3
Resolvendo o modelo

Primeiramente, cada agente vota no imposto a ser pago por todos, escolhendo simultaneamente quantas crianças ter e em que sistema escolar matriculá-las. Deste modo, resolverei o problema do agente por indução retroativa, uma vez que vota-se no imposto levando-se em consideração qual será a escolha ótima de fecundidade e de educação para cada nível de imposto.

3.1
Escolha da Fecundidade

Resolvendo por indução retroativa, tem-se, na segunda etapa, o agente escolhendo simultaneamente ou $h^i_{t+i+1} = h^{pub}_{t+i+1}$ e $n^*_{t+i} = \mathbf{n}^{*pub}_{t+i}(\mathbf{t})$ ou $h^i_{t+i+1} = h^{priv}_{t+i+1}$ e $n^*_{t+i} = \mathbf{n}^{*priv}_{t+i}(\mathbf{t})$

Resolvamos o problema de maximização do agente, condicional ao tipo de educação escolhido pelo agente para seus filhos.

O problema do agente que escolhe o ensino privado para os filhos é:

$$\underset{n_{t+i}}{Max}\ U^{priv}_{t+i} = ln\ c_{t+i} + \gamma ln(n_{t+i} h^{priv}_{t+i+1})$$

$$sujeito\ a \quad c_{t+i} = \pi h^i_{t+i}(1 - n_{t+i}\phi) - (n_{t+i}m) - t \qquad (5.1)$$

$$h^{priv}_{t+i+1} = \mu(\widetilde{q}_{t+i}) = \mu(m) \qquad (1.1)$$

que se torna então

$$\underset{n_{t+i}}{Max}\ = ln(\pi h^j_{t+i}(1 - n_{t+i}\phi) - (n_{t+i}m) - t) + \gamma ln(n_{t+i}(\mu m))$$

As condições de primeira ordem para a fecundidade, supondo solução interior, implicam que: $\mathbf{n}^{*priv}_{t+i}(\mathbf{t}) = \frac{\gamma(\pi h^j_{t+i} - t)}{(1+\gamma)(\pi h^j_{t+i}\phi + m)}$ (6.1)

As condições de segunda ordem para a fecundidade confirmam $\mathbf{n}^*_t(\mathbf{t})$ como um máximo.

O problema do agente que escolhe o ensino público para o filho é:

$$\underset{n_{t+i}}{Max} U^{pub}_{t+i} = ln\ c_{t+i} + \gamma ln(n_{t+i} h^{pub}_{t+i+1})$$

$$sujeito\ a \quad \pi h^j_{t+i} = c_{t+i} + \pi h^j_{t+i} n_{t+i}\phi + t \qquad (5.2)$$

$$h^{pub}_{t+1+i} = \mu(\hat{q}_{t+i}) = \mu(\tau_{t+i}) \qquad (1.2)$$

que se torna então

$$\underset{n_t}{Max}\ U^{pub}_t = ln(\pi h^i_t(1 - n_t\phi) - t) + \gamma ln(n_t(\mu\tau_t))$$

A condição de primeira ordem para a fecundidade, supondo solução interior, implica que: $\mathbf{n}^{*pub}_{t+i}(\mathbf{t}) = \frac{\gamma(\pi h^j_{t+i}-t)}{(1+\gamma)(\pi h^j_{t+i}\phi)}$ (6.2)

As condições de segunda ordem para a fecundidade confirmam $\mathbf{n}^{*}_{t+i}(\mathbf{t})$ como um máximo.

Como podemos observar, a escolha da fecundidade depende: (i) do peso relativo que as crianças têm na função de utilidade dos pais ($\frac{\gamma}{1+\gamma}$), que representa a importância dada às crianças; (ii) da renda líquida ($\pi h^j_{t+i}-t$), que representa o que resta da renda após o imposto para ser gasto entre despesas relativas às crianças ou despesas relativas ao próprio agente; (iii) do custo marginal de uma criança ($\pi h^j_{t+i}\phi$ ou $\pi h^j_{t+i}\phi+m$), que corresponde ao "preço" de uma criança.

