

## 2

## **Análise Não-Linear Geométrica**

### 2.1

#### **Comentários Iniciais**

Este capítulo começa com uma breve discussão sobre o comportamento não linear, o objetivo da análise não linear, e o seu lugar na engenharia estrutural. As fontes de não linearidade mais importantes no projeto de estruturas reticuladas são listadas e a formulação do problema será definida, onde são apresentados os referenciais Lagrangeanos. Estratégias para a solução numérica de equações não lineares são mostradas, bem como as estratégias de incremento de carga, as estratégias de iteração e os critérios de convergência. O capítulo termina mostrando soluções clássicas existentes de alguns problemas encontrados na literatura.

### 2.2

#### **Comportamento Não-Linear, Análise e Projeto**

O objetivo da análise estrutural é determinar o comportamento da estrutura quando submetida a ações externas, ou seja, obter tensões, deformações e deslocamentos. Baseado nos resultados dessa análise, engenheiros estão aptos a verificar se o projeto proposto possui os requisitos de resistência e bom comportamento em serviço necessários para garantir o funcionamento e segurança da estrutura segundo critérios de projeto predefinidos. Nos capítulos seguintes será visto também que estas análises são empregadas para se verificar as restrições de projeto, no caso de problemas de otimização, e as funções de falha no caso de problemas de confiabilidade. Conseqüentemente, o processo de análise desempenha papel chave e deve ser o mais eficiente e preciso possível.

A maioria das estruturas de engenharia exibem um comportamento próximo ao linear elástico sob cargas de serviço. Existem exceções como arcos e edifícios altos, e estruturas sujeitas a um escoamento localizado prematuro ou fissuração, por exemplo, que, geralmente, apresentam um comportamento não-linear. Antes de alcançar o seu limite de resistência, quase todas essas estruturas vão apresentar uma resposta não-linear significativa. Por esta razão,

a maioria das normas modernas baseadas no modelo de resistência última têm incorporado certas medidas para a consideração da não-linearidade.

Outro fator que deve ser observado é a constante evolução no desenvolvimento de materiais de alta resistência, principalmente em áreas como engenharia aeroespacial, mecânica e também obras civis de grande porte, onde, se obtém estruturas muito esbeltas e conseqüentemente com um acentuado comportamento não linear.

Na análise não-linear tenta-se melhorar a simulação do comportamento de uma estrutura em alguns aspectos. O objetivo fundamental é se obter para fins de projeto uma previsão segura do comportamento do sistema. Como conseqüência, tem-se um aumento da complexidade do problema e conseqüente aumento do custo computacional.

Nas últimas décadas, vêm ganhando cada vez mais destaque os métodos e procedimentos de análise não-linear, em especial de sistemas estruturais reticulados, devido ao fato de oferecerem uma análise rápida e eficaz de muitas estruturas reais, sejam estas de edifícios, aeroespaciais ou *offshore*. Vários pesquisadores têm desenvolvido formulações ou proposições geometricamente não-lineares para elementos finitos com a finalidade de se examinar o comportamento não-linear de estruturas, entre elas as treliças planas e espaciais (Crisfield [11]; Yang & Kuo [79]).

Desde a década de 60 várias formulações geometricamente não-lineares foram introduzidas com soluções diretas e/ou incrementais (Galvão [25, 26]). Um amplo histórico da evolução das metodologias e estratégias de análise não-linear pode ser encontrado no trabalho de Rocha [67], que teve como objetivo principal o estudo e a implementação computacional de algumas estratégias de incremento de carga e de iteração encontradas na literatura para análise do equilíbrio e da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos.

Além das referências supracitadas, merecem destaque, e serviram como base para o desenvolvimento deste trabalho, os trabalhos de Bathe [6], Cook et. al [10], Zienkiewicz [85], entre outros referenciados ao longo do texto.

### 2.2.1

#### Fontes de Não-Linearidade

O comportamento não-linear de uma estrutura, sob ação de um carregamento qualquer, pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade, destacam-se:

**Não-linearidade Física.** Decorre do fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear (não segue a lei de Hooke), isto é, o comportamento do material não é elástico linear. Os efeitos não lineares

são descritos por formas mais complexas de equações constitutivas (matrizes constitutivas não-lineares e/ou equações constitutivas em termos de “taxas” ou “incrementos”). Pode-se ter também não linearidade física nas relações momento-rotação de conexões semi-rígidas ou flexíveis, ou de rótulas inelásticas oriundas de mecanismos de colapso localizados (flambagem, plastificação ou fissuração localizadas em componentes estruturais). O principal problema computacional na análise envolvendo não linearidade física é que as equações de equilíbrio devem ser escritas para a estrutura utilizando propriedades do material que dependem das deformações, as quais, a priori, não são conhecidas.

**Não-Linearidade Geométrica.** Uma estrutura pode ter um comportamento não-linear, ainda que constituída de um material que obedeça à lei de Hooke. Para valores relativamente grandes de deslocamentos, as deformações de um membro podem trazer como conseqüências, o aparecimento de esforços adicionais acompanhados de modificações na rigidez da estrutura (denominados de segunda ordem), sob um certo carregamento aplicado. A esse tipo de comportamento não-linear, dá-se o nome de não-linearidade geométrica. Neste caso os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada, e as relações deformação-deslocamento.

No presente trabalho será considerada somente a não-linearidade geométrica, enquanto a não linearidade física e problemas dependentes do tempo serão inteiramente excluídos.

## 2.3

### Formulação para a Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas

A formulação para a análise não-linear geométrica de estruturas tem seus fundamentos teóricos na teoria da elasticidade não-linear, que faz parte da mecânica dos sólidos. A não-linearidade geométrica aparece, na teoria da elasticidade tanto nas equações de equilíbrio, que são escritas utilizando-se as configurações deformadas do corpo, quanto nas relações deformação-deslocamento, que incluem termos não lineares nos deslocamentos e suas derivadas.

#### 2.3.1

##### Descrição do Problema

Neste trabalho, um procedimento incremental-iterativo será utilizado para traçar o caminho de equilíbrio da estrutura ao longo do tempo.

Tendo-se por base um estado de equilíbrio conhecido, em uma configuração  $t$ , os procedimentos incrementais iterativos procuram determinar o

próximo estado de equilíbrio, em uma nova configuração  $t + \Delta t$ . As equações incrementais de equilíbrio são obtidas a partir de aproximações lineares para os incrementos de deslocamentos e deformações. Portanto, o equilíbrio em  $t + \Delta t$  não é satisfeito exatamente e é necessário utilizar um procedimento iterativo em cada passo de carga. Estes procedimentos serão estudados posteriormente.

Existem duas formas de descrição do movimento de um ponto material  $p$ , a descrição Lagrangeana e a Euleriana [48]. Para a análise de estruturas a formulação Lagrangeana é mais natural, sendo aqui empregada. Na formulação Lagrangeana usa-se as coordenadas de pontos materiais referidas à estrutura indeformada (configuração 0) ou a uma estrutura de referência temporária (configuração  $t$ ). No referencial Lagrangeano Total (RLT), todas as variáveis estáticas e cinemáticas no tempo  $t + \Delta t$  são referidas à configuração inicial (indeformada) da estrutura. Por outro lado, no referencial Lagrangeano Atualizado (RLA), todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à última configuração de equilíbrio da estrutura.

Comumente, as formulações RLT e RLA têm sido usadas na análise incremental não-linear de estruturas. Quando desenvolvidas consistentemente, as duas formulações geram matrizes de rigidez global e vetor de forças idênticos [6]. Ao longo deste trabalho, o RLT será adotado pela simplicidade na aplicação das técnicas de sensibilidade [37], como será visto no capítulo seguinte.

