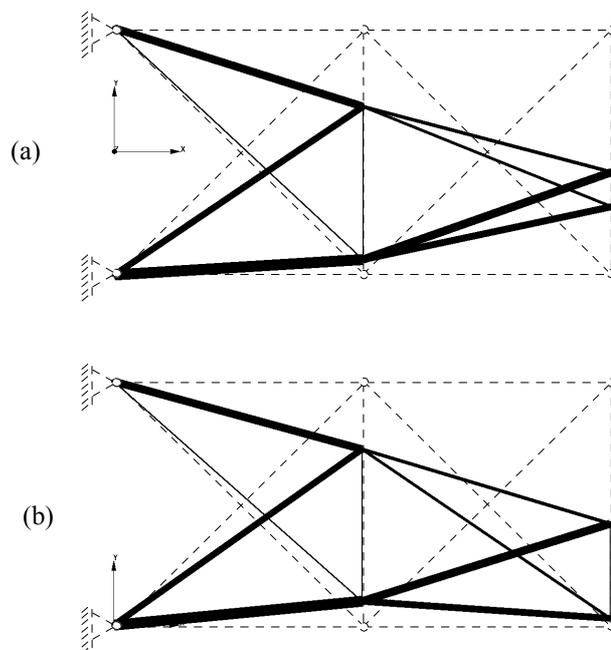


Figura 6.5: Treliça de 10 barras - Projeto ótimo: (a) presente trabalho; (b) Stocki et. al [74].

As figuras mostram estruturas bastante diferentes, entretanto, os volumes são praticamente iguais. Partindo-se da solução fornecida por Stocki et. al [74], obtém-se uma estrutura com pequenas variações nas variáveis de projeto, como já era esperado por haver apenas pequenas violações nas restrições, e com o volume de 70330.13 cm³. Na realidade, variando-se os parâmetros dos algoritmos ou os pontos de partida, diferentes estruturas ótimas podem ser obtidas, indicando que este problema apresenta mais de um mínimo local.

A evolução das restrições, assim como a evolução do volume é apresentada na figura (6.6). É interessante destacar que na solução ótima obtida neste trabalho, apenas as restrições associadas ao deslocamento e as associadas as tensões nos elementos 6 e 7 não estão ativas.