Proposição (sumário)

A cada período, os agentes escolhem simultaneamente entre

$h^j_{t+i+1} = h^{pub}_{t+i+1}$ e $n^*_{t+i}= \mathbf{n}^{*pub}_{t+i}(\mathbf{t}) = \frac{\gamma(\pi h^j_{t+i}-t)}{(1+\gamma)(\pi h^j_{t+i}\phi)}$ ou

$h^j_{t+i+1} = h^{priv}_{t+i+1}$ e $n^*_{t+i} = \mathbf{n}^{*priv}_{t+i}(\mathbf{t}) =\frac{\gamma(\pi h^j_{t+i}-t)}{(1+\gamma)(\pi h^j_{t+i}\phi+m)}$

Proposição 1

O número ótimo de filhos é, para ambas escolhas educacionais,

(i) positivamente relacionado com quanto o agente se importa com crianças (γ);

(ii) negativamente relacionado com o custo da oportunidade de ter cada criança (ϕ) e com o preço da educação privada (m), para a educação privada;

(iii) negativamente relacionado com o imposto a ser pago (t), que reflete um custo indireto da educação pública.

(iv) positivamente relacionado com o capital humano (h^j_{t+i}) e o retorno à educação (π);

Prova Temos apenas que examinar a estática comparativa. Uma vez que, devido à restrição orçamentária, $(\pi h^j_{t+i} - t) > 0$,

(i) $\frac{d\mathbf{n}^{*pub}_{t+i}}{d\gamma} = \frac{d\mathbf{n}^{*priv}_{t+1}}{d\gamma} = \frac{(\pi h^j_{t+i}-t)}{(1+\gamma)^2(\pi h^j_{t+i}\phi+m)} > 0$

(ii) $\frac{d\mathbf{n}^{*pub}_{t+i}}{d\phi} = -\frac{\gamma(\pi h^j_{t+i}-t)}{(1+\gamma)\pi h^j_{t+i}\phi^2} < 0$, $\frac{d\mathbf{n}^{*priv}_{t+i}}{d\phi} = -\frac{\gamma(\pi h^j_{t+i}-t)(\pi h^j_{t+i})}{(1+\gamma)[(\pi h^j_{t+i}\phi+m)]^2} < 0$

e $\frac{d\mathbf{n}^{*priv}_{t+i}}{dm} = -\frac{\gamma(\pi h^j_{t+i}-t)}{(1+\gamma)m^2} < 0$

(iii) $\frac{d\mathbf{n}^{*pub}_{t+i}}{dt} = -\frac{\gamma}{(1+\gamma)(\pi h^j_{t+i}\phi)} < 0$ e $\frac{d\mathbf{n}^{*priv}_{t+i}}{dt} = -\frac{\gamma}{(1+\gamma)(\pi h^j_{t+i}\phi+m)} < 0$

(iv) $\frac{d\mathbf{n}^{pub*}_{t+i}}{dh^j_{t+1}} = \frac{\gamma}{(1+\gamma)}\frac{t}{(\pi h^{j\,2}_{t+i}\phi)} > 0$, $\frac{d\mathbf{n}^{priv*}_{t+i}}{dh^j_{t+i}} = \frac{\gamma}{(1+\gamma)}\frac{\pi(m+\phi t)}{(\pi h^j_{t+i}\phi+m)^2} > 0$

e $\frac{d\mathbf{n}^{pub}_{t+i}}{d\pi} = \frac{\gamma}{(1+\gamma)}\frac{t}{\pi} > 0$

A intuição para a proposição 1 é a seguinte. (i) é razoavelmente intuitivo, uma vez que, quanto mais os pais derivam utilidade de crianças, mais crianças eles demandarão, *ceteris paribus*. (ii) refere-se a um efeito-preço. Qualquer aumento no custo de uma criança (seja o custo de oportunidade ou o custo monetário) reduz a demanda por crianças, uma vez que uma criança é um bem comum. (iii) diz respeito a um efeito-renda negativo, e pode igualmente ser encarado como o *trade-off* qualidade-quantidade de crianças, vez que quanto mais se decidir investir no capital humano dos filhos, através de impostos mais elevados, menos filhos se decidirá ter. Em (iv), ambas as relações expressam um efeito-renda, que é positivo uma vez que as crianças são um bem normal. Como veremos em seguida, a interação entre a qualidade e a quantidade de crianças ocorre neste modelo, principalmente na escolha entre os sistemas de educação. Dada uma escolha particular de educação, temos o efeito-renda dominando o efeito-substituição no que concerne à demanda por crianças, e conseqüentemente a fecundidade ótima crescerá com a renda.

