

## 5 Otimização Considerando Incertezas

A otimização considerando incertezas pode ser feita objetivando-se diminuir a variabilidade de um certo parâmetro, chamada de projeto robusto, ou garantindo-se a confiabilidade do projeto, chamada de otimização baseada em confiabilidade (RBDO).

No projeto robusto obtém-se uma estrutura menos sensível a variações do sistema. A medida de variabilidade se dá, por exemplo, através do desvio padrão da função de performance e pode ser usada tanto na função objetivo quanto na restrições do problema de otimização.

Otimização baseada em confiabilidade é o foco deste trabalho e será apresentada neste capítulo. RBDO é primeiramente um processo de otimização, onde o objetivo é se otimizar uma função satisfazendo restrições de confiabilidade. As restrições de confiabilidade são restrições sobre a probabilidade de falha do sistema ou de apenas uma simples função. A probabilidade de falha é geralmente avaliada se realizando uma análise de confiabilidade, conforme o capítulo 4.

### 5.1 Otimização Determinística

Um problema de otimização determinística pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \\
 &\text{sujeito a} && c_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = 0 \quad i = 1 \dots nre \\
 &&& c_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \leq 0 \quad i = nre + 1 \dots nr \\
 &&& \mathbf{h}^l \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{h}^u \quad i = 1 \dots nvar
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

onde  $\mathbf{h}$  são as variáveis de projeto e  $\mathbf{p}$  são parâmetros fixos em relação ao problema de otimização.  $c_i$  é a  $i$ -ésima restrição do modelo (como por exemplo: tensões, deslocamentos, carga crítica, etc).  $\mathbf{h}^l$  e  $\mathbf{h}^u$  são os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, respectivamente. Através da definição da função de performance, seção (4.2), pode-se escrever  $c_i(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = -g(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ .

A otimização determinística não considera as incertezas nas variáveis de projeto e nos parâmetros. Projetos ótimos baseados numa formulação

determinística são geralmente associados com uma alta probabilidade de falha. Isto é particularmente verdade se a restrição estiver ativa na solução do problema.

## 5.2

### Otimização Baseada em Confiabilidade

Nas últimas décadas diversos métodos foram propostos de maneira a tratar as incertezas no processo de otimização. Basicamente pode-se dividir os métodos em duas categorias: os de duplo laço e os sequenciais.

## 5.3

### Método de Duplo Laço para RBDO

A formulação mais simples e usual de RBDO é aquela dividida em dois níveis, o primeiro nível seria o do projeto ótimo, onde são consideradas as variáveis de projeto e no segundo nível o processo de análise de confiabilidade, no qual se realiza a busca pelo MPP. Basicamente, neste método, as restrições da formulação determinística são trocadas por restrições de probabilidade, ou seja:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \\ &\text{sujeito a } g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0 \quad i = 1 \dots nr \\ &\quad \mathbf{h}^l \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{h}^u \quad i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (5-2)$$

onde  $g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$  são as restrições de confiabilidade que dependem das variáveis randômicas  $\mathbf{x}$  e dos parâmetros determinísticos  $\boldsymbol{\eta}$ .

As restrições de confiabilidade  $g^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$  podem ser formuladas como:

$$g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = P_{t_i} - P_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}), \quad i = 1 \dots nr \quad (5-3)$$

onde  $P_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$  é a probabilidade de falha da restrição  $g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ , e  $P_{t_i}$  é a probabilidade de falha permitida. A avaliação de  $P_{f_i}$  é feita de acordo com os procedimentos descritos no capítulo 4. Pode-se também escrever as restrições da seguinte maneira:

$$g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \beta_{t_i}, \quad i = 1 \dots nr \quad (5-4)$$

onde  $\beta_i$  é o índice de confiabilidade, definido no capítulo 4 e  $\beta_{t_i} = -\Phi^{-1}(P_{t_i})$ . Quando as restrições são definidas como em (5-3) e (5-4) chama-se esta formulação do índice de confiabilidade (RIA, do inglês *Reliability Index Approach*).

Conforme observado no capítulo 4, a análise de confiabilidade envolve uma transformação probabilística, uma busca pelo MPP, e a avaliação de uma CDF normal padrão. Em alguns casos esse processo não tem sucesso,

o algoritmo falha ao tentar achar a solução, especialmente quando a superfície limite está muito longe da origem no espaço normal padrão ou quando o caso especial de  $G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0$  não exista [27].

