

4

Testes e Simulação de QAR

4.1

Simulação de Monte Carlo

O Método de Monte Carlo é uma técnica muito geral, onde as formas de investigação estão baseadas no uso de números aleatórios e estatística de probabilidade. Pode-se verificar a utilização de tal método em diversas áreas, como economia, engenharia, física, química, medicina entre outras. Para que uma simulação de Monte Carlo esteja presente em um estudo, basta que este faça uso de números aleatórios na verificação de algum problema. Veja Machine (27), e Wolles (22).

Os primeiros estudos envolvendo simulação de Monte Carlo, foram a avaliação de investimentos de capital feito por David B. Hertz e publicados em um artigo na revista *Harvard Business Review* em 1974 (Cardoso (5) 2000). Uma excelente referência para o assunto é Robert e Casella (7).

A simulação de Monte Carlo (SMC) geralmente segue os seguintes passos:

1. Especificar completamente um modelo “verdadeiro”. Por exemplo, especificar a distribuição do termo perturbação, as variáveis explicativas, os coeficientes e o tamanho da amostra.
2. Gerar um conjunto de dados usando este modelo “verdadeiro”.
3. Calcular a estatística do teste ou estimador que está a ser avaliado com esta amostra gerada artificialmente e guardar os resultados.
4. Repetir os passos 2 e 3 um grande número de vezes. Cada geração de um novo conjunto de dados é chamada *réplica*.
5. Avaliar o desempenho do estimador, ou seja, com que frequência à estatística do teste rejeita ou aceita o “verdadeiro” modelo no conjunto de réplicas.

4.2

Métodos

Para este estudo, utilizou-se as seguintes ferramentas de análise: os softwares o *MATLAB*[®] 7.0 e o *R Foundation for Statistical Computing Version 2.1.1.* Algumas referências sobre a manipulação desses programas são Matsumoto (28) e Dalgaard (8).

Dessa forma, foram empregados os seguintes processos geradores de dados (DGP), ou *data generating process*: o grupo 1 composto pelos modelos de 1 até 10 para avaliar o tamanho do teste, ou seja, a proporção das vezes em que a hipótese nula é rejeitada pelo teste quando na verdade H_0 é verdadeira, e o grupo 2 formado pelos modelos 11, 12 e 13 para avaliar a potência do teste, ou seja, a proporção das vezes em que a hipótese nula é rejeitada pelo teste quando na verdade H_0 é falsa.

O *grupo 1* é formado pelos seguintes (DGPS):

1. Modelo 1: Um Ruído Branco Gaussiano;
2. Modelo 2: Um AR (1), com $\theta_0 = 1$ e $\theta_1 = 0.1$;
3. Modelo 3: Um AR (1), com $\theta_0 = 1$ e $\theta_1 = 0.5$;
4. Modelo 4: Um AR (1), com $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = 0.9$;
5. Modelo 5: Um GARCH (1, 1), com $\alpha_0 = 0.5 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_1 = 0.25$, $\beta_1 = 0.70$;
6. Modelo 6: Um GARCH (1, 1), com $\alpha_0 = 1.0 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_1 = 0.05$, $\beta_1 = 0.90$ (curtose por volta de 3.16);
7. Modelo 7: Um GARCH (1, 1), com $\alpha_0 = 1.0 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_1 = 0.09$, $\beta_1 = 0.90$ (curtose alta por volta de 16.14);
8. Modelo 8: Um AR (1), com $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 0.5$ e com erro o modelo 5;
9. Modelo 9: Um AR (1), com $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 0.5$ e com erro o modelo 6;
10. Modelo 10: Um AR (1), com $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 0.5$ e com erro o modelo 7;

O *grupo 2* é formado pelos seguintes (DGPS):

1. Modelo 11: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.65 + 0.25 \cdot \tau$;
2. Modelo 12: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.5$ se $\tau < 0.5$ ou $\theta_1(\tau) = 0.95$ se $\tau \geq 0.5$;

3. Modelo 13: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.85 + 0.25 \cdot \tau$.

Cada modelo acima foi gerado com as seguintes configurações das variáveis de controle:

- i) O tamanho N das séries utilizadas foi $N = 100, 300, 500$ e 1000 ;
- ii) O parâmetro θ_0 , constante, assumiu os seguintes valores: 0 e 1 ;
- iii) O parâmetro θ_1 , constante, para cada modelo, assumiu os seguintes valores: $0, 0.1, 0.5$ e 0.9 ;
- iv) A heteroscedasticidade utilizada foi: quatro tipos de ruído; sendo o primeiro um ruído branco (*Modelo 1*) e os demais os três modelos GARCH (*Modelos 5, 6 e 7*) utilizados por Souza, Veiga e Medeiros (31) (2005), ou equivalentes (sendo que um deles com curtose em torno de três, outro com curtose *alta* > 10 e outro com curtose infinita).