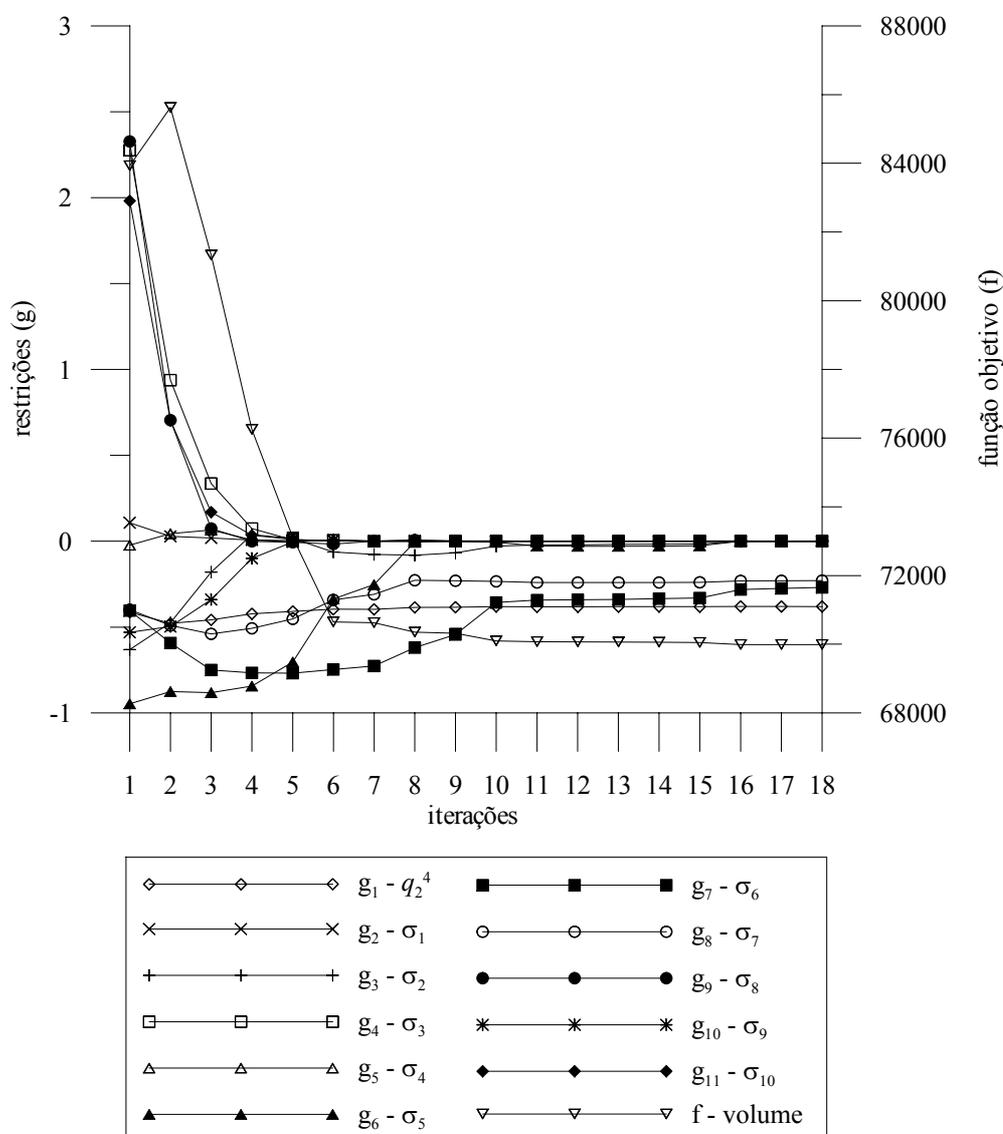


Figura 6.6: Treliça de 10 barras - Restrições e função objetivo ao longo das iterações.

No presente trabalho foram necessárias um total de 18 iterações, 1875 análises e 876 gradientes para obter a convergência. No trabalho de Stocki et. al, no qual foi utilizado o algoritmo NLPQL [53], fornece somente o número total de iterações igual a 33 iterações.

6.5.2 Treliça Espacial de 24 Elementos

Este exemplo trata da otimização de dimensões da treliça apresentada na figura (6.7). O comportamento altamente não-linear deste tipo de estrutura foi estudado na seção (2.7.2). Os dados utilizados aqui são os mesmos apresentados por Stocki et. al [74]. Neste problema o volume da estrutura é minimizado sujeito a 26 restrições de confiabilidade correspondentes as funções de estado limite apresentadas em (6-20), (6-21) e (6-23).