De maneira a contornar este problema, Tu et al. [76] propuseram uma outra formulação para resolver o problema de RBDO. Neste método, chamado PMA (*Performance Measure Approach*), as restrições de confiabilidade são formuladas de maneira inversa, ou seja:

$$g_i^R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = g_i^P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = G_i(\mathbf{u}_i^*_{\beta=\beta_{t_i}}, \boldsymbol{\eta}), \quad i = 1 \dots nr \quad (5-5)$$

onde  $\mathbf{u}_i^*_{\beta=\beta_{t_i}}$  é a solução do problema de confiabilidade inverso (IRA, do inglês *Inverse Reliability Analysis*), formulado como o problema de otimização abaixo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } G_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \\ &\text{sujeito a } \|\mathbf{u}\| = \beta_{t_i} \end{aligned} \quad (5-6)$$

Resolver RBDO via PMA é geralmente mais eficiente e robusto do que via RIA. Fato este devido a busca pelo MPP no IRA ser mais fácil [1, 27, 82].

As relações acima pode ser sumarizadas na tabela (5.1).

Formulação	Problema de Otimização	Análise de Confiabilidade
RIA	minimizar $f(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ sujeito a $P_{t_i} - P_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0$ ou $\beta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \beta_{t_i} \geq 0$	minimizar $\ \mathbf{u}\ $ sujeito a $G_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0$
PMA	minimizar $f(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ sujeito a $g_i^P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0$	minimizar $G_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$ sujeito a $\ \mathbf{u}\  = \beta_{t_i}$

Tabela 5.1: RIA vs. PMA (Youn & Choi [82]).

Conforme descrito anteriormente, o processo RBDO é realizado em dois diferentes espaços randômicos: o espaço original  $x$  e o espaço normal padrão não correlacionado  $u$ . Durante o processo RBDO, a transformação entre o espaço  $x$  e  $u$  é efetuada na avaliação da restrição probabilística. Esta transformação, definida na seção 4.1.3, requer as funções de distribuição das variáveis randômicas. A maior parte destas transformações, com exceção das variáveis normais, é altamente não-linear [82]. A tabela (5.2) apresenta as relações entre RIA e PMA do ponto de vista das não-linearidades que podem ser encontradas.

Formulação	Problema de Otimização	Análise de Confiabilidade
RIA	$\beta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = T^{-1}(\beta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}))$ : Transformação não linear inversa de $\beta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$	$G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = G(T(\mathbf{x}), \boldsymbol{\eta})$ Transformação não linear de $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$
PMA	$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ : Função de falha original	$\ \mathbf{u}\ $ Função quadrática explícita em relação a $\mathbf{u}$

Tabela 5.2: Não-linearidades das restrições probabilísticas (Youn & Choi [82]).

Em RBDO, conforme discutido anteriormente, dois problemas de otimização são resolvidos. Em geral, a eficiência dos métodos de otimização depende significativamente da complexidade das restrições envolvidas [82]. No problema formulado via RIA, as restrições nos dois problemas de otimização podem se tornar bastante não-lineares em função das transformações entre os espaços  $u$  e  $x$ . Já para PMA as restrições nos dois problemas de otimização não envolvem transformações não lineares. A função objetivo na avaliação da confiabilidade envolve, entretanto, esta transformação na formulação PMA.

Em resumo, é esperado que o processo RBDO usando RIA com distribuições não normais seja ineficiente e instável em função das não-linearidades envolvidas [82]. Além disso, segundo observado por Youn & Choi [82], PMA é mais eficiente que RIA mesmo para problemas simples com distribuições normais devido a formulação do problema de otimização para a análise de confiabilidade via PMA.

## 5.4

### Linearizações da função de estado limite

As linearizações foram propostas de maneira a se reduzir o custo computacional durante a busca pelo MPP. Elas podem ser empregadas nos métodos RIA/PMA vistos anteriormente. Dentre as opções pode-se citar [14]:

1. expansão de Taylor de primeira ordem em torno da média das variáveis no espaço  $x$  (comumente chamada de AMV, do inglês *Advanced Mean Value*).

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \approx g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) \quad (5-7)$$

2. idêntica a AMV exceto pela linearização que é feita em torno da média das variáveis no espaço  $u$ , lembrando que  $\boldsymbol{\mu}_u = T(\boldsymbol{\mu}_x)$ .

$$G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \approx G(\boldsymbol{\mu}_u, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{u}} G(\boldsymbol{\mu}_u, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_u) \quad (5-8)$$

3. uma linearização inicial em torno da média no espaço  $x$ , com relinearizações sobre cada MPP estimado ( $\mathbf{x}^*$ ) até que o MPP convirja (conhecida como método AMV+).

