2
Referencial Teórico

Como hipótese inicial temos o conceito de que os indivíduos buscam tomar decisões de investimentos que maximizem seu bem estar ou consumo ao longo do tempo. Nesse sentido, a análise financeira tem por objetivo oferecer os meios para tornar flexíveis e corretas as decisões de investimento no momento mais propício e ao mesmo tempo com a compensação mais equilibrada entre retorno e risco.

Além disso, o processo de avaliação de investimento envolve pontos subjetivos que acabam impactando o valor final obtido. Da mesma forma, vários fatores influenciam as decisões de investimento como, demanda, preços, cenário macroeconômico (taxa de juros, taxa de câmbio, inflação), entre outros. Como resposta a esse ambiente com incertezas, a evolução das teorias de precificação de opções, em finanças corporativas, inseriu na teoria de avaliação de investimento um novo ferramental. O principal objetivo deste, é precificar o valor oriundo da incerteza e da volatilidade, o que amplia os parâmetros da geração de valor ao acrescentar o conceito de flexibilidade. Assim, a avaliação de investimento utilizando opções reais, em uma definição restrita, seria uma extensão da teoria das opções financeiras aplicada à avaliação de ativos não-financeiros.

Amram e Kulatilaka (1999), sugerem que o caminho que vai das opções financeiras às opções reais exige uma nova forma de pensar, de modo que haja uma ligação entre a disciplina dos mercados financeiros e as decisões de investimentos estratégicos das empresas. Nesse sentido, é aceito o fato de que a avaliação pelo método tradicional por fluxo de caixa descontado não contempla a flexibilidade disponível à empresa de adaptar ou abandonar uma decisão em um momento posterior no tempo, tendo em vista os fatos que foram ocorrendo após a decisão de investir. Sendo assim, a irreversibilidade considerada pelo fluxo de caixa descontado não representa a realidade dos tomadores de decisão. À medida que novas informações ficam disponíveis e a incerteza sobre o futuro se reduz, a empresa pode se utilizar da flexibilidade para alterar sua estratégia inicial, se beneficiando de oportunidades ou eliminando perdas que estão por vir.

Essa flexibilidade nas operações de uma empresa com relação aos seus investimentos “reais” faz com que a avaliação da decisão de investir se aproxime da teoria das opções financeiras. Dessa forma, uma opção de compra dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar um determinado ativo por um preço pré-definido em uma determinada data. Na mesma linha, uma opção de venda dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de vender um determinado ativo por um preço pré-estabelecido em uma determinada data. Além disso, ao se utilizar a teoria das opções reais para embasar uma decisão de investimento, é atribuído, da mesma forma que em uma opção de compra, um ganho potencial com perda limitada. Dessa forma, existem investimentos, que avaliados através da teoria de fluxo de caixa descontado têm resultado negativo, ou seja, o ato de investir não é a indicação resultante da análise. Contudo, esse investimento aparentemente sem atratividade pode-se tornar interessante no caso de se considerar o valor das flexibilidades inerentes ao projeto, vistas como prêmios pagos para se ter o direito de potenciais retornos.

Assim, a teoria de opções reais seria um poderoso complemento ao tradicional ferramental de valoração através do fluxo de caixa descontado. Nessa linha, Trigeorgis (1996) argumenta em favor de um critério estratégico, que reflita dois componentes de valor: o valor presente líquido tradicional de fluxos de caixa descontados (estático) e o valor da opção da flexibilidade (interações estratégicas).

2.1.
A Teoria das Opções Reais

2.1.1.
Histórico

Desde a primeira publicação do modelo de precificação de opções reais por Black Fisher e Scholes Myron (1972) os complexos modelos matemáticos da teoria financeira passaram a influenciar as práticas corporativas. O início da utilização da matemática mais complexa em finanças pode ser atribuído, segundo Merton (1998), a Louis Bachelier (1900) quando escreveu sua dissertação, na *Ecole Normale Supériure*, a cerca da teoria da especulação utilizando precificação de opções. Este trabalho foi inovador ao tratar de forma conjunta processos estocásticos e precificação de derivativos e títulos. Depois disso, os cálculos estocásticos passaram a ser muito desenvolvidos na década de quarenta e cinqüenta e se tornou essencial em trabalhos de finanças. Contudo, de acordo com Merton (1998), foi apenas nas décadas de cinqüenta e sessenta que essa teoria ganhou destaque com os trabalhos inovadores de Markowitz, Modigliane, Miller, Sharpe, Lintner, Fama e Samuelson.

Na década seguinte, os modelos teóricos de finanças ganharam sofisticação envolvendo dimensões intertemporais e incerteza, com cálculos estocásticos e equações diferenciais que são utilizados até hoje. A publicação do modelo de Black-Scholes (1972) disseminou os fundamentos da teoria de precificação de opções, sendo considerado ímpar no desenvolvimento e sofisticação das finanças corporativas. Merton (1973), ao solucionar de imediato o modelo proposto por Black and Scholes (1972), viabiliza a aplicação deste, e por isso alguns autores consideram correto nomear o modelo de Black-Scholes-Merton.

Em 1973 começou a operar a Bolsa de Opções de Chicago (CBOE - *Chicago Board Options Exchange*) que se destacou como a bolsa de maior movimento na negociação de opções (Hull, 2006). Em 1975 operadores da CBOE já estavam utilizando o modelo de Black-Scholes-Merton para precificar e proteger suas posições em opções.

É importante ressaltar que Black, Scholes e Merton já reconheceram em suas pesquisas que o arcabouço teórico para precificação de opções financeiras pode ser usado em muitos outros problemas de avaliação. Assim, a teoria não seria restrita apenas às opções financeiras e uma dessas aplicações não-financeiras seriam as opções reais.

2.1.2.
Opções Financeiras

As opções financeiras são um sub-grupo de instrumentos denominados derivativos. Os derivativos não possuem valor próprio, seu valor deriva do valor de outro ativo (ativo subjacente). Sua origem está na necessidade de reduzir as incertezas, gerando uma proteção às flutuações inesperadas dos ativos subjacentes.