### 2.3.2

#### Princípio dos Deslocamentos Virtuais

As deformações de Green-Lagrange  $\epsilon_{ij}$  são calculadas, a partir do campo de deslocamentos  $\tilde{q}$ , através da expressão:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{q}_{i,j} + \tilde{q}_{j,i} + \tilde{q}_{k,i}\tilde{q}_{k,j}) \quad (2-1)$$

onde  $\tilde{q}_{i,j}$  denota a derivada das componentes  $(u, v, w)$  do campo de deslocamentos em relação às coordenadas cartesianas  $(z_1, z_2, z_3)$ . É importante notar que estas coordenadas dizem respeito à configuração inicial da estrutura.

A expressão dos deslocamentos virtuais para corpos deformáveis é dado por:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_{\Gamma_t} t_i \delta \tilde{q}_i dV + \int_{\Omega} \rho b_i \delta \tilde{q}_i dV \quad (2-2)$$

onde  $\rho b_i$  são as forças de massa atuando no corpo,  $t_i$  é a força de tração atuando na superfície  $\Gamma_t$ .

Com a discretização do campo de deslocamentos pelo método dos elementos finitos, os termos da equação (2-2) podem ser representados por produtos

de matrizes e vetores como segue:

$$\tilde{q}_i = N_{ip}q_p \quad (2-3)$$

Desta forma a discretização espacial da eq. (2-3) aplicada na eq. (2-2) tem como resultado:

$$\int_{\Omega} \sigma_p \underbrace{\bar{B}_{pq} \delta q_q}_{\delta \epsilon_p} dV = \int_{\Gamma_t} t_i N_{iq} \delta q_q dA + \int_{\Omega} \rho b_i N_{iq} \delta q_q dV \quad (2-4)$$

onde  $\sigma_p$  é o tensor de tensões em notação vetorial. Tomando-se um campo de deslocamentos virtuais arbitrários que satisfaça as restrições cinemáticas pode-se escrever a eq. (2-4) como segue:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \sigma_p \bar{B}_{pq} dV}_{F_p} = \underbrace{\int_{\Gamma_t} t_i N_{iq} dA + \int_{\Omega} \rho b_i N_{iq} dV}_{Q_p} \quad (2-5)$$

onde  $F_p$  é o vetor de forças internas e  $Q_p$  é o vetor de forças externas. Matricialmente tem-se

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dA + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} dV \quad (2-6)$$

O vetor de forças internas  $F_p$ , conforme (2-5), depende implicitamente dos deslocamentos através do vetor de tensões  $\sigma_p$  e também da matriz  $\bar{B}_{pq}$  no caso de se considerar o comportamento não-linear geométrico.

Os métodos de solução de equações baseados em iterações de Newton-Raphson precisam, além dos vetores de forças internas e externas, da matriz de rigidez da estrutura. É importante ressaltar que a matriz de rigidez global e os vetores globais de forças internas e externas são montados somando-se as contribuições dos elementos (ver seção (2.3.3)). A matriz de rigidez tangente é determinada através da diferenciação do vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais [85, 6, 11]. Desta forma, pode ser obtida através da definição da  $F_q$  a partir da equação (2-5), onde  $F_p = \int_{\Omega} \sigma_p \bar{B}_{pq} dV$ . Quando não se considera os efeitos da não linearidade geométrica, a tangente da força interna é a seguinte:

$$\begin{aligned} K_{qp}^0 &= \frac{\partial F_p}{\partial q_p} = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial q_p} B_{rq}^0 dV \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} \frac{\partial \epsilon_s}{\partial q_p} B_{rq}^0 dV \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} B_{sp}^0 B_{rq}^0 dV \end{aligned} \quad (2-7)$$

No caso geral a matriz  $\bar{B}$  depende dos deslocamentos, desta forma:

$$\begin{aligned}
K_{qp} = \frac{\partial F_p}{\partial q_p} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial q_p} \bar{B}_{rq} dV + \int_{\Omega} \sigma_r \frac{\bar{B}_{rq}}{q_p} dV \\
&= \int_{\Omega} \bar{B}_{rq} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} \bar{B}_{sp} dV + \int_{\Omega} \sigma_r \frac{\bar{B}_{rq}}{q_p} dV \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} (B_{sp}^0 + B_{sp}^{nl}) (B_{rq}^0 + B_{rq}^{nl}) dV + \int_{\Omega} \sigma_r \frac{\bar{B}_{rq}}{q_p} dV \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} (B_{sp}^0 B_{rq}^0) dV \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \epsilon_s} (B_{sp}^0 B_{rq}^{nl} + B_{sp}^{nl} B_{rq}^0 + B_{sp}^{nl} + B_{rq}^{nl}) dV \\
&\quad + \int_{\Omega} \sigma_r \frac{\bar{B}_{rq}}{q_p} dV \\
&= K_{qp}^0 + K_{qp}^{nl} + K_{qp}^{\sigma}
\end{aligned} \tag{2-8}$$

Na equação 2-8, o termo  $K_{qp}^0$  fornece a matriz de rigidez elástica linear padrão, enquanto que o termo  $K_{qp}^{nl}$  fornece a matriz de rigidez de *deslocamentos iniciais*. Por fim, o termos  $K_{qp}^{\sigma}$  fornece a matriz de rigidez geométrica (ou de tensões iniciais).

### 2.3.3 Montagem das Equações da Estrutura

Um ponto chave no método dos elementos finitos é a avaliação das integrais de volume para se obter a matriz de rigidez e o vetor de forças internas. O domínio do problema estudado é dividido em elementos conectados a nós. As integrais são calculadas para cada elemento e compostas da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\cdot) dV = \bigcup_{el} \int_{\Omega_{el}} (\cdot) dV \tag{2-9}$$

A integral a nível do elemento pode ser feita de várias maneiras. Para um pequeno grupo de elementos, como treliças e vigas, a mesma pode ser avaliada diretamente. Normalmente se usa um método de integração numérica para sua avaliação, por exemplo a quadratura de Gauss. Outra observação a respeito pode ser feita no caso da formulação isoparamétrica, onde as integrais do elemento são feitas num domínio paramétrico.

## 2.4 Aplicação a Elementos de Treliça Espacial

O elemento de treliça adotado é o esquematizado na figura (2.1). Trata-se de um segmento reto, limitado pelos nós  $i$  e  $j$ .