Através de simulações Monte Carlo de tamanho 500, estudou-se as propriedades da média, variância e formato da densidade empírica do estimador dos parâmetros do modelo de auto-regressão quantílica $QAR(p)$ e como elas variam com flutuações nas variáveis de controle. Estudou-se também o tamanho do teste de constância do parâmetro para coeficientes de significância ($\theta_1 = 0, 0.1, 0.5, 0.9$). Avaliou-se a influência na estimação e no teste das seguintes variáveis de controle: tamanho da amostra N ; magnitude do parâmetro θ_1 e heteroscedasticidade. Verificou-se as propriedades do teste de constância do parâmetro de Koenker e Xiao (24)(2004) e do estimador da auto-regressão quantílica $QAR(p)$, identificando os casos onde o tamanho do teste é distorcido.

O procedimento de simulação de Monte Carlo foi efetuado da seguinte forma: suponha que se tenha, por exemplo, o seguinte modelo “verdadeiro”, um AR(1) (*Modelo 2*), cuja equação $y_t = 1 + 0.1y_{t-1} + \varepsilon_t$, onde ε_t é um ruído branco gaussiano. Após a especificação deste modelo, é gerado um conjunto de dados, por exemplo, ($N = 1000$) observações. Estima-se os parâmetros do Modelo de $QAR(1)$ desse conjunto de dados. Após a estimação dos parâmetros, para cada τ (*quantil*) assumindo os valores ($\tau = 0.05, 0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.95$), calcula-se a estatística do teste *Location-Scale* e guarda-se os resultados. Repete-se os passos anteriores 500 vezes, ou seja, o número de simulações de Monte Carlo, cada geração de um novo conjunto de dados é uma réplica do *Modelo 2*. Para cada réplica, estima-se os parâmetros para cada quantil (τ) e calcula-se a estatística do teste. Enfim, avalia-se o desempenho do estimador do Modelo de $QAR(p)$, verificando a porcentagem que o teste rejeita ou aceita o modelo “verdadeiro” neste conjunto de réplicas. Foi feito do mesmo procedimento para avaliar a potência do teste de hipóteses para os modelos

do grupo 2, nos quais foram gerados modelos de QAR onde o parâmetro auto-regressivo não é constante com o quantil, ou seja, $H_0 = \theta_1(\tau)$ (constante) é falsa, a proporção de rejeição de H_0 pelo teste equivale à potência.

4.3

Resultados

4.3.1

Estimação

O modelo selecionado para este estudo foi de ordem um, o $QAR(1)$. As estimativas dos parâmetros deste modelo foram comparados aos parâmetros dos Modelos 1, 2, 3 e 4 avaliados. As estimativas do parâmetro $\theta_0(\tau)$ foram comparadas com a função inversa da normal para o mesmo τ (quantil), ou seja, $\theta_0(\tau) \cong \theta_0 + \Phi^{-1}(\tau)$, pois o modelo de QAR(p) não tem erro (ε_t) e o parâmetro $\theta_0(\tau)$, que é variável com o quantil faz essa função. Como houve geração das séries com erros normais, ou seja, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, o parâmetro $\theta_0(\tau)$ tem que replicar uma função de erro normal.

A estimativa do parâmetro $\theta_0(\tau)$ no modelo de QAR(p) para cada quantil deve ser aproximadamente o quantil da distribuição normal por trás da geração dos erros. Como o parâmetro $\theta_0(\tau)$ é igual a $\theta_0 + \varepsilon_t$, tem-se que o parâmetro é igual a $\theta_0(\tau) \sim N(\theta_0, \sigma_\varepsilon^2)$ e, deste modo, o parâmetro $\theta_0(\tau)$ é igual a $\theta_0 + \varepsilon_t(\tau)$, onde τ é o quantil de ε_t , ou seja, $\theta_0(\tau) = \theta_0 + \sigma_\varepsilon \cdot \Phi^{-1}(\tau)$.

Utilizando-se o parâmetro $\theta_0 = 0$ e $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, uma estimação não-viesada de $\theta_0(\tau)$ tem média amostral das estimativas de Monte Carlo muito próxima de $\Phi^{-1}(\tau)$. Para o parâmetro $\theta_0 = 1$ e $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, uma estimação não-viesada de $\theta_0(\tau)$ tem média amostral das estimativas de Monte Carlo muito próxima de $1 + \Phi^{-1}(\tau)$.