Segundo Amram e Kulatilaka (1999), pode-se agrupar os derivativos em cinco tipos: contrato a termo, contrato futuro, swap, produtos combinados e opções. As opções diferem dos demais pois essas dão ao detentor o direito, mas não a obrigação de comprar ou vender algo em um período determinado. Nos demais derivativos, ao contrário, seus detentores têm a obrigação de comprar/vender os montantes estipulados no período pré-definido. Outra diferença importante entre as opções e os demais derivativos destacados acima está no custo inicial. Somente no caso das opções é exigido um prêmio inicial, o qual reflete o valor de sua flexibilidade.

A opção de compra ou *call* proporciona ao detentor o direito de comprar o ativo-objeto, até certa data, por determinado preço. Já a opção de venda ou *put* permite ao detentor o direito de vender o ativo-objeto, até certa data por determinado preço. O peço combinado para compra ou venda do ativo-objeto é chamado de preço de exercício ou *strike price*. A data final de compra ou venda do ativo-objeto é chama data de vencimento ou *maturity*. Se a opção só puder ser exercida na data do vencimento ela é denominada opção tipo européia, mas se a opção puder ser exercida a qualquer momento até a data de vencimento essa é denominada opção tipo americana.

De acordo com Hull (2006) o preço pago pelo comprador no momento da negociação de uma opção é dependente de seis fatores fundamentais: o valor do ativo-objeto (S), o preço de exercício (X), o tempo até o vencimento medido em anos (T), a taxa de juro do mercado livre de risco (r), a volatilidade do preço do ativo objeto (σ) e dividendos esperados até o vencimento da opção (D).

2.1.3. Volatilidade

A volatilidade é o fator mais importante no cálculo do preço de uma opção. A volatilidade é uma medida de freqüência e intensidade da flutuação de preços, permitindo a projeção da variância do preço do ativo no futuro. Quanto maior for a movimentação do mercado e dos ativos que o compõe, maior será o valor da opção sobre esses ativos.

Nesse sentido, segundo Natemberg (1994), "mudanças nas premissas sobre a volatilidade podem ter efeitos dramáticos no valor de uma opção, e a maneira que o mercado calcula esta volatilidade pode ter efeitos igualmente dramáticos em seu valor". Ainda, de acordo com Hull (2006), a volatilidade é crítica no cálculo do preço de uma opção, pois é a única variável que não pode ser observada diretamente no mercado.

Natemberg (1994) descreve os seguintes modelos de volatilidade:

- **Volatilidade Futura**: é a volatilidade que melhor descreve a distribuição futura de preços de um determinado ativo subjacente, e teoricamente, viabilizaria o cálculo mais preciso do preço da opção, quando utilizando um modelo de avaliação de opções. De forma prática, a volatilidade futura é aquela que todo operador de mercado gostaria de saber e obviamente esta volatilidade quase não é comentada, devido a impossibilidade de conhecer o futuro. O mercado pode desenvolver expectativas sobre inúmeros fatores que influenciam os preços, contudo existem informações que não podem ser antecipadas. Sendo assim, todos os demais métodos para calcular a volatilidade tentam se aproximar da volatilidade futura, que somente fica sendo conhecida *ex-post*.
- **Volatilidade Histórica**: mesmo não sendo possível prever o futuro, para utilizar-se de um modelo de avaliação de preços de opções, é preciso fazer estimativas com relação à volatilidade futura. Uma da possibilidade é através do uso de séries históricas. Hull[1], considera a volatilidade como sendo o desvio padrão dos retornos logarítmicos gerados pelo ativo subjacente em uma série regular de dados históricos. Definindo-se:

  $n+1$ número de observações

  S_i preço da ação no enésimo intervalo ($i = 1, 2, ..., n$)

  t intervalo de tempo em anos

[1] Para maiores informações acerca do desenvolvimento matemático, ver: Hull, J.C. Options, Futures and Other Derivatives . 6th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2006. p. 286.

$$u = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i\text{-}1}}\right) \quad \text{para } (i = 1, 2, ..., n)$$

Tem-se $S_i = S_{i\text{-}1}\, e^{u_i}$, em que u_i é o retorno continuamente capitalizado (não anualizado) da ação do enésimo intervalo. A estimativa mais usada para desvio padrão (S) dos valores de u_i segue:

$$S = \left\{\left(\frac{1}{(n\text{-}1)}\right)\times\left(u_i - \bar{u}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

, em que $\bar{u}$ é a média aritmética dos valores de u_i.

O desvio padrão de u_i também pode ser escrito como $\sigma(t)^{1/2}$, em que é possível perceber que a incerteza é maior quanto maior for o tempo estimado, e que o mesmo não é linear.

Hull (2006) sugere que a utilização do período de coleta de dados históricos deve ser igual ao período que se deseja realizar a aplicação. Além disso, sugere que se deve considerar apenas a quantidade de dias úteis para o cálculo da volatilidade, ou seja, que é preciso substituir no cálculo da volatilidade anual o fator 365 por 252.

Há muitas formas para se calcular a volatilidade histórica, contudo a maioria dos métodos depende de dois parâmetros: o período histórico sobre o qual a volatilidade será estimada e o intervalo de tempo entre as mudanças sucessivas de preços. Períodos históricos mais longos tendem a aumentar a média da volatilidade, enquanto períodos mais curtos podem revelar extremos desnecessários na volatilidade.

- **Volatilidade Implícita**: é a previsão de volatilidade de mercado, pois considera as expectativas que o mercado possui sobre a volatilidade futura, incorporando as informações conhecidas do passado. Foi visto que as volatilidades futura e histórica são diretamente associadas a um ativo subjacente, por outro lado a volatilidade implícita é associada ao preço da opção. Em outras palavras, a volatilidade implícita iguala o valor teórico de uma opção com o preço de mercado da mesma, obtendo assim o parâmetro da volatilidade.

- **Volatilidade Sazonal**: está diretamente associada ao movimento no mercado de alguns *commodities* como milho, soja, café..., que apresentam variações nos preços mais sensíveis às variações climáticas ao longo do ano. Dessa forma, a volatilidade de alguns ativos aumenta ou diminui também como conseqüência de intempéries naturais.