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \approx g(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (5-9)$$

4. idêntica a AMV+, exceto pelas linearizações que são feitas no espaço  $u$ .

$$G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \approx G(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \quad (5-10)$$

Nos trabalhos de Eldred et al. [15] expansões de Taylor de segunda ordem são apresentadas. A equação abaixo apresenta uma destas expansões (centrada na média no espaço  $x$ ):

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \approx g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T \nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta}) (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) \quad (5-11)$$

Para se usar uma expansão de Taylor de segunda ordem a Hessiana da função de falha ( $\nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\eta})$  ou  $\nabla_{\mathbf{u}}^2 G(\boldsymbol{\mu}_u, \boldsymbol{\eta})$ ) precisa ser calculada. Geralmente a obtenção destas matrizes não é uma tarefa trivial em problemas de engenharia, então, as mesmas podem ser aproximadas através de diferenças finitas ou ainda método Quasi-Newton, como por exemplo o BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). No presente trabalho as linearizações, quando utilizadas, serão apenas as de primeira ordem.

## 5.5

### Ponto Inicial nos Métodos de Busca pelo MPP

Os algoritmos de otimização responsáveis pela busca do MPP necessitam de um valor inicial. A eficiência destes algoritmos está diretamente relacionada a este valor, ou seja, quanto mais próximo da solução for o mesmo mais rapidamente o algoritmo convergirá para a mesma. No método de duplo laço, descrito na seção (5.3), se observa que a cada iteração do laço externo se avaliam as restrições de confiabilidade. Na avaliação das restrições de confiabilidade se resolve também um problema de otimização, seja ele da forma como apresentado em (4-20) ou (5-6), ambos irão precisar de um valor inicial. A fim de se melhorar a eficiência, pode-se utilizar como ponto de partida o MPP calculado na iteração anterior do processo de otimização. Nas linearizações AMV+, apresentadas na seção anterior, esta inicialização só é aplicada na primeira iteração, nas subseqüentes o valor é o próprio MPP da iteração anterior.

## 5.6

### Análise de Sensibilidade em RBDO

As sensibilidades das restrições probabilísticas em relação as variáveis de projeto são necessárias para a solução do problema RBDO por algoritmos de PM de primeira ordem.

A sensibilidade da restrição probabilística formulada via PMA, apresentada em (5-5), em relação as variáveis de projeto  $\mathbf{h}$  é dada da seguinte forma:

$$\frac{dg_i^R(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} = \frac{dg_i^P(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} = \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} \quad (5-12)$$

onde  $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_{i\beta=\beta_{t_i}}^*$ . O vetor de variáveis de projeto  $\mathbf{h}$  pode conter parâmetros determinísticos  $\boldsymbol{\eta}$  ou parâmetros da distribuição  $\boldsymbol{\theta}$ , desta forma uma distinção se faz necessária na avaliação da sensibilidade em (5-12). Em relação as parâmetros  $\boldsymbol{\eta}$  tem-se que:

$$\frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} = \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\boldsymbol{\eta}} \quad (5-13)$$

Para os parâmetros da distribuição  $\boldsymbol{\theta}$  pode-se obter a sensibilidade através da regra de cadeia, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} &= \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{\partial G_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}_i^*}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \nabla_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta}) \frac{\partial T(\mathbf{x}_i^*, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (5-14)$$

onde a parcela  $\nabla_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})$  já é conhecida nesta etapa, oriundo da busca pelo MPP, e a segunda parcela,  $\frac{\partial T(\mathbf{x}_i^*, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ , é determinada de acordo com o apresentado na seção (4.4).

Para a restrição formulada via RIA apresentada em (5-4) a seguinte expressão é utilizada para se avaliar as suas sensibilidades:

$$\frac{dg_i^R(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} = \frac{d\beta_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} = \frac{1}{\|\nabla_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})\|} \frac{dG_i(\mathbf{u}_i^*, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} \quad (5-15)$$

onde  $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_{iG(\mathbf{u})=0}^*$ . Por fim, quando as restrições de confiabilidade são apresentadas em função da probabilidade de falha, conforme (5-3), a seguinte expressão é utilizada para se avaliar as suas sensibilidades:

$$\frac{dP_{f_i}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})}{d\mathbf{h}} = -\varphi(-\beta_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})) \frac{d\beta_i(\mathbf{h}, \mathbf{p})}{d\mathbf{h}} \quad (5-16)$$

## 5.7 Exemplos

Nesta seção são apresentadas as soluções de alguns problemas de RBDO encontrados freqüentemente na literatura. Pretende-se, assim, validar a formulação aqui apresentada e verificar a eficiência dos algoritmos implementados. São consideradas apenas funções explícitas, desta forma as análises aqui envolvidas fazem uso dos módulos de otimização e análise de confiabilidade. No capítulo (6), a seguir, os processos descritos neste capítulo serão aplicados na otimização de estruturas treliçadas, envolvendo, então, os módulos de análise estrutural, apresentado no capítulo (2), e análise de sensibilidade, descrito no capítulo (3).