O parâmetro que relaciona y_t com y_{t-1} é constante, de modo que, para qualquer valor de ε_t (qualquer quantil τ da distribuição condicional), o parâmetro $\theta_1(\tau)$ é igual a θ_1 . Por isso, uma estimação não-viesada do modelo QAR(p) terá a média amostral das simulações de Monte Carlo do estimador do parâmetro $\theta_1(\tau)$ sendo igual ao valor de θ_1 de cada modelo AR(p) gerado.

4.3.2

Análise da média das estimativas de Monte Carlo - Modelos: 1, 2, 3 e 4 (grupo 1)

Nessa seção, é feita o mapeamento da média da estimativa da simulação de Monte Carlo do modelo auto-regressão quantílica, $QAR(1)$, para os Modelos 1, 2, 3 e 4. Após feito o mapeamento dos modelos, é analisado o comporta-

mento da estimação do modelo de $QAR(1)$.

Modelo 1: Um Ruído Branco Gaussiano.

Comparações efetuadas para o Modelo 1: Um Ruído Branco Gaussiano. Para as simulações e estimativas do *Modelo 1*, observa-se que o parâmetro

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.613	0.169	0.617	1.011	1.390	1.831	2.604
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1(\tau)$	-0.026	-0.013	-0.005	-0.016	-0.012	0.001	0.010

Tabela 4.1: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 100$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.636	0.159	0.617	1.004	1.382	1.838	2.639
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1(\tau)$	0.000	0.000	-0.001	-0.002	0.000	-0.002	0.002

Tabela 4.2: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 300$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.637	0.166	0.6187	1.005	1.387	1.835	2.629
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1(\tau)$	-0.007	-0.006	0.000	-0.003	-0.004	-0.001	0.006

Tabela 4.3: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 500$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.642	0.157	0.612	0.997	1.385	1.841	2.640
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1(\tau)$	0.000	-0.001	-0.001	0.000	-0.002	-0.003	0.000

Tabela 4.4: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 1000$.

$\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e aproxima-se consideravelmente do valor teórico à medida que a amostra (N) aumenta. O parâmetro $\theta_1(\tau)$ oscila muito próximo do valor teórico $\theta_1 = 0$ ao passo que a amostra (N) aumenta. Há um pequeno

viés negativo para $\theta_1(\tau)$, que aumenta com o valor de θ_1 do modelo AR(p).

Modelo 2: Um AR (1), com $\theta_0 = 1$ e $\theta_1 = 0.1$.

Comparações efetuadas para Modelo 2: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.1$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.646	0.175	0.629	1.025	1.403	1.852	2.652
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\theta_1(\tau)$	0.101	0.092	0.092	0.089	0.092	0.096	0.082

Tabela 4.5: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 100$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.634	0.167	0.619	1.00	1.395	1.851	2.652
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\theta_1(\tau)$	0.089	0.098	0.100	0.097	0.093	0.093	0.094

Tabela 4.6: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 300$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.640	0.159	0.618	1.003	1.387	1.842	2.644
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\theta_1(\tau)$	0.099	0.101	0.098	0.097	0.101	0.102	0.100

Tabela 4.7: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 500$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.635	0.159	0.613	1.000	1.389	1.845	2.644
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\theta_1(\tau)$	0.097	0.100	0.100	0.100	0.097	0.098	0.098

Tabela 4.8: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 1000$.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 2*, nota-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e aproxima-se de forma considerável do valor teórico à proporção que a amostra (N) aumenta. Conforme a amostra (N) aumenta, o parâmetro $\theta_1(\tau)$ oscila próximo do valor teórico $\theta_1 = 0.1$.

Modelo 3: Um AR (1), com $\theta_0 = 1$ e $\theta_1 = 0.5$.

Comparações efetuadas para o Modelo 3: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.5$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.602	0.209	0.654	1.052	1.452	1.902	2.673
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\theta_1(\tau)$	0.487	0.480	0.484	0.480	0.476	0.474	0.483

Tabela 4.9: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 100$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.613	0.190	0.641	1.024	1.411	1.867	2.658
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\theta_1(\tau)$	0.488	0.486	0.486	0.488	0.488	0.490	0.491

Tabela 4.10: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 300$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.621	0.165	0.619	1.008	1.397	1.850	2.661
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\theta_1(\tau)$	0.495	0.497	0.497	0.496	0.494	0.495	0.489