Proposição 2

O número ótimo de crianças para o agente que escolhe matricular os filhos na educação privada é menor do que o número ótimo de filhos do agente que escolhe matricular os filhos na educação pública. Prova: É imediata a constatação que, uma vez que $m > 0$ e $(\pi h_t^i - t) > 0$, ocorre que

$$\mathbf{n}_{t+i}^{priv\,*}(\mathbf{t}) = \frac{\gamma(\pi h_{t+i}^j - t)}{(1+\gamma)(\pi h_{t+i}^j \phi + m)} < \frac{\gamma(\pi h_{t+i}^j - t)}{(1+\gamma)(\pi h_{t+i}^j \phi)} = \mathbf{n}_{t+i}^{pub\,*}(\mathbf{t})$$

Essa inequação expressa o diferencial da fecundidade entre diferentes grupos na sociedade, e acontece devido ao fato que o custo de cada criança que estuda em uma escola privada é mais elevado do que o custo de uma criança matriculada em uma escola pública. Os pais aumentam a fecundidade já que a educação é fornecida gratuitamente, enquanto os que decidem aumentar o capital humano das suas crianças pagando uma mensalidade de escola privada decidem ter poucos filhos[1]. É o clássico *trade-off* (ou interação) descrito por Becker entre a quantidade e a qualidade na demanda por crianças.

3.2
Escolha Educacional

Comparando a utilidade indireta de um pai que decide matricular os filhos no sistema escolar público com a de decidir fazê-lo no sistema escolar privado, isto é, a utilidade indireta dada pelos dois menus alternativos

[1]A geração do diferencial de fecundidade depende da hipótese de que o custo da educação por filho independe do salário dos pais, o que temos através da hipótese de que é a escola e não os pais que fornecem toda a educação.

$(h_{t+i+1}^{j}, n_{t+i}^{*}) = (h_{t+i+1}^{pub}, \mathbf{n}_{t+i}^{*pub})$ e $(h_{t+i+1}^{j}, n_{t+i}^{*}) = (h_{t+i+1}^{priv}, \mathbf{n}_{t+i}^{*priv})$, chegamos à seguinte regra de decisão:

para uma qualidade do sistema escolar público inferior a $\bar{\tau}_{t+i} = \frac{(\pi h_{t+i}^{j}\phi)m}{(\pi h_{t+i}^{j}\phi+m)}$, o agente j estará em melhor situação escolhendo $(h_{t+i+1}^{j}, n_{t+i}^{*}) = (h_{t+i+1}^{priv}, \mathbf{n}_{t+i}^{*priv})$ (7.1),

e para uma qualidade do sistema escolar público superior a $\bar{\tau}_{t+i} = \frac{(\pi h_{t+i}^{j}\phi)m}{(\pi h_{t+i}^{j}\phi+m)}$, o agente j estará em melhor situação escolhendo $(h_{t+i+1}^{j}, n_{t+i}^{*}) = (h_{t+i+1}^{pub}, \mathbf{n}_{t+i}^{*pub})$ (7.2).

3.3 Escolha do Imposto

Na primeira etapa, o agente vota em um nível de imposto t a ser cobrado de todos, levando em consideração que o nível escolhido do imposto t resultante da eleição definirá a qualidade das escolas públicas e, conseqüentemente, suas escolhas educacionais e de fecundidade.

