

Anderson Pereira

**Otimização baseada em
confiabilidade: aplicação a treliças
espaciais**

TESE DE DOUTORADO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
Programa de Pós-graduação
em Engenharia Civil

Rio de Janeiro
Março de 2007



Anderson Pereira

**Otimização baseada em confiabilidade:
aplicação a treliças espaciais**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas

Orientador : Prof. Luiz Fernando Martha
Co-Orientador: Prof. Luiz Eloy Vaz

Rio de Janeiro
Março de 2007



Anderson Pereira

**Otimização baseada em confiabilidade:
aplicação a treliças espaciais**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Luiz Fernando Martha

Orientador

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Luiz Eloy Vaz

Co-Orientador

UFRJ

Prof. Paulo Batista Gonçalves

PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

PUC-Rio

Prof. Luís Volnei Sudati Sagrilo

COPPE/UFRJ

Prof. José Herskovits Norman

COPPE/UFRJ

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 22 de Março de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Anderson Pereira

Graduou-se em Engenharia Civil na UDESC/Joinville (Universidade do Estado de Santa Catarina) em 2000. Fez curso de mestrado em Estruturas no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio pelo qual recebeu o título de mestre no ano de 2002. Interesses acadêmicos em áreas de pesquisa que envolvam otimização de estruturas, programação matemática, análise não-linear, análise de confiabilidade e elementos finitos.

Ficha Catalográfica

Pereira, Anderson

Otimização baseada em confiabilidade: aplicação a treliças espaciais / Anderson Pereira; orientador: Luiz Fernando Martha; co-orientador: Luiz Eloy Vaz. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2007.

v., 145 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Tese. 2. Otimização. 3. Análise Não Linear. 4. Análise de Sensibilidade. 5. Análise de Confiabilidade. 6. Programação Matemática. 7. Otimização Baseada em Confiabilidade. I. Martha, Luiz Fernando. II. Vaz, Luiz Eloy. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

À Janaína por tudo.

Agradecimentos

Aos meus pais, pelo apoio e por todos os gestos de carinho e otimismo.

Aos meus orientadores Luiz Eloy Vaz e Luiz Fernando Martha pelo estímulo e parceria para a realização deste trabalho.

Ao amigo Ivan, do TeCGraf (Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica), pelo apoio, pelas excelentes discussões e sugestões ao longo deste trabalho.

Ao grande amigo Sandoval, pelas sugestões, pelo apoio e pela amizade consolidada ao longo deste trabalho.

A todos os amigos e colegas da PUC-Rio, do TeCGraf, do vôlei de praia e do chope pelos momentos de descontração, essenciais para a realização deste trabalho.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial Galvão, Ataliba, Saré, Joabson, Ramires, Maurício e Pasquetti.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, por todos os conhecimentos transmitidos durante a pós-graduação.

Aos funcionários da PUC-Rio e do TeCGraf, pela eficiência e amizade. Em especial à Ana Roxo, Rita, e Claudinei.

À minha esposa Janaína, pelo carinho, compreensão, paciência e constante apoio que fizeram possível a realização deste trabalho.

Ao CNPq, à PUC-Rio e ao TeCGraf, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Pereira, Anderson; Martha, Luiz Fernando; Vaz, Luiz Eloy. **Otimização baseada em confiabilidade: aplicação a treliças espaciais**. Rio de Janeiro, 2007. 145p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

No projeto de estruturas de engenharia há, freqüentemente, incertezas associadas às propriedades dos materiais, às propriedades geométricas e aos carregamentos. A maneira mais comum e tradicional para se levar em conta estas incertezas é através da definição dos valores de projeto como o resultado do produto do valor característico das variáveis aleatórias por um fator parcial de segurança. Esta solução, no entanto, falha ao não permitir a quantificação da confiabilidade do projeto ótimo uma vez que um fator grande de segurança pode não significar uma confiabilidade mais alta. Para se considerar a natureza probabilística de quantidades como propriedades dos materiais, carregamentos, etc., tem-se que identificar e definir estas quantidades como variáveis aleatórias no modelo de análise. Desta maneira, a probabilidade de falha (ou a confiabilidade) de uma estrutura sujeita a uma restrição de desempenho na forma de uma função de estado limite pode, então, ser calculada e formulada como uma restrição num problema de otimização. Neste trabalho, restrições probabilísticas são incorporadas ao esquema tradicional de otimização estrutural. A formulação e os métodos numéricos para este processo, comumente chamado de otimização baseada em confiabilidade, são descritos. O objetivo principal é apresentar um sistema computacional capaz de resolver problemas de otimização de forma e de dimensões de treliças espaciais baseado em confiabilidade. Podem ser consideradas como variáveis, determinísticas ou aleatórias, as seções transversais, as coordenadas nodais, as propriedades dos materiais (módulo de elasticidade e tensão de escoamento) e os carregamentos. De maneira a tratar os problemas de instabilidade global são considerados os efeitos da não-linearidade geométrica no comportamento da estrutura e uma restrição formulada para uma função de estado limite associada à carga de colapso é incluída. Funções de estado limite referentes aos deslocamentos e às tensões também são consideradas. A flambagem global das barras é considerada por meio da carga crítica de Euler.