Os algoritmos IP e SQP, descritos no apêndice (B), fazem uso de diversos parâmetros que influenciam o desempenho de cada algoritmo. Entre os parâmetros numéricos do algoritmo de SQP estão a tolerância para con-

vergência ( $tol_1$ ) e a tolerância para violação de restrições ( $tol_2$ ). O algoritmo possui ainda dois parâmetros adicionais,  $b_z$  e  $g_z$ . Os parâmetros numéricos do algoritmo de IP são a tolerância para convergência ( $tol$ ), os coeficientes de deflexão da direção de busca ( $k_a$  e  $k_f$ ) e o coeficiente para a atualização dos multiplicadores de Lagrange ( $k_e$ ).

Os dois algoritmos utilizam os mesmos procedimentos para a atualização da Hessiana da função Lagrangeana e para a busca linear. Os parâmetros de controle destas etapas são o número de iterações para o reinício da matriz  $\mathbf{B}$  ( $n_r$ ), o valor inicial dos elementos desta matriz ( $b_0$ ), o coeficiente de decréscimo da função objetivo ( $\gamma$ ) e o valor base para a definição da seqüência de valores do tamanho do passo ( $\alpha$ ).

Os valores usuais dos diversos parâmetros são mostrados na tabela (5.3). Nos exemplos apresentados neste capítulo, alguns destes parâmetros foram variados de maneira a melhorar o desempenho dos algoritmos. Quando valores diferentes dos contidos na tabela (5.3) forem utilizados, eles serão explicitamente indicados.

$n_r$	$b_0$	$\gamma$	$\alpha$	$tol_1$	$tol_2$	$b_z$	$g_z$	$tol$	$k_a$	$k_e$	$k_f$
10	1.0	0.1	1.0	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^2$	$10^{-4}$	0.7	1.0	1.0

Tabela 5.3: Valores usuais dos parâmetros dos algoritmos.

### 5.7.1 Coluna Retangular Curta

Este exemplo consiste na análise plástica de uma seção transversal de uma coluna curta (com base  $b$  e altura  $h$ ) tendo como variáveis aleatórias propriedades do material e também o carregamento. O vetor de variáveis randômicas fica definido como  $\mathbf{x} = (P, M, Y)$ , com os parâmetros estocásticos e as correlações definidos na tabela (5.4).

Variável	Dist.	$\mu/\sigma$	$\rho_P$	$\rho_M$	$\rho_Y$
Força Axial ( $P$ )	N	500/100	1	0.5	0
Momento ( $M$ )	N	2000/400	0.5	1	0
Tensão de Escoamento ( $Y$ )	LN	5/0.5	0	0	1

Tabela 5.4: Variáveis aleatórias do problema coluna retangular curta.

A função de estado limite em termos do vetor de variáveis randômicas,  $\mathbf{x} = (P, M, Y)$ , e dos parâmetros,  $\boldsymbol{\eta} = (b, h)$  (neste caso idêntico ao vetor de variáveis de projeto  $\mathbf{h}$ ), é definida como:

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = 1 - \frac{4M}{bh^2Y} - \frac{P^2}{b^2h^2Y^2} \tag{5-17}$$

O objetivo do problema é de se determinar a altura  $h$  e a largura  $b$  da seção transversal a fim de se minimizar o volume da estrutura satisfazendo as restrições. O problema de otimização determinística (DDO), eq. (5-1), fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}) = bh \\ &\text{sujeito a} && g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0 \\ &&& 5.0 \leq b \leq 15.0 \\ &&& 15.0 \leq h \leq 25.0 \end{aligned} \quad (5-18)$$

Considerando-se agora as incertezas apresentadas e fixando-se o valor de  $P_t = 0.00621$  (ou  $\beta_t = 2.5$ ), o problema de RBDO, eq. (5-2), formulado como RIA, fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{h}) = bh \\ &\text{sujeito a} && \beta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - 2.5 \geq 0 \\ &\text{ou} && 0.00621 - P_f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0 \\ &&& 5.0 \leq b \leq 15.0 \\ &&& 15.0 \leq h \leq 25.0 \end{aligned} \quad (5-19)$$

Partindo do ponto inicial  $\mathbf{h}^0 = (b, h) = (10.0, 15.0)$  para as variáveis de projeto e considerando os variáveis aleatórias como determinísticas avaliadas na média, o problema determinístico (5-18) tem como solução  $\mathbf{h}^* = (5.480, 25.000)$ . Para o problema não-determinístico (5-19), usando o mesmo ponto inicial das variáveis de projeto do problema determinístico e considerando o ponto inicial para a avaliação da restrição de confiabilidade como sendo a média ( $\mathbf{x}^0 = (P, M, Y) = (500.0, 2000.0, 5.0)$ ), a solução é a seguinte:  $\mathbf{h}^* = (8.668, 25.000)$  Os resultados obtidos neste trabalho concordam com os obtidos em Kuschel & Rackwitz [42], Agarwal [1] e Eldred et al. [14]. A tabela (5.5) apresenta os resultados obtidos para as diferentes opções de linearizações da função de falha.