Por um critério de realismo e tratabilidade, impõem-se as seguintes hipótese e condições:

Hipótese 1 (Tecnologias Educacionais Discretas)

Vamos supor agora que há somente três tipos das tecnologias educacionais a serem oferecidas, cada uma fornecendo uma qualidade diferente de educação. Isso significa que a qualidade do sistema escolar público, e conseqüentemente as despesas públicas com educação, podem assumir somente valores discretos, que são $\{\tau^{low}, \tau^{med}, \tau^{high}\}$, correspondendo aos impostos $\{t^{l}, t^{m}, t^{h}\}$, respectivamente.

As seguintes condições nos restringirão a um subconjunto particular do espaço de equilíbrios possíveis, uma vez que estou somente interessado aqui nos casos mais realísticos e práticos. Casos mais gerais estão no apêndice.

Condição 1

$m > \tau^{med} > \tau^{low}$

Se $h_{t+i}^{pub} = \tau^{low}$ ou $h_{t+i}^{pub} = \tau^{med}$, esta condição implica esse $h_{t+i}^{priv} > h_{t+i}^{pub}$. Intuitivamente, significa simplesmente que a qualidade da educação privada é mais elevada do que sua alternativa pública, à exceção do caso onde o ensino público alcançou o nível de qualidade mais elevado possível.

Quando a condição 1 é válida, temos $\frac{(\pi h_{t+i}^{priv}\phi)m}{(\pi h_{t+i}^{priv}\phi+m)} > \frac{(\pi h_{t+i}^{pub}\phi)m}{(\pi h_{t+i}^{pub}\phi+m)}$. Assim, podemos ter três situações possíveis, com respeito à qualidade do sistema educacional público, determinadas pelo imposto escolhido.

Vamos definir t^l, t^m e t^h como se segue:
$t = t^h$ se $\tau_{t+i}(t) = \tau^{high} \in [\frac{(\pi h^{priv}_{t+i}\phi)m}{(\pi h^{priv}_{t+i}\phi+m)}, \infty)$
$t = t^m$ se $\tau_{t+i}(t) = \tau^{med} \in [\frac{(\pi h^{pub}_{t+i}\phi)m}{(\pi h^{pub}_{t+i}\phi+m)}, \frac{(\pi h^{priv}_{t+i}\phi)m}{(\pi h^{priv}_{t+i}\phi+m)})$
$t = t^l$ se $\tau_{t+i}(t) = \tau^{low} \in [0, \frac{(\pi h^{pub}_{t+i}\phi)m}{(\pi h^{pub}_{t+i}\phi+m)})$

Condição 2 (Capacidade de pagar uma escola privada)
Se $h^{pub}_{t+i} = \tau^{low}$ ou $h^{pub}_{t+i} = \tau^{med}$,
então $m > \frac{\pi h^{pub}_{t+i}(1-n_{t+i}\phi)-t_{t+i}}{n_{t+i}}$

Esta suposição significa simplesmente que, a menos que o ensino público alcance um nível muito elevado de qualidade, aqueles com h^{pub}_{t+i} não terão uma renda suficientemente alta para ter recursos para arcar com mensalidades de escolas privadas.

Ambas as condições nos permitem o foco no caso onde o capital humano acumulado no sistema escolar público é mais baixo do que o acumulado no sistema privado, e tão baixo que um agente que estude no sistema público não pode ter recursos suficientes para matricular suas crianças no privado. Como a qualidade da educação básica privada é em média claramente melhor do que sua alternativa pública, na maioria de países em desenvolvimento as mensalidades cobradas pelas escolas privadas são demasiadamente caras para os pobres, e o mercado de crédito é muito restrito. No que concerne a questões educacionais, este caso é o mais realista de todos.