Palavras-chave

Otimização. Análise Não Linear. Análise de Sensibilidade. Análise de Confiabilidade. Programação Matemática. Otimização Baseada em Confiabilidade.

Abstract

Pereira, Anderson; Martha, Luiz Fernando; Vaz, Luiz Eloy. **Reliability based optimization: application to space trusses**. Rio de Janeiro, 2007. 145p. PhD Thesis — Department of Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Uncertainties associated with random variables, such as, the material properties and loads, are inherent to the design of structures. These uncertainties are traditionally taken into account in the project before the design by defining design values for the random variables. The design values of the random variables are obtained from statistical properties of the random variables and from partial safety factors. Once these values are defined the variables are treated as deterministic variables in the design process. This approach has been followed in the conventional design optimization and in many design codes such as the Brazilian code for the design of steel and concrete structures. This simple approach, however, does not allow an estimate of the structural reliability of the resulting project which may have a low (unsafe structure) or a very high (expensive structure) reliability. To overcome this problem a reliability analysis must be incorporated into the traditional design optimization. Design optimization, incorporating reliability analyses, has been denoted Reliability-Based Design Optimization (RBDO). In RBDO, the constraints are defined in terms of the probabilities of failure associated with some prescribed failure functions and therefore, it requires, as in the reliability analysis, the definition of the random variables and information about their statistical properties. In this work, RBDO is applied to the shape and sizing optimization of spatial trusses considering geometric nonlinearities. The constraints considered in the RBDO problem are related to the following failure mechanisms: to the global collapse (limit load), to local buckling and yield stress and to serviceability conditions (displacement bounds). The algorithms used for solving the optimization problem and for performing the reliability analysis are described.

Keywords

Optimization. Nonlinear Analysis. Sensitivity Analysis. Reliability Analysis. Mathematical Programming. Reliability Based Design Optimization.

Sumário

Lista de Símbolos, Siglas e Abreviaturas	14
1 Introdução	20
1.1 Considerações Iniciais e Objetivos	20
1.2 Escopo do Trabalho	22
1.3 Revisão Bibliográfica	24
2 Análise Não-Linear Geométrica	27
2.1 Comentários Iniciais	27
2.2 Comportamento Não-Linear, Análise e Projeto	27
2.2.1 Fontes de Não-Linearidade	28
2.3 Formulação para a Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas	29
2.3.1 Descrição do Problema	29
2.3.2 Princípio dos Deslocamentos Virtuais	30
2.3.3 Montagem das Equações da Estrutura	32
2.4 Aplicação a Elementos de Treliça Espacial	32
2.4.1 Medida de Deformação	33
2.4.2 Medida de Tensão	34
2.4.3 Vetor de Forças Internas	34
2.4.4 Matriz de Rigidez	34
2.5 Estratégias de Solução para Problemas Não-Lineares	35
2.5.1 Análise Incremental-Iterativa	36
2.5.2 Incremento Automático de Carga	39
2.5.3 Estratégias de Iteração	41
2.5.4 Critérios de Convergência	43
2.6 Determinação dos Pontos Críticos	44
2.7 Exemplos de Análise Estrutural	45
2.7.1 Treliça Assimétrica em Forma de Arco	45
2.7.2 Treliça Espacial de 24 Elementos	46
3 Análise de Sensibilidade	50
3.1 Considerações Gerais	50
3.2 Método Analítico	51
3.2.1 Sensibilidade dos Deslocamentos Nodais	52
3.2.2 Sensibilidade da Carga Limite	53
3.2.3 Sensibilidade da Carga Crítica Linear	54
3.2.4 Sensibilidade das Deformações e Tensões	54
3.2.5 Sensibilidade do Vetor de Forças Internas	55
3.2.6 Sensibilidade do Vetor de Cargas Externas	55
3.2.7 Sensibilidade da Matriz de Rigidez Elástica	56
3.2.8 Sensibilidade da Matriz de Rigidez Geométrica	56
3.3 Método das Diferenças Finitas (MDF)	57
3.4 Exemplos de Análise de Sensibilidade	58