Na tabela (5.6) são apresentados os números de avaliações de  $g/\nabla g$  utilizando como ponto inicial para o cálculo da confiabilidade os valores obtidos na iteração anterior do problema de otimização. Também são apresentadas as avaliações tomando-se como ponto de partida das variáveis de projeto os valores ótimos do problema DDO ( $\mathbf{h} = (5.47981, 25.0)$ ) e os obtidos após 5 iterações do método RBDO-RIA-MV ( $\mathbf{h} = (7.90759, 25.0)$ ).

Nas referências consultadas, nem todas as informações relativas aos critérios de convergência, do algoritmo utilizado, entre outras, foram apresentadas. Desta forma a comparação do número de avaliações da função da falha ou iterações não serve como medida de eficiência da implementação. Apesar disto, na tabela (5.7) algum destes valores são apresentados.

Formulação			Avaliações de $g/\nabla g$	Base $b$	Altura $h$	Função objetivo $f$
DDO			11 / 8	5.47981	25.00000	136.99524
RBDO	RIA	MV	32 / 41	7.90759	25.00000	197.68983
		AMV espaço x	42 / 21	7.89580	25.00000	197.39493
		AMV espaço u	45 / 22	7.92688	25.00000	198.17206
		AMV+ espaço x	68 / 63	8.66850	25.00000	216.71245
		AMV+ espaço u sem aproxim.	68 / 63	8.66850	25.00000	216.71245
	PMA	MV	34 / 47	7.90759	25.00000	197.68976
		AMV espaço x	42 / 21	8.59029	25.00000	214.75724
		AMV espaço u	42 / 21	8.61906	25.00000	215.47640
		AMV+ espaço x	72 / 66	8.66850	25.00000	216.71244
		AMV+ espaço u sem aproxim.	84 / 78	8.66850	25.00000	216.71244
			524 / 342	8.66850	25.00000	216.71244

Tabela 5.5: Coluna retangular curta - Resultados.

Formulação			Avaliações de $g/\nabla g$		
			$\mathbf{h}^0 = (10.0, 15.0)$	$\mathbf{h}^0 = (5.480, 25.0)$	$\mathbf{h}^0 = (8.001, 25.0)$
RBDO	RIA	AMV+ espaço x	51 / 46	40(51) / 36(44)	40(56) / 36(58)
		AMV+ espaço u	53 / 48	40(51) / 36(44)	40(56) / 36(58)
		sem aproxim.	41 / 35	37(48) / 30(38)	32(48) / 27(49)
	PMA	AMV+ espaço x	55 / 49	55( 66) / 49( 57)	36( 52) / 32(54)
		AMV+ espaço u	56 / 50	56( 67) / 50( 58)	37( 53) / 33(55)
		sem aproxim.	166 / 99	173(184) / 102(110)	121(137) / 75(97)

Obs.: Os valores entre parênteses são os valores totais, incluindo os necessários para determinar o ponto inicial.

Tabela 5.6: Coluna retangular curta - Resultados para diferentes pontos de partida.

### 5.7.2

#### Viga em Balanço

A viga em balanço apresentada na figura (5.1) é aqui estudada. O objetivo é minimizar o volume, ou equivalentemente a área de seção transversal ( $f = wt$ ).

Duas funções de estado limite são consideradas. A primeira diz respeito à tensão de escoamento no engaste da viga e pode se escrita da seguinte forma:

$$g_S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = R - \frac{600}{wt^2}Y + \frac{600}{w^2t}X \quad (5-20)$$

onde  $w$  e  $t$  são a base e a altura da seção transversal, respectivamente.  $Y$ ,  $X$  e  $R$  são variáveis aleatórias e suas descrições se encontram na tabela (5.8).

A segunda função de falha representa o deslocamento na extremidade livre da viga, ou seja:

$$g_D(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = D_0 - \frac{4L^3}{Ewt} \sqrt{\left(\frac{Y}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{X}{w^2}\right)^2} \quad (5-21)$$

Trabalho	Avaliações de $g/\nabla g$
Kuschel & Rackwitz. [42]-DLM(RIA)	83/56
Agarwal [1]-DLM(PMA)	77/85
Agarwal [1]-Método desacoplado	31/31
Eldred et al. [14]-DLM(RIA/AMV+ espaço x)	72/-
Eldred et al. [14]-DLM(PMA/AMV+ espaço x)	105/-

Tabela 5.7: Coluna retangular curta - Comparação dos resultados.