O modo mais usado para se medir a volatilidade para o cálculo de opções é através do desvio padrão anualizado dos logaritmos naturais dos retornos dos ativos subjacentes.

$$\text{Volatilidade}_{\text{estimada}} = \text{Desvio Padrão}\left\{\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right]_{t=1}^{T}\right\} \qquad \text{(Equação 2.1)}$$

A volatilidade terá a mesma unidade de tempo que aquela contida na amostra. Para fazer a transformação da unidade de tempo da volatilidade é preciso multiplicar a volatilidade resultante da amostra pela raiz quadrada da quantidade de tempo da volatilidade calculada, contida na unidade de tempo da volatilidade que se quer encontrar. Por exemplo, se as variações nos preços de uma série forem diárias teremos a volatilidade diária e para converter para a volatilidade anual é preciso multiplicar a primeira pela raiz quadrada do número de dias úteis no ano.

2.1.4. O Modelo Black-Scholes-Merton

De forma resumida, no trabalho *"The Price of Options and Corporate Liabilities"*, de 1973, Black and Scholes derivaram uma equação diferencial que deve ser satisfeita pelo preço de qualquer derivativo dependente do preço de uma ação que não pague dividendos. O modelo considera que o preço futuro do ativo do qual a opção é calculada (ativo-objeto), é aleatório, respeitando o Movimento Geométrico Browniano[2].

---

[2] Será detalhado na seção 2.1.5 dessa dissertação.

O modelo de Black-Scholes-Merton adota as seguintes hipóteses (Hull, 2006 p. 290):

- O preço dos ativos tem uma distribuição lognormal, com média e variância constantes;
- Não existem restrições à venda a descoberto de títulos e pode-se tomar qualquer quantia à taxa de juros corrente;
- Não existem custos transacionais nem impostos ou margens e todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
- O ativo-objeto não paga dividendos ou qualquer outro rendimento durante a vida do derivativo;
- O mercado é perfeito, ou seja, não há oportunidade para arbitragem sem risco;
- A negociação de títulos é contínua, e não discreta;
- A taxa de juros livre de risco de curto prazo é constante e igual para todos os vencimentos.

Considera-se a construção de uma carteira composta por ações e opções, e uma taxa de retorno igual à taxa livre de risco para o desenvolvimento das equações de Black e Scholes. Dessa forma, o risco, da variável aleatória do processo, é eliminado.

Utilizando a premissa de que os preços dos ativos financeiros seguem uma distribuição lognormal, Black and Scholes chegaram à seguinte solução:

$$C = S\,N(d_1) - K.e^{-rT}\,N(d_2)$$

Em que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

C = preço da opção européia de compra

S = preço da ação

K = preço de exercício

T = tempo de vida da opção

R = taxa livre de risco

σ = volatilidade do retorno da ação

N = função de distribuição de probabilidades normal padrão acumulada

Dado que o preço de uma opção americana, para ativos sem remuneração, é igual ao de uma opção européia, a fórmula Black-Scholes também é aplicável à esse outro tipo de opções. Contudo, ainda não existe uma formulação analítica para o cálculo de opções de venda do tipo americano.

2.1.5. Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano (MGB) é um processo estocástico, no qual o logaritmo da variável subjacente segue um processo generalizado de Wiener[3]. No MGB variações no preço do ativo-objeto, em um determinado espaço de tempo, seguem uma distribuição normal com média e variância proporcionais à variações no tempo.

Dessa forma, a distribuição probabilística dos preços futuros do ativo-objeto se apresenta como uma curva lognormal, logo quando se calculam as taxas de retorno de forma contínua, obtêm-se uma distribuição normal:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \qquad \text{(Equação 2.2)}$$

Em que:

dx = variação no preço do ativo-objeto

α = parâmetro *drift*

x = preço do ativo-objeto

[3] Para maiores informações ver: Hull, J.C. Options, Futures and Other Derivatives . 6th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2006.

dt = variação no tempo

σ = variância

dz = incremento do Processo de Wiener[4]

2.1.6. Opções Reais

Durante muito tempo a utilização de opções ficou restrita aos ativos financeiros, pois esses possuem grande quantidade de dados a disposição e o preço de mercado do ativo subjacente é diretamente observável. Além disso, a utilização de equações diferenciais estocásticas dificultava o uso gerencial do tema. O avanço das ferramentas gerenciais e o uso de malhas binomiais em substituição ao cálculo estocástico, segundo Copeland e Antikarov (2001), fez com que o método das opções reais ficasse mais simples de implementar. Assim, em uma definição restrita, a teoria de avaliação através das opções reais é um desdobramento das opções financeiras aplicadas à avaliação de ativos reais, ou não-financeiros.

Uma crítica importante ao método de Fluxo de Caixa Descontado é a premissa inerente de que o resultado do projeto não será afetado por decisões futuras que a empresa possa tomar baseada em informações novas obtidas após o lançamento do projeto, ou seja, não é considerada flexibilidade ao projeto de investimento. Em contra partida, a análise das opções reais parte do cálculo do Valor Presente Líquido (*VPL*), mas agrega a esse método o valor adicionado pela flexibilidade existente no projeto de investimento. Dixit e Pindyck (1994) classificam esse resultado de Valor Presente Líquido Estendido (*VPLE*), no qual está considerado o valor das opções do projeto. Algebricamente, seria:

$VPLE = VPL + VO$, em que:

$VPLE$ = Valor Presente Líquido Estendido

VPL = Valor Presente Líquido

[4] Para maiores informações ver: Hull, J.C. Options, Futures and Other Derivatives . 6th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2006.

VO = Valor das Opções

Analogamente às opções financeiras, o valor das opções reais depende de cinco variáveis básicas (Hull, 2006)

- **Preço do ativo subjacente (*S*)**: é um projeto, investimento ou aquisição de ativos reais;
- **Preço de exercício (*K*)**: é o montante investido para "exercer" uma opção real, quando se está comprando um ativo, ou o montante recebido quando se está vendendo;
- **Tempo até o vencimento (*T*)**: prazo de vencimento da opção real medida em anos;
- **Taxa de juros (*r*)**: é a taxa de juros que influencia no preço da opção;
- **Volatilidade (σ)**: indica a incerteza ou risco dos retornos dos projetos de investimentos.