3.4.1	Treliça Espacial de 24 Elementos	58
4	Análise de Confiabilidade Estrutural	62
4.1	Modelagem das Incertezas	62
4.1.1	Distribuições de Probabilidades	63
4.1.2	Correlação Entre Variáveis Aleatórias	63
4.1.3	Função Conjunta de Probabilidades	64
4.2	Função de Performance	65
4.3	Métodos de Análise de Confiabilidade	66
4.3.1	Método Valor Médio (MV)	66
4.3.2	Métodos Baseados no Ponto de Projeto	67
4.3.3	Amostragem por Importância	70
4.4	Análise de Sensibilidade	72
4.5	Exemplos de Análise de Confiabilidade	73
4.5.1	Coluna com 45 barras	73
5	Otimização Considerando Incertezas	78
5.1	Otimização Determinística	78
5.2	Otimização Baseada em Confiabilidade	79
5.3	Método de Duplo Laço para RBDO	79
5.4	Linearizações da função de estado limite	81
5.5	Ponto Inicial nos Métodos de Busca pelo MPP	82
5.6	Análise de Sensibilidade em RBDO	82
5.7	Exemplos	83
5.7.1	Coluna Retangular Curta	84
5.7.2	Viga em Balanço	86
5.7.3	Coluna de Aço	88
5.8	Comentários Sobre os Exemplos	91
6	Otimização Baseada em Confiabilidade: Aplicação a Treliças Espaciais	93
6.1	Considerações Gerais	93
6.1.1	Consideração da Segurança nos Projetos	94
6.2	Metodologia de Otimização	96
6.3	Formulação do Problema de Otimização	97
6.3.1	Fatores de escala	98
6.3.2	Cálculo dos Gradientes	99
6.4	Implementação da Formulação	99
6.5	Exemplos	102
6.5.1	Treliça de 10 Barras	102
6.5.2	Treliça Espacial de 24 Elementos	107
7	Conclusões e Sugestões	112
7.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	114
	Referências Bibliográficas	116
A	Variáveis Randômicas	125
A.1	Valores Característicos de uma Variável Randômica	125
A.2	Distribuições de Probabilidades	126
A.2.1	Distribuição Normal ou Gaussiana	127

A.2.2	Distribuição Lognormal	127
A.2.3	Distribuição Uniforme	128
A.2.4	Distribuição Gamma	128
A.2.5	Distribuição Beta	129
A.2.6	Distribuição Gumbel	129
A.2.7	Distribuição Tipo I Mínimos	130
A.2.8	Distribuição Tipo II Máximos	130
A.2.9	Distribuição Tipo III Mínimos	131
A.2.10	Distribuição Weibull	131
B	Algoritmos de Otimização	132
B.1	Formulação do Problema	132
B.2	Condições de Ótimo	133
B.3	Forma Geral dos Algoritmos de Otimização	134
B.4	Método de Newton para Problemas de Otimização sem Restrição	135
B.5	Busca Linear	136
B.6	Programação Quadrática	136
B.7	Algoritmo de Han-Powell - Programação Quadrática Seqüencial	137
B.7.1	Etapas do Algoritmo Não-Linear Han-Powell (SQP)	139
B.8	Método dos Pontos Interiores	140
B.8.1	Etapas do Algoritmo de Pontos Interiores (IP)	142
B.9	Algoritmos de Otimização para Análise de Confiabilidade	144
B.9.1	Algoritmo (Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler) HLRF	144
B.10	Implementação	145