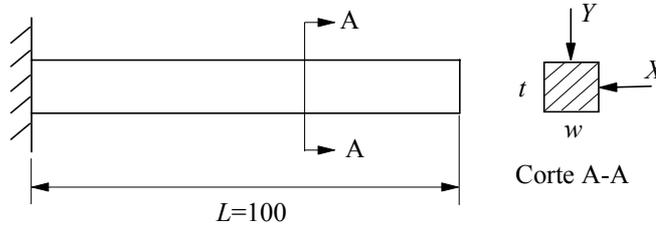


Figura 5.1: Viga em balanço.

Variável	Dist.	$\mu/\sigma$	$\rho_R$	$\rho_E$	$\rho_X$	$\rho_Y$
Tensão de Escoamento ( $R$ )	N	40000/2000	1	0	0	0
Módulo de Elasticidade ( $E$ )	N	$2.9 \times 10^7/1.45 \times 10^5$	0	1	0	0
Carga Vertical ( $X$ )	N	500/100	0	0	1	0
Carga Horizontal ( $Y$ )	N	1000/100	0	0	0	1

Tabela 5.8: Variáveis aleatórias do problema da viga em balanço.

As funções de falha são normalizadas da seguinte maneira:

$$g_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = 1 - \frac{g_S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})}{R} \tag{5-22}$$

$$g_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = 1 - \frac{g_D(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})}{D_0} \tag{5-23}$$

O vetor de variáveis randômicas fica definido como  $\mathbf{x} = (R, E, X, Y)$  e o vetor dos parâmetros  $\mathbf{p} = (L, D_0)$ , onde  $L = 100$  e  $D_0 = 2.2535$ . Por fim o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\eta} = (w, t, L, D_0)$ . O objetivo do problema é de se determinar a base  $w$  e a altura  $t$  da seção transversal a fim de se minimizar o volume da estrutura satisfazendo as restrições. O problema de otimização determinística, eq. (5-1), fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = wt \\ &\text{sujeito a } g_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \leq 0 \\ &\quad g_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \leq 0 \\ &\quad 1.0 \leq w \leq 4.0 \\ &\quad 1.0 \leq t \leq 4.0 \end{aligned} \tag{5-24}$$

No problema de RBDO valor de  $\beta_{t_1} = \beta_{t_2} = 3.0$ . Desta forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = wt \\
 &\text{sujeito a } \beta_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - 3.0 \geq 0 \\
 &\quad \beta_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - 3.0 \geq 0 \\
 &\quad 1.0 \leq w \leq 4.0 \\
 &\quad 1.0 \leq t \leq 4.0
 \end{aligned} \tag{5-25}$$

O problema é resolvido para o ponto inicial (2.5, 2.5), inviável, tanto para o problema DDO quanto para o RBDO, ou seja, o valor da função objetivo é aumentado (acrescentando-se a área) para se atender as restrições. Os resultados obtidos neste trabalho concordam com os obtidos em Yang & Gu [80] e Eldred et al. [14]. A tabela (5.9) apresenta os resultados obtidos para as diferentes opções de linearizações da função de falha.

Formulação			Avaliações de $g^*/\nabla g^*$	Base $w$	Altura $t$	Função objetivo $f$
DDO			18 / 16	2.35203	3.32628	7.82352
RBDO	RIA	MV	320 / 390	2.41949	3.88176	9.39188
		AMV espaço x	156 / 70	2.44621	3.83715	9.38649
		AMV espaço u	156 / 70	2.44621	3.83715	9.38649
		AMV+ espaço x	302 / 272	2.44839	3.88838	9.52025
		AMV+ espaço u	302 / 272	2.44839	3.88838	9.52025
		sem aproxim.	338 / 308	2.44839	3.88838	9.52025
	PMA	MV	276 / 336	2.41949	3.88176	9.39187
		AMV espaço x	96 / 48	2.45839	3.86569	9.50337
		AMV espaço u	96 / 48	2.45839	3.86569	9.50337
		AMV+ espaço x	176 / 162	2.44839	3.88838	9.52025
		AMV+ espaço u	176 / 162	2.44839	3.88838	9.52025
		sem aproxim.	996 / 752	2.44839	3.88838	9.52025
* – referente a soma das avaliações das funções de falha.						

Tabela 5.9: Viga em balanço - Resultados.

Na tabela (5.10) são apresentados os números de avaliações de  $g/\nabla g$  utilizando como ponto inicial para o cálculo da confiabilidade os valores obtidos na iteração anterior do problema de otimização. Também são apresentadas as avaliações tomando-se como ponto de partida das variáveis de projeto os valores ótimos do problema DDO ( $\mathbf{h} = (2.35203, 3.32628)$ ) e os obtidos após 5 iterações do método RBDO-RIA-MV ( $\mathbf{h} = (2.41861, 3.88149)$ ).

Os resultados obtidos nas referências citadas são apresentados, na tabela (5.11).