Usando (6) e (7) para chegar às utilidades indiretas referentes às diferentes escolhas do imposto, e realizando então uma comparação entre elas, a fim de compreender como a utilidade é afetada pelas diferentes escolhas, podemos mapear a preferência de um indivíduo sobre diferentes impostos. Considerando questões ligadas tanto a preferências quanto a factibilidade orçamentária, observa-se que, quando as condições 1 e 2 são válidas, podemos encarar a escolha do imposto como uma escolha entre
$\{V^l_{t+i} = \left[\tau^{low}\right]^\gamma \left[\pi h^{pub}_{t+i} - t^l_{t+i}\right]^{1+\gamma}; V^m_{t+i} = \left[\tau^{med}\right]^\gamma \left[\pi h^{pub}_{t+i} - t^m_{t+i}\right]^{1+\gamma};$
$V^h_{t+i} = \left[\tau^{high}\right]^\gamma \left[\pi h^{pub}_{t+i} - t^h_{t+i}\right]^{1+\gamma}\}$
para o caso daqueles com capital humano h^{pub}_{t+i} e entre

$\{V^{l\mid priv}_{t+i} = \frac{[m]^\gamma\left[\pi h^{pub}_{t+i}-t^l_{t+i}\right]^{1+\gamma}}{\left[\pi h^{priv}_{t+i}\phi+m\right]^\gamma}; V^{h\mid priv}_{t+i} = \frac{\left[\tau^{high}\right]^\gamma\left[\pi h^{pub}_{t+i}-t^h_{t+i}\right]^{1+\gamma}}{\left[\pi h^{priv}_{t+i}\phi\right]^\gamma}\}$
para o caso daqueles com capital humano h^{priv}_{t+i},

onde podemos ver claramente que cada opção contém as duas principais conseqüências da decisão de voto, que são a qualidade da escola que será usufruída pelos descendentes diretos ($\tau_{t+i}(t^k)$) e a renda líquida do imposto a ser pago para financiar esta qualidade $(\pi h^j_{t+i} - t^k)$, com uma ponderação que corresponde ao peso que os agentes dão às variáveis que dizem respeito às crianças vis-à-vis seu próprio consumo $(\frac{\gamma}{1+\gamma})$. E no caso daqueles com h^{priv}_{t+i}, temos um termo adicional que representa os custos adicionais de cada criança (custos de oportunidade e mensalidade escolar) resultantes de cada escolha educacional $((\pi h^{priv}_{t+i}\phi + m)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$ vs $(\pi h^{priv}_{t+i}\phi)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}})$. Como toda decisão de investimento, comparam-se os diferentes investimentos potenciais no capital humano dos filhos, considerando-se os benefícios e os custos de cada alternativa. Da comparação entre as funções políticas $V's$ em cada período obtém-se a escolha do imposto do indivíduo.

O esforço seguinte é o de determinar o valor inicial de cada nível do imposto e sua evolução. Temos os seguintes sistemas de equações, que incluem a equação que define a quantidade de crianças matriculadas no sistema escolar público e a equação de orçamento equilibrado do governo rearranjada.

$N^{pub/\ l}_{t+i} = P^{pub}_{t+i}\frac{\gamma(\pi h^{pub}_{t+i} - t^l_t)}{(1+\gamma)(\pi h^{pub}_{t+i}\phi)}$ (2.1) e $t^l_{t+i} = \tau^{low}\frac{N^{pub/\ l}_{t+i}}{P^{total}_{t+i}}$ (3.1)

$N^{pub/\ m}_{t+i} = P^{pub}_{t+i}\frac{\gamma(\pi h^{pub}_{t+i} - t^m_{t+i})}{(1+\gamma)(\pi h^{pub}_{t+i}\phi)}$ (2.2) e $t^m_{t+i} = \tau^{med}\frac{N^{pub/\ m}_{t+i}}{P^{total}_{t+i}}$ (3.2)

$N^{pub/\ h}_{t+i} = P^{pub}_t\frac{\gamma(\pi h^{pub}_{t+i} - t^h_{t+i})}{(1+\gamma)(\pi h^{pub}_{t+i}\phi)} + P^{priv}_t\frac{\gamma(\pi h^{priv}_{t+i} - t^h_{t+i})}{(1+\gamma)(\pi h^{priv}_{t+i}\phi)}$ (2.3) e $t^h_{t+i} = \tau^{high}\frac{N^{pub/\ h}_{t+i}}{P^{total}_{t+i}}$
(3.3)

que nos permite encontrar os valores iniciais dos diferentes níveis de impostos.