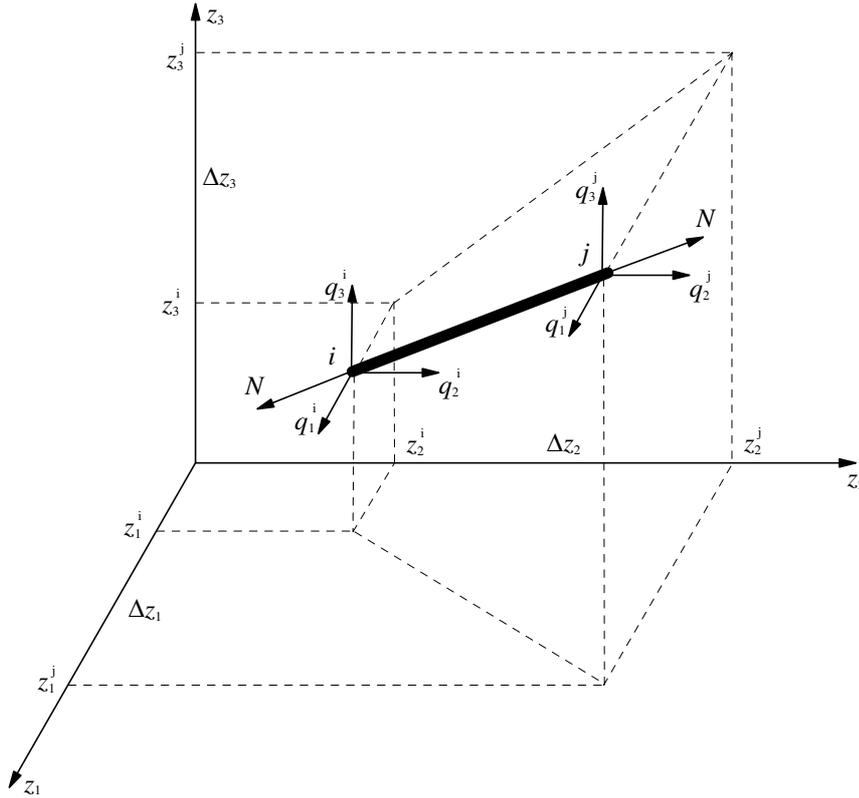


Figura 2.1: Elemento de treliça.

### 2.4.1 Medida de Deformação

Conforme visto na seção (2.3.2) na formulação Lagrangeana Total (RLT) as deformações de Green-Lagrange (GL) e as tensões de Piola-Kirchhoff II (PK2) são frequentemente usadas como medidas conjugadas na formulação da energia interna. A única deformação de Green-Lagrange ( $\epsilon$ ) é na direção axial e pode ser definida em função da mudança do comprimento do elemento da seguinte maneira:

$$\epsilon = \frac{t l^2 - {}^0 l^2}{2 {}^0 l^2} \quad (2-10)$$

onde  ${}^0 l$  é o comprimento do elemento na configuração indeformada,

$$\begin{aligned} {}^0 l &= \sqrt{({}^0 z_1^j - {}^0 z_1^i)^2 + ({}^0 z_2^j - {}^0 z_2^i)^2 + ({}^0 z_3^j - {}^0 z_3^i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta z_1)^2 + (\Delta z_2)^2 + (\Delta z_3)^2} \end{aligned} \quad (2-11)$$

e  ${}^t l$  é o comprimento do elemento na configuração deformada  $t$ ,

$$\begin{aligned} {}^t l &= \sqrt{({}^t z_1^j - {}^t z_1^i)^2 + ({}^t z_2^j - {}^t z_2^i)^2 + ({}^t z_3^j - {}^t z_3^i)^2} \\ &= \sqrt{({}^t \Delta z_1)^2 + ({}^t \Delta z_2)^2 + ({}^t \Delta z_3)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta z_1 + \Delta q_1)^2 + (\Delta z_2 + \Delta q_2)^2 + (\Delta z_3 + \Delta q_3)^2} \end{aligned} \quad (2-12)$$

onde

$$\begin{aligned} {}^t z_k^i &= {}^0 z_k^i + {}^t q_k^i, & {}^t z_k^j &= {}^0 z_k^j + {}^t q_k^j & k &= 1, 2, 3 \\ \Delta q_k &= {}^t q_k^j - {}^t q_k^i, & \Delta z_k &= {}^0 z_k^j - {}^0 z_k^i & k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2-13)$$

desta forma, pode-se re-escrever (2-10) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{0l^2} \left( \Delta z_1 \Delta q_1 + \Delta z_2 \Delta q_2 + \Delta z_3 \Delta q_3 + \frac{1}{2} (\Delta q_1^2 + \Delta q_2^2 + \Delta q_3^2) \right) \\ &= \frac{1}{0l^2} \begin{bmatrix} -\Delta z_1 & -\Delta z_2 & -\Delta z_3 & \Delta z_1 & \Delta z_2 & \Delta z_3 \end{bmatrix} {}^t \mathbf{q} \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 0l^2} \begin{bmatrix} -\Delta q_1 & -\Delta q_2 & -\Delta q_3 & \Delta q_1 & \Delta q_2 & \Delta q_3 \end{bmatrix} {}^t \mathbf{q} \\ &= \left( \mathbf{B}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}({}^t \mathbf{q}) \right) {}^t \mathbf{q} \\ &= \mathbf{B}({}^t \mathbf{q}) {}^t \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2-14)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{B}}$ , que relaciona o incremento das deformações com o incremento dos deslocamentos nodais,  $\delta \epsilon = \bar{\mathbf{B}} \delta {}^t \mathbf{q}$ , é dada simplesmente por:

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial {}^t \mathbf{q}} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^{nl}({}^t \mathbf{q}) \quad (2-15)$$

#### 2.4.2

##### Medida de Tensão

A única tensão de Piola-Kirchhoff II é a axial ( $\sigma$ ), a qual é relacionada com a deformação de Green-Lagrange através da equação:

$$\sigma = E \epsilon \quad (2-16)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

#### 2.4.3

##### Vetor de Forças Internas

A partir do princípio dos deslocamentos virtuais, o vetor de forças internas para um elemento pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega_{el}} \bar{\mathbf{B}}^T \sigma dV = {}^0 A^0 l \sigma \bar{\mathbf{B}}^T \quad (2-17)$$

#### 2.4.4

##### Matriz de Rigidez

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \int_{\Omega_{el}} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dV + \int_{\Omega_{el}} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{q}} \sigma dV \\ &= E^0 A^0 l \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{B}} + {}^0 A^0 l \sigma \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2-18)$$

onde

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{0l^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{0l^2} \mathbf{H} \quad (2-19)$$

## 2.5

### Estratégias de Solução para Problemas Não-Lineares

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga  $\lambda$  é mantido constante durante os ciclos iterativos, funcionando bem na parte ascendente do caminho de equilíbrio (trecho OA), figura (2.2), mas falha ao descrever esta curva após o primeiro ponto limite (ponto A), o que levaria a uma incorreta avaliação da capacidade pois o equilíbrio será atingido no ponto C.

Para se traçar a curva carga-deslocamento completa (trecho OABC), com possíveis passagens pelos pontos limites, é necessário que seja permitida a variação de  $\lambda$  a cada iteração.

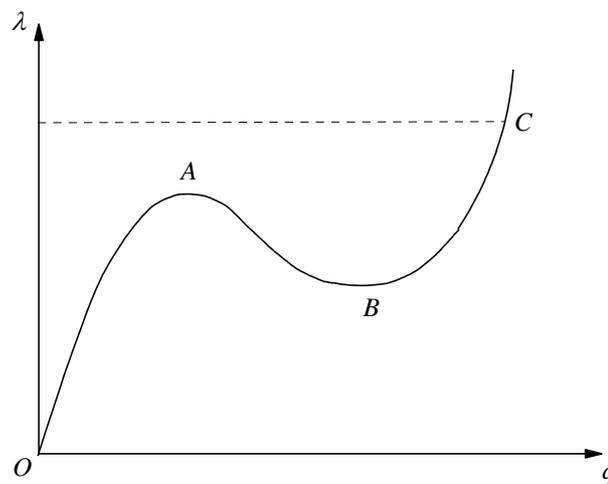


Figura 2.2: Curva carga-deslocamento.

Basicamente, as dificuldades para o traçado da curva completa se devem ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente nos pontos limites, onde ela é singular, e o algoritmo apresentará um erro de *over-flow* na fatorização da matriz. Felizmente esse não é um problema muito sério, pois é praticamente impossível chegar precisamente em um ponto crítico.