Lista de figuras

2.1	Elemento de treliça.	33
2.2	Curva carga-deslocamento.	35
2.3	Solução incremental-iterativa: sistema com um grau de liberdade [25].	38
2.4	Variação do sinal do parâmetro de rigidez generalizado (GSP).	41
2.5	Pontos críticos de uma estrutura [58].	44
2.6	Treliça assimétrica em forma de arco.	45
2.7	Treliça assimétrica em forma de arco - resposta estrutural do deslocamento vertical dos nós 8 e 13.	46
2.8	Treliça espacial de 24 elementos.	48
2.9	Treliça espacial de 24 elementos - resposta estrutural para o carregamento P_1 .	48
2.10	Treliça espacial de 24 elementos - resposta estrutural para os carregamentos P_1 e P_2 .	49
3.1	Imprecisão da sensibilidade via diferenças finitas em problemas não-lineares [68].	58
3.2	Treliça espacial de 24 elementos - Efeito da perturbação relativa η na sensibilidade do deslocamento q_3^1 em relação a área A_1 .	59
3.3	Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades dos deslocamentos através dos métodos analítico (DDM) e diferenças finitas.	60
3.4	Treliça espacial de 24 elementos - Deslocamento vertical do nó 1 e a sensibilidade em relação ao módulo de elasticidade.	61
4.1	Representação gráfica dos métodos FORM e SORM.	69
4.2	Representação gráfica dos métodos MCS e IS.	71
4.3	Coluna com 45 barras.	74
4.4	Coluna com 45 barras - curvas de equilíbrio.	75
5.1	Viga em balanço.	87
5.2	Coluna de aço - dependência de β sobre o custo máximo admissível da estrutura [42].	91
6.1	Situações encontradas na análise estrutural [58].	96
6.2	RBDO-Fluxograma [41].	100
6.3	Treliça de 10 barras.	102
6.4	Cantoneira de abas iguais - Relação entre a área da seção transversal e o momento mínimo de inércia.	103
6.5	Treliça de 10 barras - Projeto ótimo: (a) presente trabalho; (b) Stocki et. al [74].	105
6.6	Treliça de 10 barras - Restrições e função objetivo ao longo das iterações.	106
6.7	Treliça espacial de 24 elementos.	107
6.8	Treliça espacial de 24 elementos - Restrições e função objetivo ao longo das iterações.	110

6.9 Treliza espacial de 24 elementos - Variação do volume em função do tipo de distribuição e do c.o.v. [X_{27}].

111

Lista de tabelas

2.1	Treliça assimétrica em forma de arco - valores de carga crítica e deslocamento vertical dos nós 8 e 13.	47
2.2	Treliça espacial de 24 elementos - coordenadas nodais.	47
2.3	Treliça espacial de 24 elementos - valores de carga crítica e deslocamento vertical do nó 1 relativo a este nível de carregamento.	48
2.4	Treliça espacial de 24 elementos - valores de carga crítica e deslocamento vertical do nó 1 relativo a este nível de carregamento.	49
3.1	Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades dos deslocamentos através do método analítico.	59
3.2	Treliça espacial de 24 elementos - Sensibilidades da carga crítica obtidas via DDM.	61
4.1	Distribuições de probabilidades.	63
4.2	Coluna com 45 barras - Seções transversais e materiais das barras.	74
4.3	Variáveis aleatórias do problema da coluna com 45 barras.	75
4.4	Coluna com 45 barras - Resultados com 22 variáveis para a função de falha associada ao deslocamento.	76
4.5	Coluna com 45 barras - Resultados com 4 variáveis para a função de falha associada ao deslocamento.	76
4.6	Coluna com 45 barras - Resultados para a função de falha associada à carga crítica linearizada.	77
5.1	RIA vs. PMA (Youn & Choi [82]).	80
5.2	Não-linearidades das restrições probabilísticas (Youn & Choi [82]).	80
5.3	Valores usuais dos parâmetros dos algoritmos.	84
5.4	Variáveis aleatórias do problema coluna retangular curta.	84
5.5	Coluna retangular curta - Resultados.	86
5.6	Coluna retangular curta - Resultados para diferentes pontos de partida.	86
5.7	Coluna retangular curta - Comparação dos resultados.	87
5.8	Variáveis aleatórias do problema da viga em balanço.	87
5.9	Viga em balanço - Resultados.	88
5.10	Viga em balanço - Resultados para diferentes pontos de partida.	89
5.11	Viga em balanço - Comparação dos resultados.	89
5.12	Coluna de aço - Variáveis aleatórias.	89
5.13	Coluna de aço - resultados.	90
5.14	Coluna de aço - Comparação dos resultados.	91
6.1	Treliça com 10 barras - variáveis randômicas e de projeto.	104
6.2	Treliça espacial de 24 elementos - variáveis randômicas e de projeto.	109
6.3	Treliça espacial de 24 elementos - Resultados para diversos tipos de distribuição da variável X_{27} .	111
B.1	Divisão dos problemas de Programação Matemática.	134