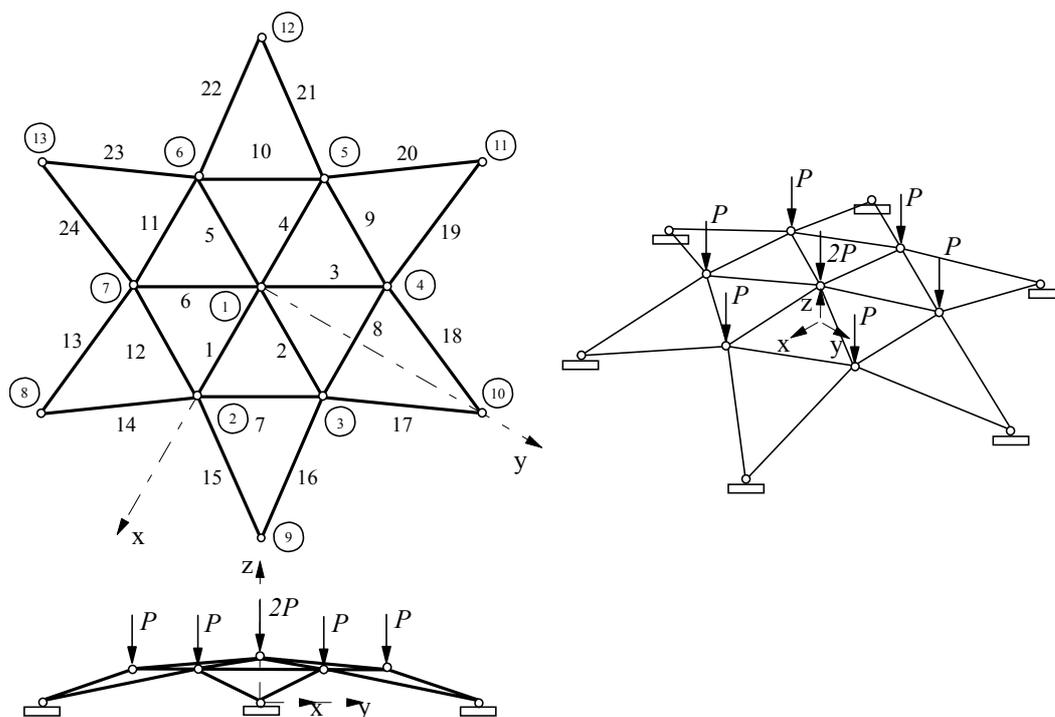


Figura 6.7: Treliça espacial de 24 elementos.

- deslocamento vertical máximo permitido no nó central (q_3^1)

$$g_1(\mathbf{q}(\mathbf{h}, \mathbf{p})) = 1 - \frac{|q_3^1(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{q^a} \quad (6-20)$$

onde $q^a = 3.5$ cm.

- tensão máxima permitida/flambagem global dos elementos

$$g_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 1 - \frac{|\sigma_{i-1}(\mathbf{h}, \mathbf{p})|}{\sigma_{i-1}^a(\mathbf{p})} \quad i = 2, \dots, 25, \quad (6-21)$$

onde a relação entre o momento de inércia mínimo da seção (I_{min}) e a área da seção transversal (A) foi obtida mantendo-se fixa a relação entre o diâmetro externo e o interno dos perfis, desta forma:

$$I_{min}(A) = \frac{\left(\left(\frac{d_e}{d_i} \right)^2 + 1 \right) A^2}{4\pi \left(\left(\frac{d_e}{d_i} \right)^2 - 1 \right)} \quad (6-22)$$

onde d_e e d_i são respectivamente os diâmetros externo e interno do perfil. Neste exemplo, d_e/d_i foi fixado em 1.25.

– carga crítica global

$$g_{26}(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = \lambda_{cr}(\mathbf{h}, \mathbf{p}) - 1 \quad (6-23)$$

onde λ_{cr} neste exemplo é a carga crítica não linear (neste caso a fim de evitar o efeito *snap-through*).

O problema de RBDO é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && V(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \\ &\text{sujeito a} && \beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 3.7 && i = 1, \dots, 25 \\ &&& \beta_{26}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 4.7 && \\ &&& 3.13 \text{ cm}^2 \leq h_k \leq 30.76 \text{ cm}^2 && k = 1, \dots, 10 \end{aligned} \quad (6-24)$$

Empregando o algoritmo de programação quadrática seqüencial (SQP) em conjunto com o método PMA usando a linearização AMV+ no espaço x , o projeto ótimo foi obtido após 6 iterações. O volume inicial de 135936.30 cm³ é reduzido em cerca de 24%, ou seja, para 103667.51 cm³. O resultado apresentado é ligeiramente inferior ao obtido em Stocki et. al [74] ($V = 103710.0$ cm³).

A evolução das restrições, assim como a evolução do volume é apresentada na figura (6.8). É interessante destacar que na solução ótima obtida neste trabalho as restrições associadas aos elementos 13 – 24 e a restrição referente à carga crítica estão ativas, conforme a figura (6.8).