A Tabela I mostra um comparativo entre as opções reais e financeiras:

	Opções Financeiras	Opções Reais	
		Expandir (*call*)	**Abandonar (*put*)**
Ativo Subjacente	Preço da Ação (S)	Valor do Investimento refletido no Valor Presente do Projeto	Valor do Abandono refletido no Valor Presente do Projeto
Incerteza	Volatilidade do Valor do Projeto (σ)	Volatilidade do Valor do Projeto (σ)	Volatilidade do Valor do Projeto (σ)
Preço de Exercício	Preço prefixado da Ação	Valor do Investimento em determinado momento	Valor de Abandono
Taxa de Retorno	Taxa livre de risco (r) (C-BOND, Renda Fixa, T-BOND)	Taxa livre de risco (r) (C-BOND, Renda Fixa, T-BOND)	Taxa livre de risco (r) (C-BOND, Renda Fixa, T-BOND)
Tempo de Exercício	Data prefixada	Momento da decisão em relação à opção	Momento da decisão em relação à opção

Tabela I – Comparativo entre Opções Reais e Financeiras

Visto a diferença entre as opções reais e financeiras o próximo passo é classificar os diferentes tipos de opções reais. As opções reais são classificadas em: adiamento, expansão e abandono, mas podem ter alguns desdobramentos, como retração, prorrogação e crescimento:

- **Opção de adiamento**: é uma *call* americana encontrada na maioria dos projetos que podem ter o início postergado;
- **Opção de abandono**: é uma *put* americana, em que o projeto pode ser abandonado integralmente e seus ativos podem ser liquidados;
- **Opção de retração**: é uma *put* americana, em que o projeto pode ser abandonado em parte, quando as condições do meio tornam-se adversas, por um preço fixo;
- **Opção de expansão**: uma *call* americana que permite o aumento do investimento ou projeto, mediante novos investimentos em um ambiente favorável;

- **Opção de prorrogação**: uma *call* americana que permite a prorrogação do tempo de vida do projeto contra o pagamento de um preço de exercício;
- **Opção de crescimento**: uma *call* americana de várias outras opções. Assim, o investimento inicial é a porta de entrada para novos investimentos.

Adicionalmente, pode-se considerar a opção de alternância (*switch option*) de dois tipos: alternar operações ou alternar usos de matéria-prima e produto. O tratamento específico da opção de conversão foi iniciado por Kulatilaka e Trigeorgis (1994) e tem sido difundida no meio acadêmico.

A opção de alternar operações de um projeto é, em termos práticos, uma carteira de opções que consiste tanto em opções de compra quanto de venda. Por exemplo, reiniciar uma operação quando um projeto está temporariamente suspenso, equivale a uma opção americana de compra. Da mesma foram, encerrar as operações quando condições desfavoráveis surgem, é equivalente a uma opção americana de venda. Um exemplo clássico de opção de alternância de usos de matéria-prima é a operação de uma termoelétrica, que pode ser movida a gás, óleo ou carvão. Assim, a opção de conversão existe quando o ativo aceita vários insumos, pode produzir vários produtos ou as operações podem ser dinamicamente interrompidas e reiniciadas, com um custo de conversão que não seja proibitivo. Um projeto com uma dessas características vale mais do que um projeto sem esta flexibilidade.

2.2.
Método 1: Árvore Quadrinomial

Primeiramente será apresentado o modelo binomial simples, o modelo de carteiras equivalentes e a avaliação neutra ao risco, mostrando através de um exemplo prático que o resultado tanto para carteiras equivalentes como para avaliação neutra ao risco é o mesmo. Posteriormente será mostrada a árvore binomial múltipla e finalmente será apresentado o modelo quadrinomial.

2.2.1.
Modelo Binomial Simples

O modelo binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979) de valoração de opções reais por métodos discretos fornece uma boa aproximação ao processo estocástico. Além disso, é visualmente simples e intuitivo para a avaliação do preço de opções e talvez por isso tem sido um dos modelos mais utilizados. Em termos práticos, o modelo baseia-se na construção de árvores binomiais que representam os diversos caminhos que podem ser seguidos pelo preço do ativo subjacente durante o tempo de vida da opção.

Esse modelo considera que o processo estocástico do valor segue um Movimento Geométrico Browniano que tem por característica volatilidade constante, ou seja, o valor da volatilidade estimado para o primeiro período será considerado o mesmo para todos os demais períodos. Outra premissa do modelo é que o mercado se ajusta à eventuais oportunidades de retorno sem risco, ou seja, não existe arbitragem. Para garantir que isso sempre ocorra, em um pequeno intervalo de tempo, deve-se montar uma carteira de *hedge* comprando uma determinada quantidade de uma ação e tomando-se a mesma quantidade de dinheiro emprestada. Para não haver arbitragem, o valor da opção de compra deve ser o mesmo da carteira de *hedge*. A cada intervalo de tempo Δt, o preço da ação pode ser alterado de duas formas: subindo (de acordo com o fator u), ou descendo (de acordo com o fator d). Suponha que no momento t_0 o valor da ação seja igual a S_0, em t_1 o preço pode subir para Su, ou cair para Sd, onde $d<1<u$, construindo assim uma árvore binomial como a que segue:

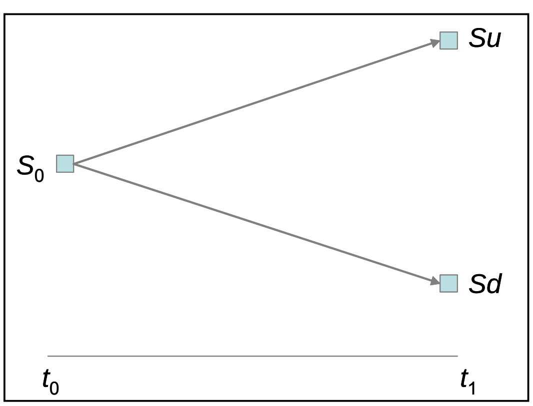

Figura II – Comportamento do Preço de uma Ação

Considere uma opção sobre esses ativos com o preço C e prazo de vencimento T. Para encontrar o preço dessa opção no vencimento é preciso usar a equação:

$C(T)$ = Máximo ($S(T) - K$; 0)

Em que:

T é a data do vencimento;

$C(T)$ é o preço da opção de compra na data T;

$S(T)$ é o preço do ativo objeto na data T;

K é o preço de exercício;

O preço dessa opção pode ser representado da seguinte forma:

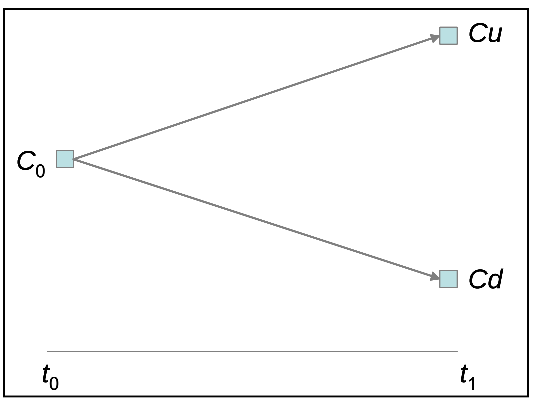

Figura III – Comportamento do Preço de uma Opção

Serão mostrados a seguir dois modelos para precificar a opção: modelo simplificado de carteiras equivalentes e a avaliação neutra ao risco.