### 2.5.1 Análise Incremental-Iterativa

Considerando-se um instante de pseudo-tempo  $t + \Delta t$ , que representa as diferentes etapas de aplicação do carregamento e as correspondentes configurações de equilíbrio da estrutura, tem-se que o vetor de forças residuais  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}$ ,  $\omega = 0, 1, \dots$ , computado após a  $\omega$ -ésima iteração de Newton-Raphson é dado por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(\omega)}\mathbf{Q}_{ref} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(\omega)} = 0 \quad (2-20)$$

onde  $\mathbf{Q}_{ref}$  é o vetor de cargas externas de referência,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(\omega)}$  e  ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(\omega)}$  são, respectivamente, o vetor de forças internas no instante  $t + \Delta t$  e o fator de carga no instante  $t + \Delta t$  e iteração  $\omega$ .

A fim de se obter o próximo ponto de equilíbrio ( $\omega + 1$ ), as estratégias incrementais para o tratamento de efeitos não-lineares consideram que em torno de uma configuração deformada  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{q}$ , o problema é localmente linear. Desta forma é feita uma expansão em série de Taylor da equação (2-20), sendo esta aproximada por termos lineares obtidos a partir do truncamento dos termos de ordem superior da série:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega+1)} \cong {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(\omega)}}\delta\mathbf{q}^{(\omega+1)} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\lambda^{(\omega)}}\delta\lambda^{(\omega+1)} \cong 0 \quad (2-21)$$

Considerando que as cargas externas não sejam dependentes dos deslocamentos (sistema conservativo),

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(\omega)}} = -\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(\omega)}} = -{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(\omega)} \quad (2-22)$$

sendo  $\mathbf{K}^{(T)}$  a matriz de rigidez tangente, e

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\lambda^{(\omega)}} = \mathbf{Q}_{ref} \quad (2-23)$$

Substituindo as equações (2-22) e (2-23) em (2-21) e reorganizando os termos se obtém a equação de equilíbrio

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(\omega)}\delta\mathbf{q}^{(\omega+1)} = \mathbf{Q}_{ref}\delta\lambda^{(\omega+1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)} \quad (2-24)$$

onde  $\delta\lambda^{(\omega+1)}$  e  $\delta\mathbf{q}^{(\omega+1)}$  são as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, respectivamente, obtidas durante o processo iterativo. De (2-24) tem-se que os deslocamentos nodais iterativos ( $\delta\mathbf{q}^{(\omega+1)}$ ) podem ser decompostos em duas parcelas:

$$\delta\mathbf{q}^{(\omega+1)} = \delta\mathbf{q}_g^{(\omega+1)} + \delta\lambda^{(\omega+1)}\delta\mathbf{q}_r^{(\omega+1)} \quad (2-25)$$

onde:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(\omega)}\delta\mathbf{q}_{\mathbf{g}}^{(\omega+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(\omega)} \quad (2-26)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(T)(\omega)}\delta\mathbf{q}_{\mathbf{r}}^{(\omega+1)} = \mathbf{Q}_{ref} \quad (2-27)$$

A correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda^{(\omega+1)}$ , única incógnita da equação (2-25), é determinada seguindo uma das estratégias de iteração fornecidas na seção 2.5.3. De maneira geral a seguinte equação de restrição deve ser respeitada a cada iteração:

$$\mathbf{C}^T\delta\mathbf{q}^{(\omega+1)} + k\delta\lambda^{(\omega+1)} = H^{(\omega+1)} \quad (2-28)$$

onde  $\mathbf{C}$ ,  $H^{(\omega+1)}$  e  $k$  são constantes a serem definidas. Em termos gerais, Yang & Kuo [79] propuseram a seguinte equação para avaliar o parâmetro de carga:

$$\delta\lambda^{(\omega+1)} = \frac{1}{\mathbf{C}^T\delta\mathbf{q}_{\mathbf{r}}^{(\omega+1)} + k} \left( H^{(\omega+1)} - \mathbf{C}^T\delta\mathbf{q}_{\mathbf{g}}^{(\omega+1)} \right) \quad (2-29)$$

Para se considerar esses métodos de iteração tem-se inicialmente que se supor que, para  $\omega = 0$ ,  $\Delta\lambda^0$  tenha um valor prescrito dado pelo usuário ou calculado automaticamente como será visto na seção 2.5.2.

Após a seleção de  $\Delta\lambda^0$ , determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais  $\Delta\mathbf{q}^0$ . As aproximações  $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{q}^0$  caracterizam a chamada ***solução incremental predita***.

O primeiro passo para a obtenção da solução incremental inicial tangente ( $\Delta\lambda^0$  e  $\Delta\mathbf{q}^0$ ) consiste na montagem, usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente  ${}^t\mathbf{K}^{(T)}$ . Após a definição de  ${}^t\mathbf{K}^{(T)}$ , resolve-se o sistema de equações:

$${}^t\mathbf{K}^{(T)}\delta\mathbf{q}_t = \mathbf{Q}_{ref} \quad (2-30)$$

para se determinar os deslocamentos nodais tangente,  $\delta\mathbf{q}_t$ .

Com a definição de  $\Delta\lambda^0$  e  $\delta\mathbf{q}_t$  tem-se:

$$\Delta\mathbf{q}^0 = \Delta\lambda^0\delta\mathbf{q}_t \quad (2-31)$$

Nesse estágio o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais são atualizados, ou seja:

$${}^{t+\Delta t}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (2-32)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^t\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}^0 \quad (2-33)$$

onde  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{q}$  caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga.

A figura (2.3) fornece um esquema de solução incremental-iterativa para sistemas com um grau de liberdade, onde os parâmetros de carga e o

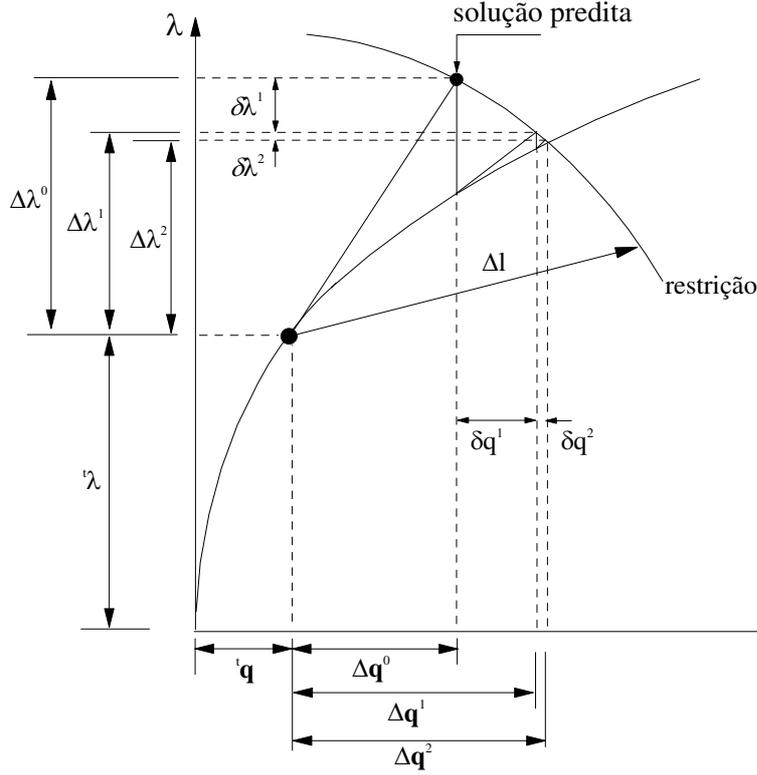


Figura 2.3: Solução incremental-iterativa: sistema com um grau de liberdade [25].

deslocamento são atualizados seguindo a restrição de comprimento de arco cilíndrico [11].