No presente trabalho foram necessárias um total de 6 iterações, 1671 análises e 831 gradientes para obter a convergência. No trabalho de Stocki et.

X	Descrição	Tipo	Momen.	Valor inicial	h	Pres. trab.	Stocki et. al [74]
X_1	Área da seção - el. 1-6 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_1)$	20.00	h_1	19.398	19.371
			$\sigma(X_1)$	1.0			
X_2	Área da seção - el. 7-12 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_2)$	20.00	h_2	13.655	13.712
			$\sigma(X_2)$	1.0			
X_3	Área da seção - el. 13-24 c.o.v. constante: 5%	LN	$E(X_3)$	20.00	h_3	14.239	14.239
			$\sigma(X_3)$	1.0			
X_4	Módulo de elasticidade para todos os elementos	LN	$E(X_4)$	21000.0			
			$\sigma(X_4)$	1050.0			
X_5	Tensão de escoamento para todos os elementos	LN	$E(X_5)$	21.0			
			$\sigma(X_5)$	1.0			
X_6	Coordenada x do nó 1	N	$E(X_6)$	0.0			
			$\sigma(X_6)$	1.0			
X_7	Coordenada y do nó 1	N	$E(X_7)$	0.0			
			$\sigma(X_7)$	1.0			
X_8	Coordenada z do nó 1	N	$E(X_8)$	82.16			
			$\sigma(X_8)$	1.0			
X_9	Coordenada x do nó 2	N	$E(X_9)$	250.0			
			$\sigma(X_9)$	1.0			
X_{10}	Coordenada y do nó 2	N	$E(X_{10})$	0.0			
			$\sigma(X_{10})$	1.0			
X_{11}	Coordenada z do nó 2	N	$E(X_{11})$	62.11			
			$\sigma(X_{11})$	1.0			
X_{12}	Coordenada x do nó 3	N	$E(X_{12})$	125.0			
			$\sigma(X_{12})$	1.0			
X_{13}	Coordenada y do nó 3	N	$E(X_{13})$	216.51			
			$\sigma(X_{13})$	1.0			
X_{14}	Coordenada z do nó 3	N	$E(X_{14})$	62.16			
			$\sigma(X_{14})$	1.0			
X_{15}	Coordenada x do nó 4	N	$E(X_{15})$	-125.0			
			$\sigma(X_{15})$	1.0			
X_{16}	Coordenada y do nó 4	N	$E(X_{16})$	216.51			
			$\sigma(X_{16})$	1.0			
X_{17}	Coordenada z do nó 4	N	$E(X_{17})$	62.16			
			$\sigma(X_{17})$	1.0			
X_{18}	Coordenada x do nó 5	N	$E(X_{18})$	-250.0			
			$\sigma(X_{18})$	1.0			
X_{19}	Coordenada y do nó 5	N	$E(X_{19})$	0.0			
			$\sigma(X_{19})$	1.0			
X_{20}	Coordenada z do nó 5	N	$E(X_{20})$	62.16			
			$\sigma(X_{20})$	1.0			
X_{21}	Coordenada x do nó 6	N	$E(X_{21})$	-125.0			
			$\sigma(X_{21})$	1.0			
X_{22}	Coordenada y do nó 6	N	$E(X_{22})$	-216.51			
			$\sigma(X_{22})$	1.0			
X_{23}	Coordenada z do nó 6	N	$E(X_{23})$	62.16			
			$\sigma(X_{23})$	1.0			
X_{24}	Coordenada x do nó 7	N	$E(X_{24})$	125.0			
			$\sigma(X_{24})$	1.0			
X_{25}	Coordenada y do nó 7	N	$E(X_{25})$	-216.51			
			$\sigma(X_{25})$	1.0			
X_{26}	Coordenada z do nó 7	N	$E(X_{26})$	62.16			
			$\sigma(X_{26})$	1.0			
X_{27}	Carregamento nodal P	GU	$E(X_{27})$	20.0			
			$\sigma(X_{27})$	3.0			

Tabela 6.2: Treliça espacial de 24 elementos - variáveis randômicas e de projeto.