2.2.1.1. Modelo Simplificado de Carteiras Equivalentes

O modelo de carteiras equivalentes, no tempo $t = 0$, utiliza a opção de não-arbitragem. Dessa forma, monta-se uma carteira com dois títulos (uma quantidade de ativos subjacentes e opções), de maneira que não haja dúvidas do valor da carteira ao final do período. Além disso, como a carteira não possui risco, o seu retorno deve ser igual à taxa de juros livre de risco, o que viabiliza a precificação da opção no momento $t = 0$. Mais adiante, considera-se essa carteira equivalente formada por uma posição comprada em uma quantidade Δ de ativos e por uma posição vendida em uma opção de compra, e calcula-se o valor de Δ que torna a carteira sem risco. Se houver um movimento de subida no preço da ação, o valor do portfólio ao final da vida da ação será:

$$Sd\,\Delta - Cd \qquad \text{(Equação 2.3)}$$

Se houver uma queda no preço da ação, o valor passa a ser:

$$Su\,\Delta - Cu \qquad \text{(Equação 2.4)}$$

As duas equações são iguais quando:

$$Su\,\Delta - Cu = Sd\,\Delta - Cd$$

Ou, de outra forma:

$$\Delta = \frac{(Cu - Cd)}{(Su - Sd)} \qquad \text{(Equação 2.5)}$$

Substituindo o valor de Δ tanto na equação 2.3 como na equação 2.4, obtém-se o valor da carteira equivalente. Dessa forma, independente do movimento para cima ou para baixo do preço do ativo subjacente, valor da carteira equivalente no momento do vencimento ($t = 1$) será sempre o mesmo.

Sabendo que, com a não-arbitragem, carteiras sem risco remuneram à taxa de juros livre de risco, é preciso descontar o valor da carteira de $t = 1$ para $t = 0$ à taxa de juros livre de risco, como segue:

$$C_0 = \frac{C_1}{(1+r)^t}$$

A equação da carteira equivalente em $t = 0$ é:

$$C = K\Delta - \left[\frac{C_1}{(1+r)^t} \right]$$

2.2.1.2.
Avaliação Neutra ao Risco

O preço da opção calculado segundo a avaliação neutra ao risco iguala o retorno da opção à taxa de juros livre de risco, como se os investidores fossem indiferentes ao risco. Considera-se um ativo subjacente cujo preço seja S e o valor de sua opção seja C. Supõe-se ainda, que a opção tenha uma duração de T, e que durante sua vida o ativo possa mover-se tanto para cima Su como para baixo Sd, em que $d<1<u$, conforme segue:

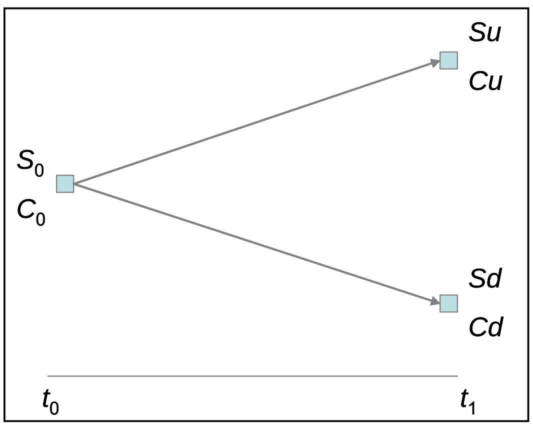

Figura IV – Avaliação Neutra ao Risco

Da mesma maneira feita anteriormente, cria-se uma carteira equivalente composta de uma quantidade Δ do ativo subjacente e uma opção. Calcula-se o valor de Δ que torna a carteira sem risco, de acordo com a equação 2.5. Como na avaliação neutra ao risco, a carteira é considerada sem risco, a sua remuneração deve ser à taxa de juros livre de risco (r), com o seguinte valor presente da carteira:

$$\frac{(Su\Delta - Cu)}{(1+r)}$$

Igualando ao custo de formação da carteira tem-se:

$$\left(S\Delta - C\right) = \frac{Su\Delta - Cu}{\left(1+r\right)} \qquad \text{(Equação 2.6)}$$

Substituindo a equação 2.5 em 2.6:

$$C = S\Delta - \frac{\left(Su\Delta - Cu\right)}{\left(1+r\right)}$$

Onde:

$$C = \frac{\left[pCu + \left(1+p\right)Cd\right]}{\left(1+r\right)} \qquad \text{(Equação 2.7)}$$

e

$$p = \frac{\left[\left(1+r\right) - d\right]}{\left(u-d\right)} \qquad \text{(Equação 2.8)}$$

2.2.1.3. Exemplo Prático

Considerando um exemplo[5], suponha o preço do ativo subjacente sendo \$100, u = 1,2 e d = 0,8, a taxa de juros livre de risco seja 10% e o período seja de 6 meses. Assim, ao final do primeiro período (seis meses) o preço desse ativo pode ser tanto \$120 como \$80. Dessa forma, tem-se:

[5] Baseado em: Monteiro, R., Contribuições da Abordagem da Avaliação de Opções Reais em Ambientes Econômicos de Grande Volatilidade – Uma ênfase no Cenário Latino-Americano. São Paulo: Dissertação de Mestrado submetida a DCA/USP, 2003.