### 5.7.3 Coluna de Aço

O último exemplo a ser analisado envolve uma comparação entre custo e confiabilidade para uma coluna de aço. O custo é definido como:

$$C = bd + 5h \tag{5-26}$$

Formulação			Avaliações de $g^*/\nabla g^*$		
			$\mathbf{h}^0 = (2.5, 2.5)$	$\mathbf{h}^0 = (2.352, 3.326)$	$\mathbf{h}^0 = (2.419, 3.881)$
RBDO	RIA	AMV+ espaço x	253 / 223	121(139) / 107(123)	73(99) / 65(103)
		AMV+ espaço u	253 / 223	121(139) / 107(123)	73(99) / 65(103)
		sem aproxim.	206 / 176	87(105) / 71( 87)	51(77) / 43(81)
PMA		AMV+ espaço x	136 / 122	144(162) / 128(144)	72( 98) / 64(102)
		AMV+ espaço u	136 / 122	144(162) / 128(144)	72( 98) / 64(102)
		sem aproxim.	428 / 266	444(462) / 270(286)	191(217) / 132(170)

\* – referente a soma das avaliações das funções de falha.  
 Obs.: Os valores entre parênteses são os valores totais, incluindo os necessários para determinar o ponto inicial.

Tabela 5.10: Viga em balanço - Resultados para diferentes pontos de partida.

Trabalho	Avaliações de $g_1 + g_2$	$f$
Yang & Gu [80]-DLM(RIA/sem aproxim.)	1584	9.527
Eldred et al. [14]-DLM(RIA/AMV+ espaço x)	279	9.529
Eldred et al. [14]-DLM(PMA/AMV+ espaço x)	207	9.520

Tabela 5.11: Viga em balanço - Comparação dos resultados.

onde  $b$ ,  $d$  e  $h$  são as médias da largura da mesa, espessura da mesa e altura do perfil, respectivamente. Desta forma o vetor de variáveis de projeto fica definido como:  $\mathbf{h} = (b, d, h)$ . Nove variáveis aleatórias são usadas no problema e seus parâmetros estatísticos são apresentados na tabela (5.12).

Variável	Dist.	$\mu/\sigma$	Unidade
Tensão de Escoamento ( $F_s$ )	LN	400/35	MPa
Carga de peso próprio( $P_1$ )	N	500000/50000	N
Carga Vertical ( $P_2$ )	GU	600000/90000	N
Carga Horizontal ( $P_3$ )	GU	600000/90000	N
Largura da Mesa ( $B$ )	LN	$b/3$	mm
Espessura da Mesa ( $D$ )	LN	$d/2$	mm
Altura do Perfil ( $H$ )	LN	$h/5$	mm
Deslocamento Inicial ( $F_0$ )	N	30/10	mm
Módulo de Elasticidade ( $E$ )	WB	21000/4200	MPa

Tabela 5.12: Coluna de aço - Variáveis aleatórias.

A função de estado limite é a seguinte:

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = F_s - P \left( \frac{1}{\mathcal{A}_s} + \frac{F_0}{\mathcal{M}_s} \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b - \mathcal{P}} \right) \quad (5-27)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s &= 2BD, \text{ (área da seção)} \\ \mathcal{M}_s &= BDH, \text{ (módulo da seção)} \\ \mathcal{M}_i &= \frac{1}{2}BDH^2, \text{ (momento de inércia)} \\ \epsilon_b &= \frac{\pi^2 E \mathcal{M}_i}{s^2}, \text{ (carga crítica de Euler)} \\ \mathcal{P} &= P_1 + P_2 + P_3 \end{aligned}$$

e  $s = 7500 \text{ mm}$  é o comprimento da coluna.

Neste exemplo, diferentemente dos dois anteriores, as variáveis de projeto são parâmetros da distribuição. O objetivo deste problema é maximizar a confiabilidade satisfazendo a restrição de custo, ou seja:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar } \beta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \\
 &\text{sujeito a } C(\mathbf{h}, \mathbf{p}) \leq C^{max} \\
 &200.0 \leq b \leq 400.0 \\
 &10.0 \leq d \leq 30.0 \\
 &100.0 \leq h \leq 500.0
 \end{aligned}
 \tag{5-28}$$

onde  $C^{max}$  é o máximo custo admissível.

Os métodos utilizados foram o SQP para o problema de otimização e o HLRF para o cálculo da confiabilidade. O ponto inicial para o problema de confiabilidade foi vetor das médias, e para o problema de otimização foi  $(b, h, d) = (300.0, 20.0, 300.0)$ , Foi utilizada uma tolerância de  $10^{-6}$  no processo de otimização e  $10^{-4}$  no cálculo da confiabilidade.

Os resultados do problema de otimização para vários custos admissíveis são apresentados na tabela (5.13) e concordam com os apresentados em Kuschel & Rackwitz. [42]. Para o valor de  $C^{max} = 13000.00$ , marcado com um asterisco na tabela (5.13), o algoritmo não conseguiu convergir devido a problemas numéricos (*overflow*) nos cálculos das transformações probabilísticas.