De (2.1) e (3.1) encontramos
$t^l_{t+i} = \frac{\tau^{low}P^{pub}_{t+i}\gamma\pi h^{pub}_{t+i}}{P^{total}_{t+i}(1+\gamma)(\pi h^{pub}_{t+i}\phi) + \tau^{low}P^{pub}_{t+i}\gamma}$ e $N^{pub/\ l}_{t+i} = \frac{\gamma P^{pub}_{t+i}P^{total}_{t+i}\pi h^{pub}_{t+i}}{(1+\gamma)P^{total}_{t+i}\pi h^{pub}_{t+i}\phi + \gamma\tau^{low}P^{pub}_{t+i}}$

De (2.2) e (3.2) encontramos
$t^m_{t+i} = \frac{\tau^{med}P^{pub}_{t+i}\gamma\pi h^{pub}_{t+i}}{P^{total}_{t+i}(1+\gamma)(\pi h^{pub}_{t+i}\phi) + \tau^{med}P^{pub}_{t+i}\gamma}$ e $N^{pub/\ m}_{t+i} = \frac{\gamma P^{pub}_{t+i}P^{total}_{t+i}\pi h^{pub}_{t+i}}{(1+\gamma)P^{total}_{t+i}\pi h^{pub}_{t+i}\phi + \gamma\tau^{med}P^{pub}_{t+i}}$

De (2.3) e (3.3) encontramos
$t^h_t = \frac{\gamma\tau^{high}P^{total}_{t+i}(\pi h^{priv}_{t+i}h^{pub}_{t+i})}{(1+\gamma)P^{total}_{t+i}(\pi h^{priv}_{t+i}h^{pub}_{t+i})\phi + \gamma\tau^{high}(P^{pub}_{t+i}h^{priv}_{t+i} + P^{priv}_{t+i}h^{pub}_{t+i})}$ e
$N^{pub/\ h}_t = \frac{\gamma P^{total}_{t+i}P^{total}_{t+i}\pi h^{priv}_{t+i}h^{pub}_{t+i}}{(1+\gamma)P^{total}_{t+i}\pi h^{priv}_{t+i}h^{pub}_{t+i}\phi + \gamma\tau^{high}(P^{pub}_{t+i}h^{priv}_{t+i} + P^{priv}_{t+i}h^{pub}_{t+i})}$

Simples cálculos de consistência mostram que $t^l_t < \pi h^{pub}_t$ e $t^m_t < \pi h^{pub}_t$ e que $t^h_t < \pi h^{pub}_t$ condicional a $\pi h^{priv}_t h^{pub}_t\phi > \frac{\gamma}{(1+\gamma)}\tau^{high}\frac{P^{priv}_t}{P^{total}_t}(h^{priv}_t - h^{pub}_t)$.

Além disso, como esperado, $t^h_t > t^m_t > t^l_t$. Isso se refere somente aos valores iniciais, mas os testes de consistência são realizados para cada período no momento apropriado.

Visto que o objetivo ao se votar em um imposto é a qualidade da educação pública, podemos trabalhar como se as pessoas votassem diretamente nas despesas públicas com educação, com o imposto sendo determinado pelo orçamento equilibrado do governo, vez que este tem sempre de estar em equilíbrio. Em equilíbrio t tem que ser tal que a equação de orçamento equilibrado do governo $\tau_{t+i}(t_{t+i})N_{t+i}^{pub} = P_{t+i}^{total}t_{t+i}$ seja satisfeita. Então, uma vez que $\tau_{t+i}(t_{t+i})$ assume somente valores discretos, com a qualidade da educação permanecendo constante em cada um de seus níveis, temos o nível de imposto a ser pago evoluindo em resposta às mudanças demográficas, de acordo com a seguinte equação: $t_{t+i} = \bar{\tau}\frac{N_{t+i}^{pub}}{P_{t+i}^{total}}$. Isto significa que, se N_{t+i}^{pub}cresce mais rápido do que P_{t+i}^{total}, então o imposto crescerá no tempo, e vice-versa.