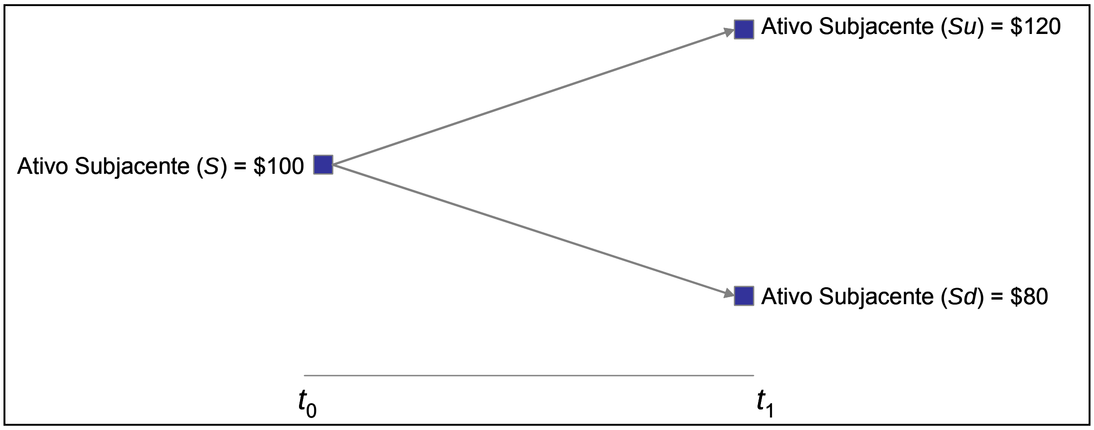

Figura V – Exemplo I Modelo Binomial

Suponha ainda que existe uma opção de compra desse ativo subjacente, com preço de exercício (*K*), igual a $100.

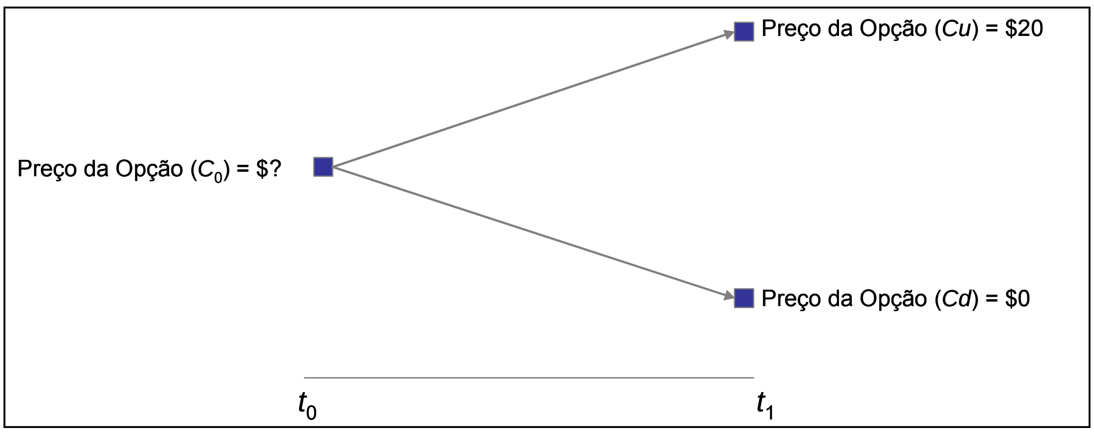

Figura VI – Exemplo II Modelo Binomial

Consideramos duas formas para resolver o preço da opção nesse problema: carteira equivalente e avaliação neutra ao risco. A carteira equivalente é formada por uma posição comprada em uma quantidade Δ de ativos e por uma posição vendida em uma opção de compra, usando a equação 2.5 tem-se:

$$120\,\Delta - 20 = 80\,\Delta - 0$$

$$40\,\Delta = 20$$

$$\Delta = 0{,}50$$

Substituindo *Δ* em qualquer uma das equações 2.3 e 2.4, encontra-se o valor da carteira equivalente, ou seja, \$80 x 0,5 – 0 = \$40 e \$120 x 0,5 – 20 = \$40. Além disso, sabendo que com a não-arbitragem carteiras sem risco remuneram à taxa de juros livre de risco, é preciso descontar o valor da carteira de t = 1 para t = 0 à taxa de juros livre de risco. Assim: $\frac{40}{\left(1+0,10\right)^{1}}=36,364$.

Sabendo que o valor do ativo subjacente em t = 0 é de \$100, a equação da carteira equivalente em t = 0 é:

$100 \text{ x } 0,50 - S(0) = 36,363$

$S_0 = 13,636$

Assim, quando não existe arbitragem, o valor da opção em t = 0 deveria ser \$13,636. Caso o preço da opção fosse maior, a carteira custaria menos do que \$36,364 para ser construída e apresentaria um rendimento acima da taxa de juros livre de risco. Caso o valor da opção fosse menor, seria possível vender a carteira e com o recurso obtido emprestar dinheiro a um custo menor que a taxa de juros livre de risco.

Segundo a avaliação neutra ao risco, para o mesmo exemplo é preciso utilizar as equações 2. 7 e 2.8 para o cálculo do valor da opção. Foram fornecidas as seguintes informações: u = 1,2, d = 0,8, r = 10%, Cu = 20, Cd = 0 e T = 0,5 (T é medido em anos e como o problema trata de um período de 6 meses, T é a metade de 1 ano).

$$p=\frac{\left[\left(1+0,10\right)-0,80\right]}{\left(1,2-0,80\right)}=0,75$$

$$C=\frac{\left[0,75\times 20+\left(1+0,75\times 0\right)\right]}{\left(1+0,10\right)}=13,636$$

O resultado encontrado com os dois métodos, tanto carteira equivalente quanto avaliação neutra ao risco, é o mesmo. O preço da opção calculado pelo segundo método iguala o retorno da opção à taxa de juros livre de risco, como se os investidores fossem todos indiferentes ao risco, mas é válido também quando os investidores não são neutros ao risco, pois a taxa de retorno esperada não é considerada no cálculo da opção.

2.2.2. Árvore Binomial Múltipla

O modelo binomial simples apresentado na seção anterior pode ser aplicado à árvores binomiais com múltiplas ramificações, que representam a maior parte dos problemas envolvendo opções reais. A seguir temos o exemplo de uma árvore binomial com três períodos.