Custo Máximo $C^{max}$	Variáveis ótimas			Índice de confiabilidade $\beta$
	$b$	$d$	$h$	
4000.00	200.00	17.50	100.00	3.132
5000.00	200.00	22.50	100.00	4.961
6000.00	200.00	27.50	100.00	6.369
7000.00	216.67	30.00	100.00	7.427
8000.00	250.00	30.00	100.00	8.249
9000.00	283.33	30.00	100.00	8.967
10000.00	316.67	30.00	100.00	9.605
11000.00	350.00	30.00	100.00	10.180
12000.00	383.33	30.00	100.00	10.709
13000.00*	400.00	30.00	200.00	11.065

Tabela 5.13: Coluna de aço - resultados.

A relação entre o custo máximo e a confiabilidade é apresentada na figura (5.2), onde é interessante destacar o comportamento não-linear da curva apresentada.

Em Eldred & Bichon [16] e Eldred et. al [15] este exemplo é resolvido para o valor de  $C^{max} = 4000$  através do método SORM e, seus resultados são comparados na tabela (5.14).

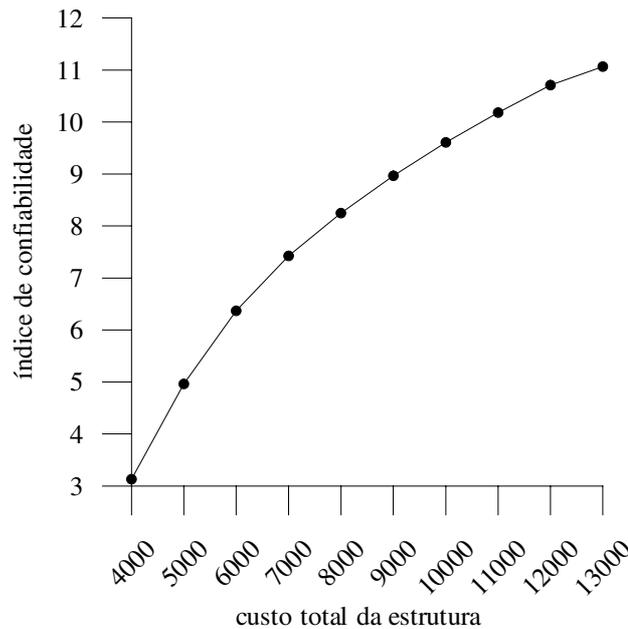


Figura 5.2: Coluna de aço - dependência de  $\beta$  sobre o custo máximo admissível da estrutura [42].

Formulação RBDO	Avaliações de $f/\nabla f$	Função objetivo $f$
Eldred et. al [15] RIA - $\beta$ SORM	90 / 78	3.132
Presente trabalho RIA - $\beta$ sem aproxim.	40 / 34	3.132

Tabela 5.14: Coluna de aço - Comparação dos resultados.

### 5.8 Comentários Sobre os Exemplos

Nos exemplos anteriores pode-se aplicar várias técnicas aqui apresentadas de maneira a se validar as implementações e testar a sua acurácia . As formulações do método de duplo laço, RIA e PMA, e as linearizações MV, AMV e AMV+ no espaço  $x$  e  $u$  podem ser combinadas para se obter a solução do problema. Opções de algoritmos, entre eles o SQP, IP, HLRF e iHLRF, também podem ser usadas como variantes neste processo.

Os três exemplos foram resolvidos com sucesso e várias aspectos puderam ser observados. Os métodos MV e AMV são significativamente menos custosos que os demais, mas conseqüentemente se tem uma redução na precisão se comparando com os métodos AMV+. Os métodos AMV+, comparados com a avaliação sem aproximação, obtiveram a mesma precisão, robustez e uma diminuição no custo computacional. Em suma, as linearizações fornecem a possibilidade de se variar o custo computacional e a precisão. A técnica de se tomar como ponto inicial no cálculo da confiabilidade os últimos valores

calculados se mostrou bastante eficaz na redução do custo computacional.

O método MV no segundo problema teve dificuldades para atingir a precisão e ficou oscilando em torno do ótimo, por este motivo apresentou resultados piores que os do método AMV neste exemplo. Este método é o menos custoso computacionalmente, mas por outro lado, tem-se uma limitação quanto a precisão. Os testes feitos realizando-se as 5 primeiras iterações com MV e em seguida trocando-se para um outro método mais preciso mostrou-se bastante eficaz na redução do número de avaliações das funções e de seu gradiente.

Dentre todas as opções, os métodos AMV+ com utilizando informações das iterações anteriores foram os que apresentaram o melhor resultado.