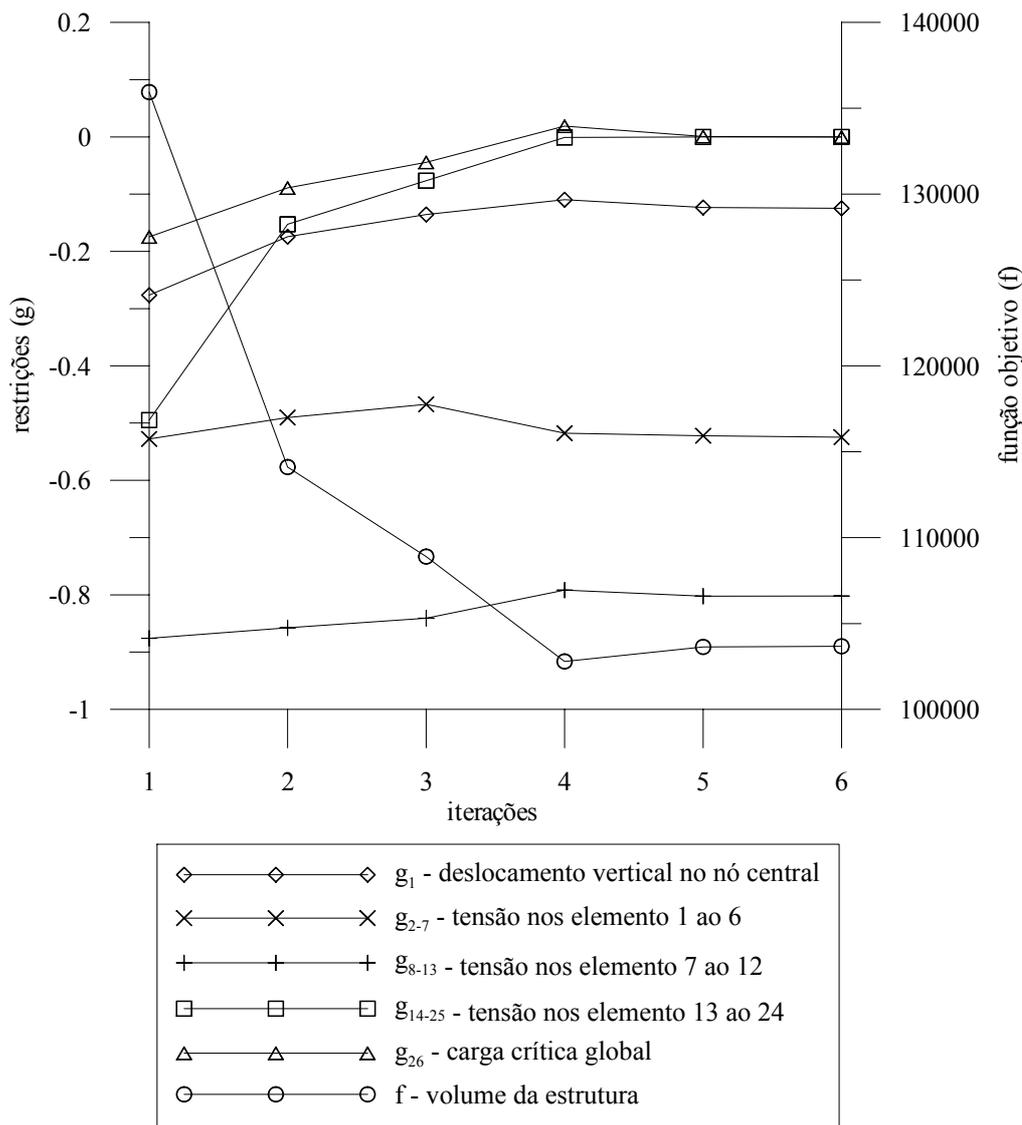


Figura 6.8: Treliça espacial de 24 elementos - Restrições e função objetivo ao longo das iterações.

al, no qual foi utilizado o algoritmo NLPQL [53], fornece somente o número total de iterações igual a 6 iterações.