Lista de Símbolos, Siglas e Abreviaturas

Caracteres latinos

\mathbf{a}_i	Gradiente das restrição c_i ; $\mathbf{a}_i = \nabla c_i(\mathbf{b})$
A	Área da seção transversal
A_i	Área da seção transversal do elemento i
\mathbf{A}	Matriz dos gradientes das restrições
b	Variável de projeto
b_0	Aproximação inicial da diagonal da Hessiana
b_i	Termos independentes das restrições
b_z, g_z	Parâmetros do algoritmo SQP
\mathbf{b}	Vetor de variáveis: aleatórias ou de projeto, vetor dos coeficientes das forças de massa
\mathbf{b}_0	Vetor inicial das variáveis de projeto
\mathbf{B}	Aproximação da Hessiana, matriz que relaciona deslocamentos e deformações
\mathbf{B}^0	Parcela constante da matriz \mathbf{B}
\mathbf{B}^{nl}	Parcela linear da matriz \mathbf{B}
$\bar{\mathbf{B}}$	Matriz que relaciona os incrementos de deslocamento e deformações; $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^{nl}$
c	Parâmetro de penalidade
$c_i(\cdot)$	Restrição do problema de otimização
\mathbf{c}	Vetor das restrições
C	Confiabilidade; $C = 1 - P_f$
\mathbf{C}	Matriz diagonal contendo os valores das restrições, constante da equação de restrição (determinação do caminho de equilíbrio)
\mathbf{d}	Direção de busca
\mathbf{D}	Matriz constitutiva
Δl	Comprimento de arco da trajetória de equilíbrio
E	Módulo de elasticidade
$E(\cdot)$	Valor médio, média, ou valor esperado
$f(\cdot)$	Função objetivo
\mathbf{f}	Vetor de forças internas do elemento
f_X	Função densidade de probabilidade (PDF); $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
\mathbf{F}	Vetor de forças internas
F_X	Função cumulativa de distribuição (CDF)
$g_i(b, \mathbf{q}(b))$	Restrição i no problema de otimização
\mathbf{g}	Gradiente da função objetivo; $\mathbf{g} = \nabla f(\cdot)$
$G(\mathbf{u}), g(\mathbf{x})$	Função de performance; a falha é caracterizada por $G(\mathbf{u}) < 0, g(\mathbf{x}) < 0$
\mathbf{h}	Vetor de variáveis de projeto; $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$
H	Deslocamento generalizado

Caracteres latinos (continuação)

$H^{(\omega+1)}, k$	Constantes da equação de restrição (determinação do caminho de equilíbrio)
\mathbf{H}	Hessiana da função objetivo; $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\cdot)$
$I(\mathbf{u})$	Função indicadora; $I(\mathbf{u}) = 1$ se $g(\mathbf{x}) \leq 0$ e $I(\mathbf{u}) = 0$ nos outros casos
$\mathbf{J}_{\mathbf{u}, \mathbf{x}}$	Jacobiano da transformação probabilística
k_a, k_e, k_f	Parâmetros do algoritmo de pontos interiores
\mathbf{K}^0	Matriz de rigidez elástica linear padrão
\mathbf{K}^σ	Matriz de rigidez geométrica (ou de tensões iniciais)
\mathbf{K}^{nl}	Matriz de rigidez de <i>deslocamentos iniciais</i>
L	Comprimento do elemento
$\mathcal{L}(\cdot)$	Função Lagrangeana
\mathbf{L}_o	Matriz triangular inferior da decomposição de Cholesky da matriz de correlação \mathbf{R}_o
n_r	Número de iterações para o reinício da aproximação da Hessiana
ncc	Número de casos de carregamento
nr	Número de restrições
nvp	Número de variáveis de projeto
N_d	Número de iterações desejadas para cada incremento
N_i	Função de forma
tN	Número de iterações que foram necessárias para convergir no passo de carga anterior
\mathbf{N}	Matriz das funções de forma
$p(t)$	Função unidimensional utilizada na busca linear
P	Carga concentrada
$P(\cdot)$	Função de probabilidade
P_f	Probabilidade de falha
\tilde{q}	Campo de deslocamentos
\mathbf{q}	Vetor de deslocamentos nodais
\mathbf{q}_g	Parcela de $\delta \mathbf{q}$ referente às forças de referência \mathbf{Q}_{ref}
\mathbf{q}_r	Parcela de $\delta \mathbf{q}$ referente às forças de residuais \mathbf{R}
\mathbf{q}_t	Vetor de deslocamentos tangenciais
\mathbf{Q}	Vetor de cargas externas
\mathbf{Q}_{ref}	Vetor de cargas externas de referência
r_i	Fatores de penalidades na busca linear
\mathbf{R}	Vetor resíduo nodal, matriz de correlação
\mathbf{R}_o	Matriz de correlação modificada
$\text{sign}(\cdot)$	Sinal da função: ± 1
t	Tamanho do passo a ser dado ao longo da direção de busca
t_i	Força de tração atuando na superfície Γ_t
tol_1	Tolerância para convergência do algoritmo SQP
tol_2	Tolerância para violação de restrições do algoritmo SQP
tol_3	Tolerância para convergência do algoritmo IP
\mathbf{T}	Transformação de \mathbf{U} para \mathbf{X}