Com a obtenção da solução iterativa  $(\delta \lambda^{(\omega+1)}$  e  $\delta \mathbf{q}^{(\omega+1)})$  via (2-25)-(2-27), faz-se a atualização das variáveis incrementais do problema:

$$\Delta \lambda^{(\omega+1)} = \Delta \lambda^{(\omega)} + \delta \lambda^{(\omega+1)} \quad (2-34)$$

$$\Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)} = \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}^{(\omega+1)} \quad (2-35)$$

Para o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais tem-se que:

$${}_{t+\Delta t} \lambda^{(\omega+1)} = {}_t \lambda + \Delta \lambda^{(\omega+1)} \quad (2-36)$$

$${}_{t+\Delta t} \mathbf{q}^{(\omega+1)} = {}_t \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)} \quad (2-37)$$

Os procedimentos descritos nessa seção são repetidos até que um dado critério de convergência seja atendido (veja a seção 2.5.4).

## 2.5.2

### Incremento Automático de Carga

A obtenção da solução incremental inicial tem como passo fundamental a definição do parâmetro de carga inicial  $\Delta\lambda^0$ . A seleção automática do tamanho do incremento desse parâmetro é importante, e deve refletir o grau de não-linearidade corrente do sistema estrutural em estudo. Em outras palavras, uma estratégia eficiente de incremento automático de carga deve satisfazer basicamente os seguintes requisitos: (i) produzir grandes incrementos quando a resposta da estrutura for aproximadamente linear; (ii) gerar pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear; (iii) ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando os pontos limites são ultrapassados.

A seguir são apresentadas algumas estratégias de incremento de carga que satisfazem esses requerimentos.

### Incremento do Comprimento de Arco

Como proposto por Crisfield [11], o incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente pode ser definido como:

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left( \frac{N_d}{{}^tN} \right)^{1/2} \quad (2-38)$$

onde  ${}^t\Delta l$  e  $\Delta l$  representam os incrementos do comprimento de arco no passos de carga anterior (valor conhecido) e no passo de carga corrente (incógnita), respectivamente;  $N_d$  é o número de iterações desejadas para o processo iterativo corrente, especificado pelo usuário, e  ${}^tN$  é o número de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior.

Através da equação (2-38) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial:

$$\Delta\mathbf{q}^{0T} \Delta\mathbf{q}^0 = \Delta l^2 \quad (2-39)$$

chega-se facilmente, usando-se (2-31) e (2-39), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{q}_t^T \delta\mathbf{q}_t}} \quad (2-40)$$

O critério utilizado para escolher o sinal correto na expressão (2-40) é o sugerido por Yang & Kuo [79], baseando-se no sinal do parâmetro GSP, que será apresentado na seção seguinte.

No programa desenvolvido nesse trabalho, o usuário deve especificar  ${}^1\Delta\lambda^0$  como dado de entrada, sendo este valor usado em seguida para calcular  ${}^1\Delta\mathbf{q}^0$

através de (2-31). Substituindo-se  $\Delta \mathbf{q}^0$  na equação (2-39), chega-se a  ${}^1\Delta l$ . Para os passos de carga seguintes, calcula-se automaticamente  $\Delta l$  através de (2-38).

### Incremento Baseado no Parâmetro GSP

Uma estratégia baseada na introdução de um parâmetro de rigidez generalizado foi adotada por Yang & Kuo [79] para limitar o incremento inicial do parâmetro de carga. O método de solução é denominado de estratégia de controle de deslocamento generalizado. Seguindo a sugestão de Yang & Shieh [78] para os valores de  $\mathbf{C}$  e  $k$  a serem usados na equação (2-29), ou seja:

$$\mathbf{C} = \Delta \lambda^0 {}^t\delta \mathbf{q}_r \quad \text{e} \quad k = 0 \quad (2-41)$$

e assim (2-29) pode ser reescrito como:

$$\delta \lambda^{(\omega+1)} = \frac{H^{(\omega+1)} - \Delta \lambda^0 {}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)}}{\Delta \lambda^0 {}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_r} \quad (2-42)$$

Para obtenção da solução predita  $\Delta \lambda^0$ , faz-se  $\delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} = 0$  e  $\delta \lambda^{(\omega+1)} = \Delta \lambda^0$  na equação anterior, e dessa forma chega-se a:

$$\Delta \lambda^0 = \sqrt{\frac{H^0}{{}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_r}} \quad (2-43)$$

onde o valor do parâmetro incremental  $H^0$  é dado da seguinte forma:

$$H^0 = ({}^1\Delta \lambda^0)^2 {}^1\delta \mathbf{q}_r^T {}^1\delta \mathbf{q}_r \quad (2-44)$$

e dessa forma pode-se escrever  $\Delta \lambda^0$  como sendo

$$\Delta \lambda^0 = \pm {}^1\Delta \lambda^0 \sqrt{\frac{{}^1\delta \mathbf{q}_r^T {}^1\delta \mathbf{q}_r}{{}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_r}} \quad (2-45)$$

considerando-se o parâmetro de rigidez generalizado (GSP) do sistema como se segue:

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta \mathbf{q}_r^T {}^1\delta \mathbf{q}_r}{{}^t\delta \mathbf{q}_r^T \delta \mathbf{q}_r} \quad (2-46)$$

Pode-se, portanto, reescrever (2-45) da seguinte forma:

$$\Delta \lambda^0 = \pm {}^1\Delta \lambda^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (2-47)$$

Observa-se que o sinal do incremento inicial de carga pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de seqüências de soluções  $(\mathbf{q}, \lambda)$  que permitam um avanço contínuo na resposta carga-deslocamento. De acordo com Yang & Kuo [79], o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende exclusivamente dos vetores  ${}^t\delta \mathbf{q}_r$  (passo de carga anterior) e  $\delta \mathbf{q}_r$  (passo de carga corrente), conforme (2-46).

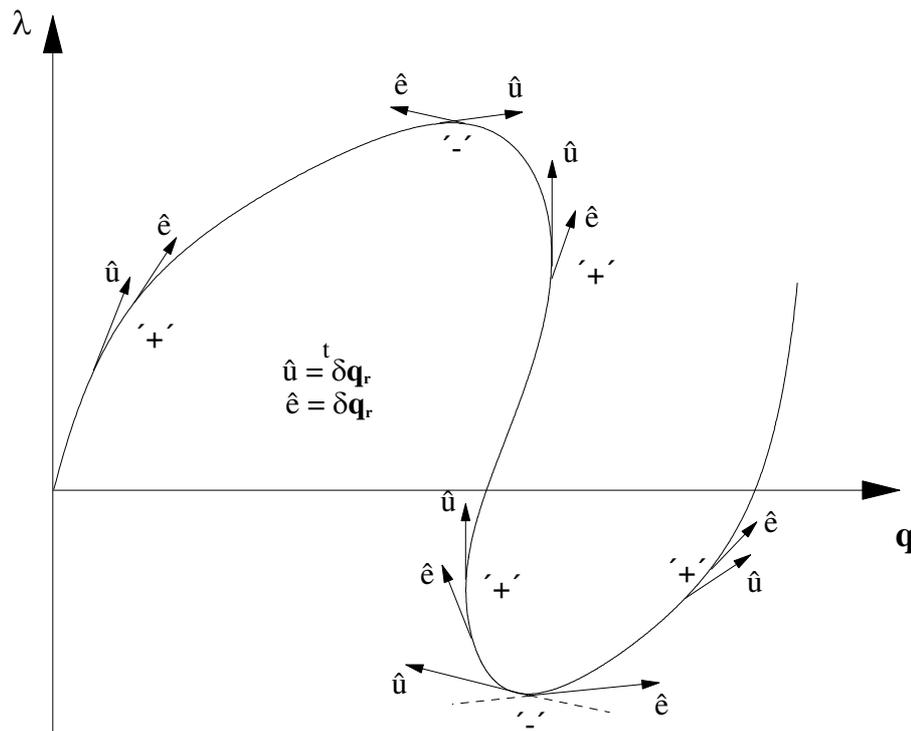


Figura 2.4: Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado (GSP).