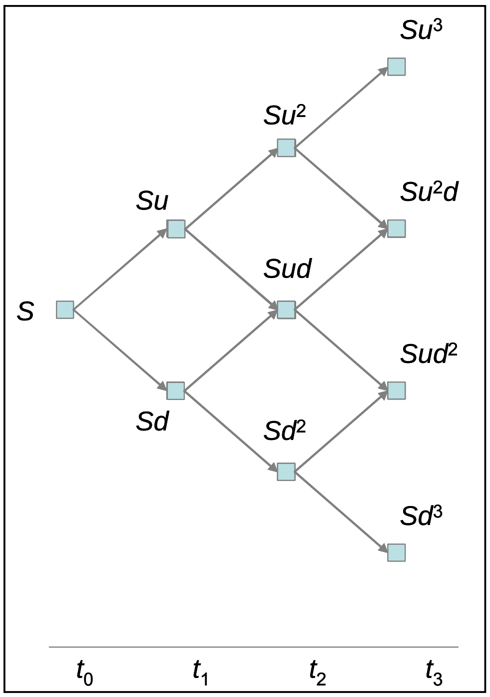

Figura VII – Modelo Binomial com Três Períodos

Para a avaliação de opções americanas, o modelo binomial consegue apresentar todos os preços possíveis durante a vigência da opção e a possibilidade de exercício antecipado. Se em um nó da árvore binomial a diferença entre o preço de exercício e o preço corrente for maior que o valor teórico da opção, o primeiro prevalece na solução.

Utilizando a teoria apresentada anteriormente, é possível aplicar um movimento binomial para o preço da ação. Para calcular o preço de uma opção em uma árvore binomial de várias ramificações, é preciso realizar os cálculos recursivamente, de trás para frente, calculando em cada nó o valor da equação: $C(T)$ = Máximo ($S(T) - K$; 0). O modelo também pode ser utilizado para o cálculo de opções que pagam dividendos, contudo são necessárias algumas adaptações[6].

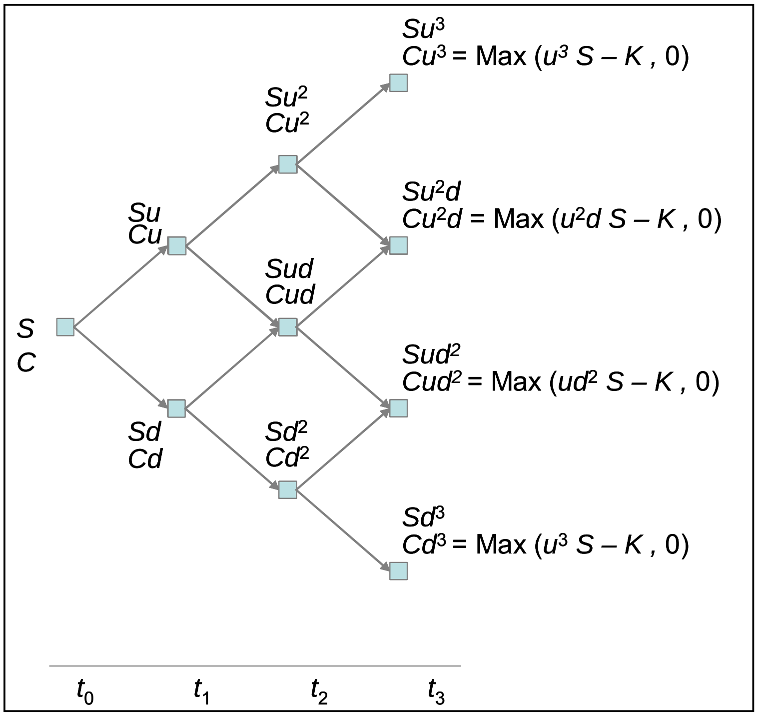

Figura VIII – Preço da Ação no Modelo Binomial com Três Períodos

De acordo com a avaliação neutra ao risco o preço da opção deve ser calculado da seguinte maneira:

$$Cd = \frac{\left[p\ Cdu + (1 + p)\ Cdd\right]}{(1 + r)}$$

$$Cu = \frac{\left[p\ Cuu + (1 + p)\ Cud\right]}{(1 + r)}$$

[6] Para maiores informações ver: Hull (2006), Dixit e Pindyck (1994) e Minardi (2004).

$$C_0 = \frac{\left[p\ Cu\ +\ (1\ +\ p)\ Cd \right]}{(1\ +\ r)}$$

Dado que os movimento dos preços do ativo objeto ao longo da vida da opção são determinados pela volatilidade deste ativo para o período compreendido, é possível derivar os percentuais de alta ou baixa do ativo subjacente da volatilidade:

$$u = e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}$$

Onde:

T = prazo da opção de acordo com a medida da volatilidade

σ = valor da volatilidade do ativo objeto

n = número de períodos em que o preço do ativo objeto se movimenta

u = probabilidade do preço do ativo subjacente subir

d = probabilidade do preço do ativo subjacente cair

2.2.3. Modelo Quadrinomial

Segundo a abordagem de Copeland e Antikarov (2001) a árvore quadrinomial é uma árvore binária com duas fontes de incerteza, possuindo quatro ramificações em cada nó. Para o cálculo dessa árvore é necessário encontrar a volatilidade de cada fonte de incerteza, o que permite um grande volume de combinação entre os dois ativos. Além disso, para a valoração correta dessa opção é necessário usar um processo neutro ao risco, pois a otimização que ocorre nos nós de decisão altera a característica do risco do projeto, o que altera também sua taxa de desconto.

Consistente com o Movimento Geométrico Browniano $dV = \mu V dt + \sigma V dz$, visto na seção 2.1.5, o cálculo das probabilidades neutras ao risco da árvore quadrinomial pode ser obtido com as seguintes equações[7]:

$$Pu_a u_b = \frac{1}{4} \times \left[1 + \left(\frac{v_a}{\sigma_a} + \frac{v_b}{\sigma_b} \right) \times \Delta t^{\frac{1}{2}} + \rho a, b \right]$$

$$Pu_b d_a = \frac{1}{4} \times \left[1 + \left(\frac{v_a}{\sigma_a} - \frac{v_b}{\sigma_b} \right) \times \Delta t^{\frac{1}{2}} - \rho a, b \right]$$

$$Pd_b u_a = \frac{1}{4} \times \left[1 - \left(\frac{v_a}{\sigma_a} - \frac{v_b}{\sigma_b} \right) \times \Delta t^{\frac{1}{2}} - \rho a, b \right]$$

$$Pd_b d_a = \frac{1}{4} \times \left[1 - \left(\frac{v_a}{\sigma_a} + \frac{v_b}{\sigma_b} \right) \times \Delta t^{\frac{1}{2}} + \rho a, b \right]$$

Em que:

u_b e u_a = movimentos de subida dos preços dos ativos *a* e *b*

d_b e d_a = movimentos de descida dos preços dos ativos *a* e *b*

g_b e g_a = taxa de crescimento esperado dos preços dos ativos *a* e *b*

$\rho_{a,b}$= correlação entre os preços dos ativos *a* e *b*

σ_b e σ_a = volatilidade dos preços dos ativos *a* e *b*

$$v_b = \frac{g_b - (\sigma_b)^2}{2}$$

$$v_a = \frac{g_a - (\sigma_a)^2}{2}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\text{número de steps entre os períodos}}$$

[7] Não foi utilizado o modelo matemático desenvolvido por Copeland e Antikarov (2001, p.281-287) por apresentar algumas inconsistências. O desenvolvimento matemático do modelo quadrinomial utilizado pode ser verificado em Brandão e Dyer, 2006.