Caracteres latinos (continuação)

u, v, w	Componentes do campo de deslocamentos
\mathbf{u}	Variáveis aleatórias normais padrão correlacionadas; $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$
$\mathbf{u}_{G(\mathbf{u})=0}^*$	Ponto mais provável de falha (MPP) na formulação RIA.
$\mathbf{u}_{\beta=\beta_t}^*$	MPP na formulação PMA.
V	Volume
dV	Elemento diferencial de volume
$\text{Var}(X)$	Variância de X ; $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$
\mathbf{v}	Autovetor associado com o autovalor nulo da matriz \mathbf{K} , modo de flambagem da estrutura
\mathbf{x}	Vetor de variáveis aleatórias; $\mathbf{x} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$
X	Variável aleatória
z_1, z_2, z_3	Coordenadas cartesianas
z_i^j	Coordenada na direção i do nó j
\mathbf{z}	Variáveis aleatórias normais padrão não correlacionadas; $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$
\mathbf{W}^*	Hessiana da função Lagrangeana; $\mathbf{W}^* = \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{b}^*)$
Y	Variável aleatória auxiliar; $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Caracteres gregos

α	Seqüência de valores utilizados na busca linear
α_i	Cosseno diretor com relação a variável u_i do vetor normal a superfície de falha no ponto de projeto e no espaço das variáveis reduzidas
β	Índice de confiabilidade; $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$
β_t	Índice de confiabilidade alvo
$\delta(\cdot)$	Correção iterativa, indicador variacional
$\Delta(\cdot)$	Perturbação finita, incremento
δ_X	Coefficiente de variação de X ; $\delta_X = \text{c.o.v.} = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$
ϵ	Vetor das deformações
ϵ_{ij}	Deformações de Green-Lagrange
η	Parâmetros determinísticos
γ	Parâmetro de controle na busca linear
$\Gamma(x)$	Função Gamma
Γ_t	Superfície
λ	Fator de carga, parâmetro da distribuição Lognormal
Λ	Matriz diagonal para a qual $\Lambda_{ii} = \kappa_i$
μ	Média dos parâmetros randômicos \mathbf{x} ; $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$
κ	Multiplicadores de Lagrange
μ_X	Média da variável aleatória X
$\nabla(\cdot)$	Operador gradiente
$\Phi(\cdot)$	Função de distribuição cumulativa normal padrão
ρ	Coefficiente de deflexão da direção de busca, massa específica, coeficiente de correlação

Caracteres gregos (continuação)

σ	Vetor das tensões
θ	Parâmetros das variáveis randômicas (média e desvio padrão)
φ	Função densidade de probabilidade normal padrão
φ_2	Função densidade de probabilidade bidimensional normal padrão
ξ	Parâmetro da distribuição Lognormal
ζ_1	Fator de convergência baseado em relações de força
ζ_2	Fator de convergência baseado em relações de deslocamentos
ζ	Tolerância ao resíduo requerida no processo de convergência
σ_X	Desvio padrão de X ; $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$
ρ_o	Coefficiente de correlação aproximado