O GSP torna-se negativo somente para o passo imediatamente após o ponto limite, para os demais passos este permanecerá sempre positivo, o que pode ser visto na figura (2.4).

### 2.5.3 Estratégias de Iteração

A determinação do parâmetro de carga iterativo,  $\delta\lambda^{(\omega+1)}$  é função de uma dada estratégia de iteração, ou equação de restrição imposta ao problema, que tem a função de otimizar a convergência do processo iterativo. A seguir são apresentadas duas estratégias bastante eficientes que serão utilizadas nos capítulos seguintes.

#### Carga Constante

Essa estratégia de iteração caracteriza o método tradicional de controle de carga constante, no qual o parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo. Para esse caso, tem-se que a equação de restrição se reduz à expressão trivial:

$$\delta\lambda^{(\omega+1)} = 0 \tag{2-48}$$

Dessa forma a equação (2-25) é reduzida aos deslocamentos fornecidos

pelo método convencional de Newton-Raphson.

### Comprimento de Arco Cilíndrico

Segundo Crisfield [11], a cada iteração, a seguinte equação de restrição deve ser satisfeita:

$$\Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)T} \Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)} = \Delta l^2 \quad (2-49)$$

Substituindo (2-25) em (2-35) e o resultado desta operação em (2-49), chega-se a uma equação quadrática em  $\delta \lambda^{(\omega+1)}$ , a saber:

$$A \left( \delta \lambda^{(\omega+1)} \right)^2 + B \delta \lambda^{(\omega+1)} + C = 0 \quad (2-50)$$

onde, os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} A &= \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)T} \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)} \\ B &= 2 \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)T} \left( \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right) \\ C &= \left( \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right)^T \left( \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right) - \Delta l^2 \end{aligned} \quad (2-51)$$

Com a resolução de (2-50), chega-se aos dois valores  $\delta \lambda_1$  e  $\delta \lambda_2$ , de forma que se deve escolher entre as soluções:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}_1^{(\omega+1)} &= \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} + \delta \lambda_1 \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)} \\ \Delta \mathbf{q}_2^{(\omega+1)} &= \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)} \end{aligned} \quad (2-52)$$

aquela que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior,  $\Delta \mathbf{q}^{(\omega)}$ . Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado. Um procedimento utilizado, consiste em se achar o menor ângulo entre  $\Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)}$  e  $\Delta \mathbf{q}^{(\omega)}$ . Isto equivale a achar o máximo co-seno do ângulo:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{1,2} &= \frac{\Delta \mathbf{q}^{(\omega)T} \Delta \mathbf{q}^{(\omega+1)}}{\Delta l^2} \\ &= \frac{\Delta \mathbf{q}^{(\omega)T} \left( \Delta \mathbf{q}^{(\omega)} + \delta \mathbf{q}_g^{(\omega+1)} \right)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2} \frac{\Delta \mathbf{q}^{(\omega)T} \delta \mathbf{q}_r^{(\omega+1)}}{\Delta l^2} \end{aligned} \quad (2-53)$$

Como (2-50) é uma equação quadrática, ela poderá ter raízes imaginárias se  $(B^2 - 4AC)$  for menor que zero. Essa situação pode existir quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto.

### Iteração usando Deslocamento Generalizado

Conforme apresentado na seção 2.5.1, a equação (2-29) deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo da solução não-linear. Res-

tando apenas a definição dos parâmetros  $\mathbf{C}^T$ ,  $k$  e  $H^{(\omega+1)}$ . Na obtenção da solução incremental predita ( $\omega = 0$ ), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental  $H^0$  (no caso, deslocamento generalizado) deveria ser obtido de acordo com a equação (2-44); durante o ciclo iterativo é assumido que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, isto é:  $H^{(\omega+1)} = 0$ , para  $\omega = 0$ . Dessa forma pode-se reescrever (2-29) como:

$$\delta\lambda^{(\omega+1)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{q}_r^T \delta\mathbf{q}_g^{(\omega+1)}}{{}^t\delta\mathbf{q}_r^T \delta\mathbf{q}_r^{(\omega+1)}} \quad (2-54)$$

que é a expressão procurada para correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

## 2.5.4

### Critérios de Convergência

O processo iterativo descrito termina indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise quando um dos dois, ou os dois critérios de convergência apresentados abaixo forem atendidos:

1. o primeiro critério de convergência é baseado em relações de forças e é calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior. Ele é definido como segue:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{R}^{(w)}\|}{\|\Delta\lambda^{(w)}\mathbf{Q}_{ref}\|} \leq \zeta \quad (2-55)$$

onde  $\|\mathbf{R}^{(w)}\|$  é igual à norma euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculada usando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior,  $\|\Delta\lambda^{(w)}\mathbf{Q}_{ref}\|$  é a norma euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo e  $\zeta$  é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada.

2. o segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos e é sempre verificado no final da iteração corrente. Ele é definido por:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{q}\|}{\|\Delta\mathbf{q}^{(\omega+1)}\|} \leq \zeta \quad (2-56)$$

onde  $\|\delta\mathbf{q}\|$  é a norma euclidiana dos deslocamentos iterativos (residuais),  $\|\Delta\mathbf{q}^{(\omega+1)}\|$  é a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais, que são obtidos após a correção do processo iterativo, e  $\zeta$  segue a mesma definição do critério anterior.

3. o terceiro critério de convergência consiste em obedecer a ambas as relações (forças e deslocamentos) dadas em (2-55) e (2-56), assim este critério é verificado se:

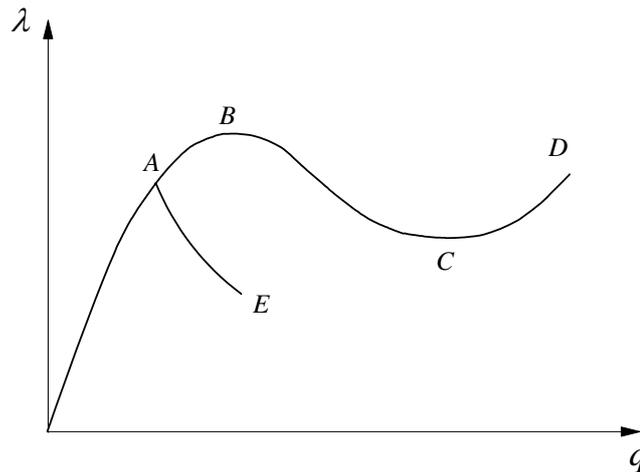


Figura 2.5: Pontos críticos de uma estrutura [58].

$$\zeta_1 \leq \zeta \quad \text{e} \quad \zeta_2 \leq \zeta \quad (2-57)$$

onde  $\zeta$ ,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são definidos nos itens anteriores.