Na tabela (6.3) são apresentados os resultados da variação do tipo de distribuição da variável X_{27} , que corresponde ao carregamento P , com relação ao volume da estrutura. Para as distribuições apresentadas percebe-se uma diminuição de cerca de 12% no volume ao se utilizar a distribuição Weibull ao invés da Gumbel. Complementando a tabela (6.3), na figura (6.9) são apresentados os valores do volume ótimo alterando-se também o coeficiente de variação da variável X_{27} , c.o.v. $[X_{27}]$. A partir do gráfico pode-se constatar a grande sensibilidade do volume ótimo em relação aos parâmetros da distribuição, principalmente com o aumento do c.o.v. $[X_{27}]$. Reduzindo-se o c.o.v. $[X_{27}]$ os valores do volume ótimo ficam menos sensíveis ao tipo de distribuição, o que já era de se

esperar uma vez que o c.o.v. mede a dispersão dos dados da variável aleatória em torno da média. Quanto mais próximos da média forem os valores menor será a contribuição desta variável na probabilidade de falha, passando a se comportar como determinística.

Dist.	A_1	A_2	A_3	Volume
WB	16.455	11.971	12.839	91405.06
N	16.942	12.253	13.132	93668.28
LN	17.570	12.624	13.487	96517.61
GU	19.398	13.655	14.239	103667.51

Tabela 6.3: Treliça espacial de 24 elementos - Resultados para diversos tipos de distribuição da variável X_{27} .

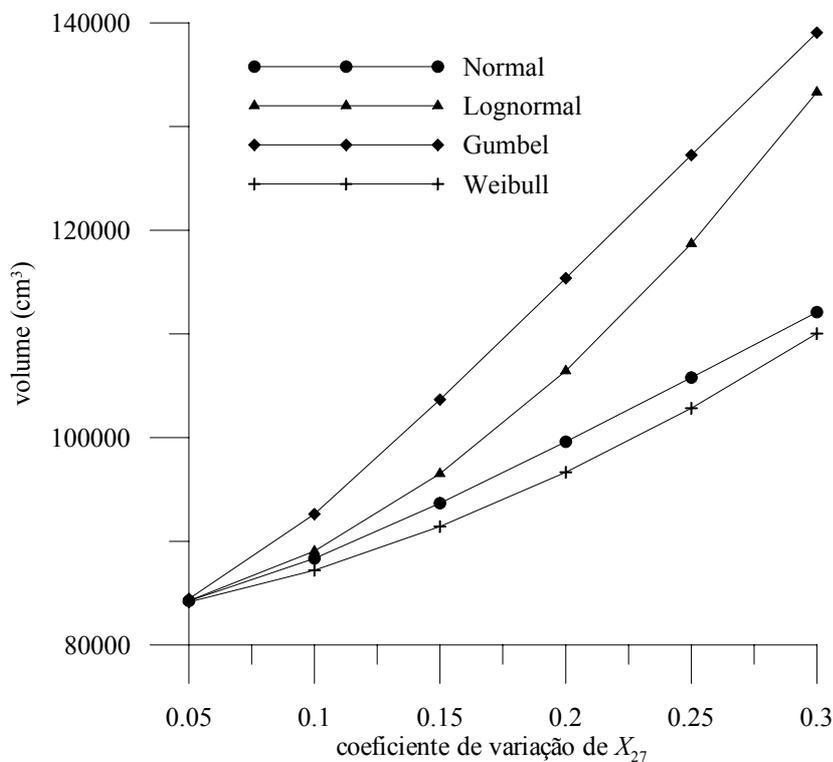


Figura 6.9: Treliça espacial de 24 elementos - Variação do volume em função do tipo de distribuição e do c.o.v. $[X_{27}]$.