Sobrescritos e Subscritos

${}^t(\cdot)$	Função avaliada no instante t
${}^{t+\Delta t}(\cdot)$	Função avaliada no instante $t + \Delta t$
$(\cdot)^{(\omega)}$	Função avaliada no iteração ω
$(\cdot)^*$	Função avaliada no ponto crítico ou no ponto ótimo
$(\cdot)^T$	Transposta do vetor ou matriz
$(\cdot)_{ij}$	Notação indicial
$(\cdot)^l$	Limite inferior da variável de projeto
$(\cdot)^u$	Limite superior da variável de projeto
$(\cdot)^{-1}, [\cdot]^{-1}$	Inversa de uma matriz

Siglas e Abreviaturas

AMV	Método Valor Médio Avançado (do inglês <i>Advanced Mean Value methods</i>)
ASM	Método Adjunto de Sensibilidade (do inglês <i>Adjoint System Method</i>)
CDF	Função Cumulativa de Distribuição (do inglês <i>Cumulative Distribution Function</i>)
DDM	Método da Diferenciação Direta (do inglês <i>Direct Differentiation Method</i>)
DDO	Otimização Determinística (do inglês <i>Deterministic Design Optimization</i>)
DEC	Departamento de Engenharia Civil
DEM	Departamento de Engenharia Mecânica
DLM	Método de Duplo Laço (do inglês <i>Double-loop RBDO methods</i>)

Siglas e Abreviaturas (continuação)

DSA	Análise de Sensibilidade (do inglês <i>Design Sensitivity Analysis</i>)
FEA	Análise de Elementos Finitos (do inglês <i>Finite element Analysis</i>)
FORM	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (do inglês <i>First Order Reliability Method</i>)
GDCM	Método do Controle de Deslocamento Generalizado (do inglês <i>Generalized Displacement Control Method</i>)
GL	Deformações de Green-Lagrange
GSP	Parâmetro de Rigidez Geral (do inglês <i>General Stiffness Parameter</i>)
HLRF	Algoritmo de Hasofer–Lind–Rackwitz–Fiessler
IP	Algoritmo de Pontos Interiores (do inglês <i>Interior Point</i>)
IRA	Problema de Confiabilidade Inverso (do inglês <i>Inverse Reliability Analysis</i>)
IS	Amostragem por Pontos de Importância (do inglês <i>Importance Sampling</i>)
KKT	Karush–Kuhn–Tucker
LCP	Problema Linear Complementar
MCS	Simulação de Monte Carlo (do inglês <i>Monte Carlo Simulation</i>)
MDF	Método das Diferenças Finitas
MPP	Ponto Mais Provável de Falha (do inglês <i>Most Probable Point</i>)
MVFOSM	Método Valor Médio Primeira Ordem Segundo Momento (do inglês <i>Mean-Value-First-Order Second-Moment</i>)
MV	Método Valor Médio (do inglês <i>Mean Value method, ou MV-FOSM</i>)
NLPQLP	Algoritmo de Programação Quadrática Sequencial
OOP	Programação Orientada a Objetos (do inglês <i>Object Oriented Programming</i>)
OPT	Módulo de Otimização
PBDO	Otimização Baseada em Possibilidade (do inglês <i>Possibility-Based Design Optimization</i>)
PDF	Função Densidade de Probabilidade (do inglês <i>Probability Density Function</i>)
PK2	Tensões de Piola-Kirchhoff II
PMA	Formulação de Medida de Performance (do inglês <i>Performance Measure Approach</i>)
PM	Programação Matemática
PQ	Programação Quadrática
PSF	Fator de Suficiência Probabilística (do inglês <i>Probability Sufficiency Factor</i>)

Siglas e Abreviaturas (continuação)

RBDO	Otimização Baseada em Confiabilidade (do inglês <i>Reliability Based Design Optimization</i>)
RIA	Formulação do Índice de Confiabilidade (do inglês <i>Reliability Index Approach</i>)
RLA	Referencial Lagrangeano Atualizado
RLT	Referencial Lagrangeano Total
RSA	Aproximação por Superfície de Resposta (do inglês <i>Response Surface Approximation</i>)
SORM	Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (do inglês <i>Second Order Reliability Method</i>)
SQP	Programação Quadrática Seqüencial (do inglês <i>Sequential Quadratic Programming</i>)
c.o.v	Coefficiente de Variação