Segundo Cuthbertson e Nitzsche (2001), o *payoff* desta opção seria:

Payoff = Max ($S_1 - S_2 - CS$, 0)

Onde:

S_1 = VPL do modo de operação corrente

S_2 = VPL do modo de operação 2

CS = Custo de conversão do modo de operação 1 para o modo 2.

Não são todos os casos em que existe um custo de conversão associado, por exemplo, o dono de um automóvel *flex fuel* não tem custo algum quando alterna de combustível, do álcool para a gasolina e vice e versa. Nesses casos o custo de conversão deve ser desconsiderado da análise. Abaixo segue uma árvore quadrinomial com t = 2 para o preço dos ativos *a* e *b*:

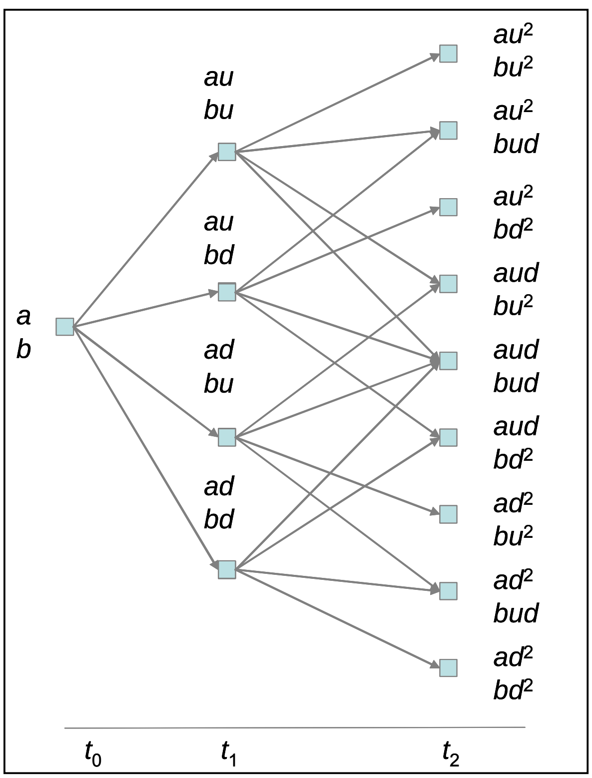

Figura IX – Árvore Quadrinomial com dois períodos

2.3.
Método 2: Simulação

O método de simulação busca produzir uma série de situações hipotéticas, que são mais fáceis de serem trabalhadas com o auxílio de aplicativos computacionais que usam geradores de variáveis aleatórias para a criação de diversos cenários, possibilitando a análise das várias distribuições de probabilidades dos possíveis valores assumidos por estas variáveis. Uma das simulações mais usadas teve seu nome inspirado no jogo de roleta do cassino de Monte Carlo, um dos primeiros estudos envolvendo a Simulação de Monte Carlo na avaliação de investimentos data de 1964 com a publicação do artigo *"Risk Analysis in Capital Investments"* escrito por Hertz em 1964.

A Simulação de Monte Carlo, de maneira simplista, é baseada na geração de números aleatórios, os quais são utilizados como parâmetros de entrada para se extrair valores de uma distribuição acumulada de uma variável qualquer, como receitas, custos ou investimentos. É uma técnica de análise de risco que pode ser utilizada com o auxílio de um software para simular prováveis eventos futuros (Brigham, Gapenski e Ehrhardt, 2001). Inicialmente deve-se criar uma tabela de distribuição de probabilidades das variáveis que serão simuladas. Em seguida, o software de simulação gera um número aleatório para cada variável simulada, buscando na tabela feita inicialmente qual valor da variável corresponde ao número aleatório gerado. Dessa forma, obtém-se um cenário inicial de variáveis que é utilizado para encontrar um primeiro valor presente esperado do investimento. São feitas várias simulações e no final são obtidos: o valor presente esperado médio e o desvio padrão do valor presente. A Simulação de Monte Carlo pode ser realizada através de softwares específicos como o @RISK, da Palisade e o Crystal Ball 2000, da Decisioneering.

O Modelo de Simulação de Fluxos de Caixa Dinâmicos, proposto neste estudo, também é um método discreto de valoração de opções reais, da mesma forma que Modelo de Árvore de Decisão. Contudo, diferente do Modelo Quadrinomial, pois o Modelo de Simulação de Fluxos de Caixa Dinâmicos utiliza a Simulação de Monte Carlo e, por isso, não necessita do desenvolvimento da árvore de decisão para opções americanas. Esse fato simplifica a análise de forma considerável, principalmente nos casos de árvores complexas como as quadrinomiais.

Em termos práticos, para que seja possível resolver um problema com Simulação de Fluxos de Caixa Dinâmicos é preciso primeiramente criar um fluxo de caixa tradicional e depois, é necessário transformá-lo em um fluxo dinâmico. Essa conversão do fluxo de caixa tradicional e um fluxo de caixa dinâmico é possível através da escolha das variáveis chaves do modelo que terão seu valor variando a cada interação. Para essas variáveis chaves é preciso determinar uma distribuição de probabilidade, que fica mais simples de ser trabalhada através de um programa computacional como por exemplo, o @Risk. O programa calculará o valor da variável para cada interação e o valor presente o fluxo de caixa é alterado a cada momento de interação. Para que se possa obter o valor presente do fluxo de caixa dinâmico é preciso considerar a média dos resultados de todas as interações de Monte Carlo.