## 2.6

### Determinação dos Pontos Críticos

Os pontos críticos são aqueles em que um caminho de equilíbrio atinge um valor extremo ou aqueles onde diferentes caminhos de equilíbrio se encontram. Na figura (2.5) podem ser observados três pontos críticos (A, B e C), onde os pontos (B e C) são chamados de pontos limite e o ponto (A) ponto de bifurcação. No presente trabalho serão considerados somente pontos limite. Caso a estrutura apresente ponto de bifurcação, uma pequena imperfeição será considerada para se eliminar a bifurcação.

Matematicamente, um ponto de equilíbrio é um ponto crítico se a matriz de rigidez do modelo de elementos finitos for singular  $\det \mathbf{K}^{(T)} = 0$ . Além disso, sabe-se que o equilíbrio é estável quando todos os autovalores são positivos o que leva a  $\det \mathbf{K}^{(T)} > 0$  e torna-se instável quando o menor autovalor se torna negativo e, portanto,  $\det \mathbf{K}^{(T)} < 0$ .

Conforme visto na seção acima, as estratégias de incremento automático de carga têm como objetivo gerar pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear além de detectar pontos limites. A determinação dos pontos críticos se faz de forma aproximada, através do sinal do GSP, que controla os incrementos de carga, ou seja, a medida que o problema se aproxima de um ponto limite, os incrementos de carga dados

pela equação (2-47) se tornam muito pequenos, sendo tomado como ponto limite o valor imediatamente após a inversão de sinal do GSP.

## 2.7

### Exemplos de Análise Estrutural

Nesta seção são apresentadas as soluções de alguns problemas estruturais encontrados freqüentemente na literatura em função da acentuada não-linearidade da relação carga-deslocamento. Pretende-se, assim, verificar a eficiência da formulação de elementos finitos não-linear aqui apresentada. Para tanto, serão abordados exemplos clássicos de problemas de equilíbrio e estabilidade que possuem resultados numéricos e/ou analíticos encontrados na literatura.

#### 2.7.1

##### Treliça Assimétrica em Forma de Arco

A figura (2.6) mostra um sistema treliçado assimétrico em forma de arco. Este exemplo apresenta em sua trajetória pontos limites tanto de carga quanto de deslocamentos. Todos os dados referentes à geometria estão definidos na figura (2.6). A seção transversal tem área  $A = 3$  e o material utilizado apresenta  $E = 3 \times 10^6$ . Este modelo foi estudado por Pinheiro et al. [61, 60], Powel & Simons [62], entre outros.

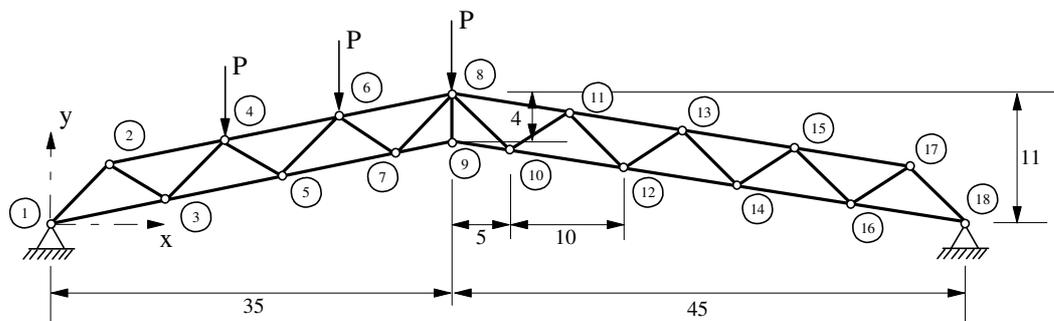


Figura 2.6: Treliça assimétrica em forma de arco.

O problema não linear foi resolvido através do método de Newton-Raphson padrão em conjunto com o método do deslocamento generalizado (GDCM). O valor inicial do incremento de carga foi de 3000 e a tolerância utilizada no processo iterativo foi de  $10^{-5}$ . A estratégia foi escolhida em função da mesma ser utilizada neste trabalho como parâmetro para determinação da carga crítica.

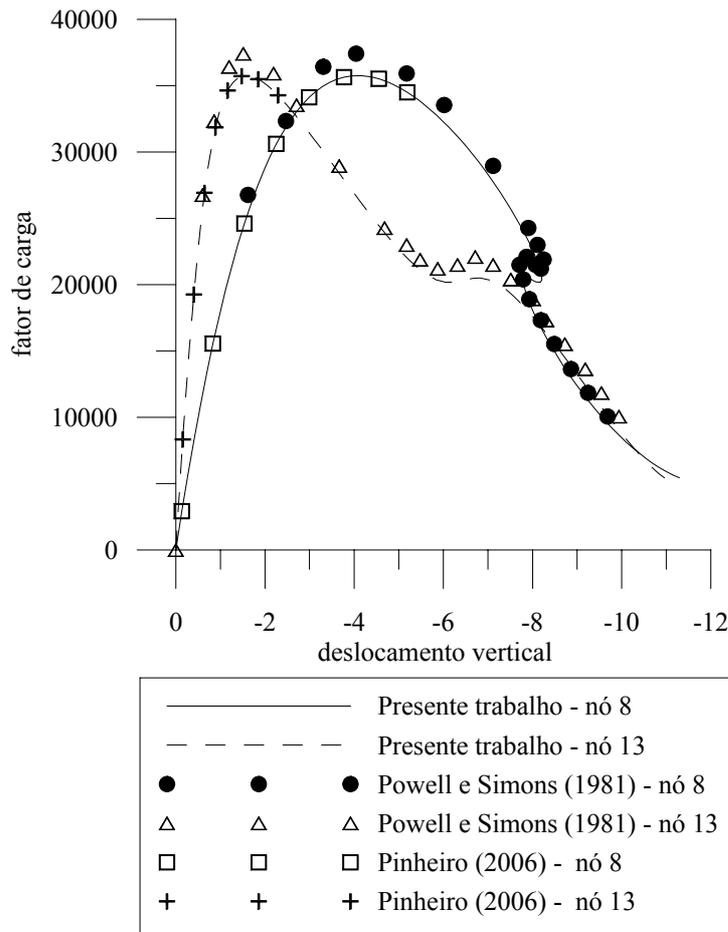


Figura 2.7: Treliça assimétrica em forma de arco - resposta estrutural do deslocamento vertical dos nós 8 e 13.

Os traçados da trajetória de equilíbrio para o deslocamento vertical dos nós 8 e 13 são apresentados na figura (2.7). Observa-se nesta figura uma perfeita concordância com o trabalho de Pinheiro et al. [61] e uma nítida diferença em relação ao trabalho de Powel & Simons [62], fato este devido aos diferentes referenciais utilizados na solução do problema. Em Powel & Simons [62] o referencial utilizado foi o Lagrangeano Atualizado, já no presente trabalho e no trabalho de Pinheiro et al. [61] foram utilizados o referencial total. Os valores do primeiro ponto limite de carga e os deslocamentos dos nós 8 e 13 são comparados na tabela (2.1).

### 2.7.2 Treliça Espacial de 24 Elementos

A treliça espacial formada por 24 elementos apresentada na figura (2.8) tem sido utilizada com frequência como exemplo para testar a eficiência de

	Powell & Simons RLA [62]	Pinheiro et. al RLT [61]	Presente trabalho RLT
$\lambda_{cr}$	37412.9	35760.3	35760.6
$q_2^8$	4.044	4.069	4.082
$q_2^{13}$	1.554	1.593	1.585

Tabela 2.1: Treliça assimétrica em forma de arco - valores de carga crítica e deslocamento vertical dos nós 8 e 13.

várias formulações, algoritmos propostos e implementações computacionais [79, 56, 60, 61]. É com essa finalidade que a mesma será analisada nesta seção. A estrutura possui, por hipótese,  $E = 10^4$  e  $A = 1$ . As coordenadas nodais são apresentadas na tabela (2.2).

Nó	x	y	z
1	0.0	0.00	8.216
2	25.0	0.00	6.216
3	12.5	21.65	6.216
4	-12.5	21.65	6.216
5	-25.0	0.00	6.216
6	-12.5	-21.65	6.216
7	12.5	-21.65	6.216
8	43.3	-25.00	0.000
9	43.3	25.00	0.000
10	0.0	50.00	0.000
11	-43.3	25.00	0.000
12	-43.3	-25.00	0.000
13	0.0	-50.00	0.000

Tabela 2.2: Treliça espacial de 24 elementos - coordenadas nodais.

Inicialmente considera-se que apenas a carga  $P_1$  está atuando na estrutura. O resultado da análise é apresentado na figura (2.9).

Uma variação deste exemplo em que além da carga concentrada  $P_1$  atuando no centro da estrutura (nó 1), há a presença de outra carga nodal,  $P_2$ , aplicada nos nós 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Este novo carregamento faz com que a trajetória de equilíbrio da estrutura passe a ter não apenas dois, mas três pontos limites de carga, conforme visto na figura (2.10).

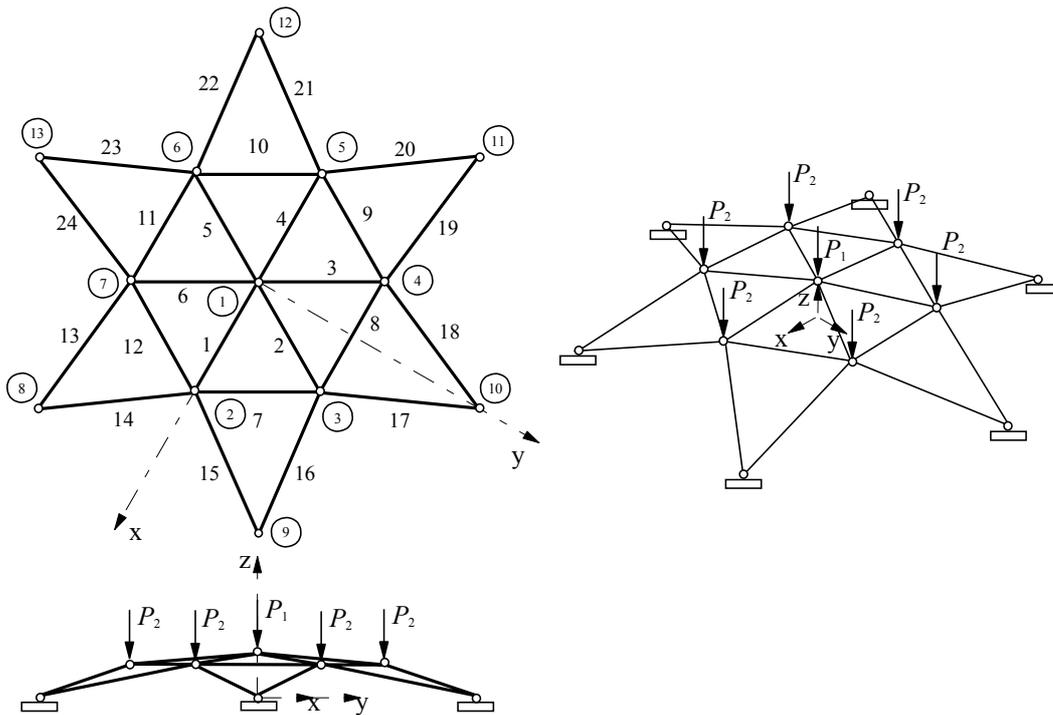


Figura 2.8: Trelça espacial de 24 elementos.

	Oñate & Matias [56]	Pinheiro et. al RLA [61]	Presente trabalho RLT
$\lambda_{cr}$	3.157	3.156	3.156
$q_3^1$	-0.761	-0.763	-0.769

Tabela 2.3: Trelça espacial de 24 elementos - valores de carga crítica e deslocamento vertical do nó 1 relativo a este nível de carregamento.

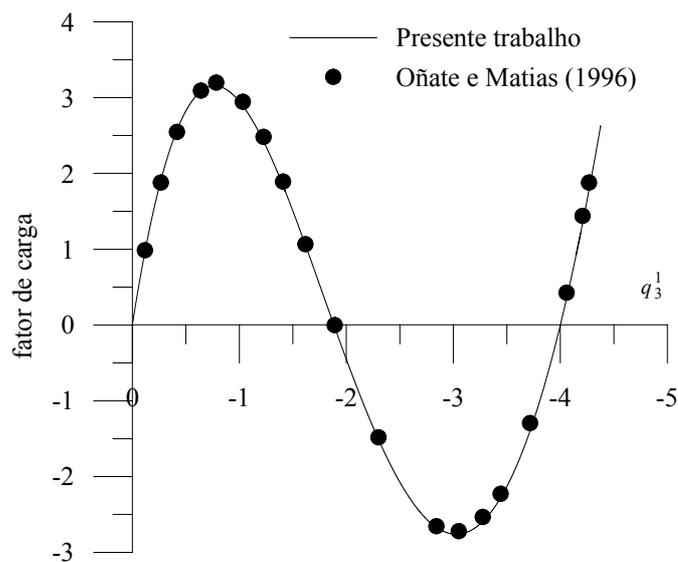


Figura 2.9: Trelça espacial de 24 elementos - resposta estrutural para o carregamento  $P_1$ .

	Oñate & Matias [56]	Pinheiro et. al RLT [61]	Presente trabalho RLT
$\lambda_{cr}$	7.81	7.65	7.65
$q_3^1$	-0.882	-0.873	-0.875

Tabela 2.4: Treliça espacial de 24 elementos - valores de carga crítica e deslocamento vertical do nó 1 relativo a este nível de carregamento.

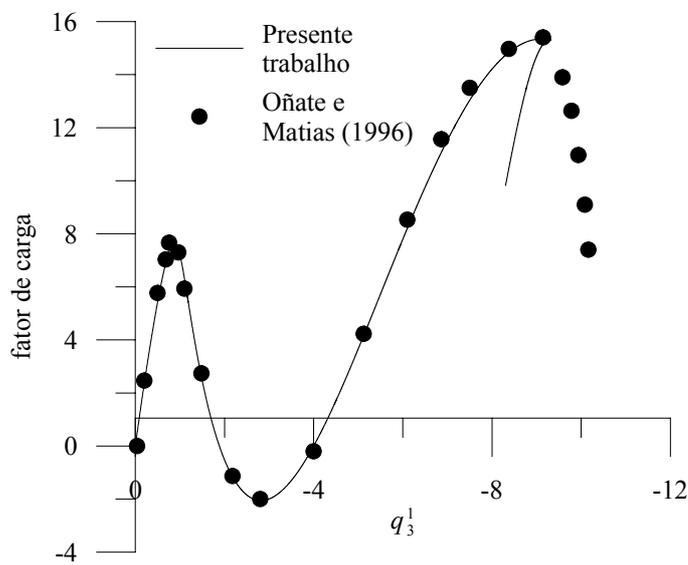


Figura 2.10: Treliça espacial de 24 elementos - resposta estrutural para os carregamentos  $P_1$  e  $P_2$ .