Tabela 4.11: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 500$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-0.645	0.158	0.615	1.000	1.385	1.842	2.645
$\theta_0(\tau)$	-0.640	0.163	0.618	1.003	1.388	1.845	2.654
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\theta_1(\tau)$	0.498	0.499	0.499	0.499	0.500	0.499	0.495

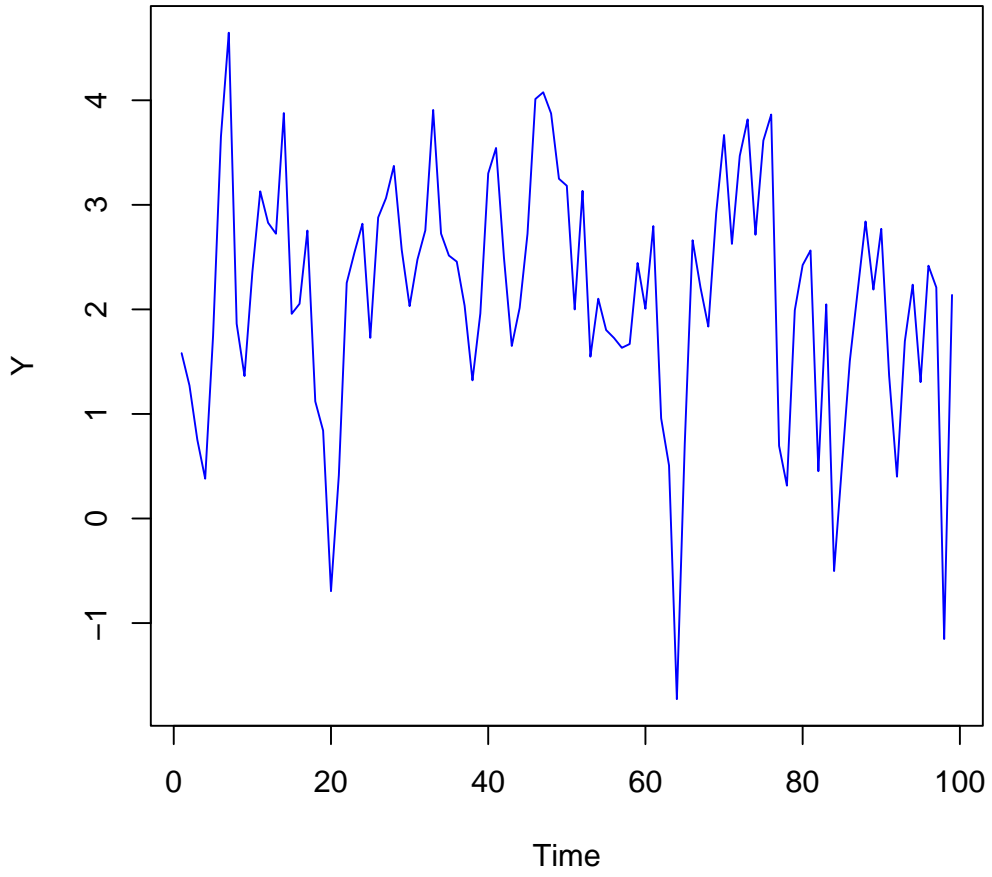
Tabela 4.12: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 1000$.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 3*, constata-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta no quantis aproximando sensivelmente do valor teórico $\theta_0 = 0.5$ ao ponto que a amostra (N) aumenta. Como a amostra (N) aumenta, o parâmetro $\theta_1(\tau)$ oscila próximo do valor teórico $\theta_1 = 0.5$.

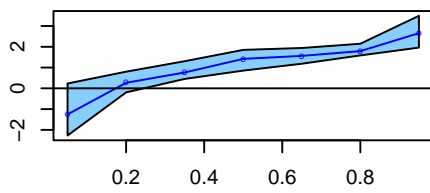
A seguir, são ilustrados alguns exemplos dos gráficos gerados de algumas réplicas da simulação de Monte Carlo do Modelo 3 para os diferentes tamanhos de N e as suas respectivas estimações para os quantis ($\tau = 0.05, 0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.95$) pelo Modelo QAR(1).

Modelo 3: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.5$.

Figura 4.1: Exemplo do Modelo 3 para $N = 100$.



(Intercept)



X

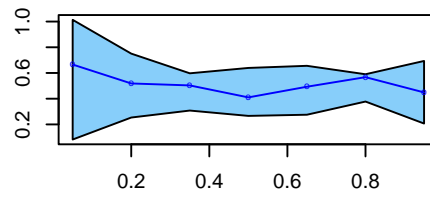
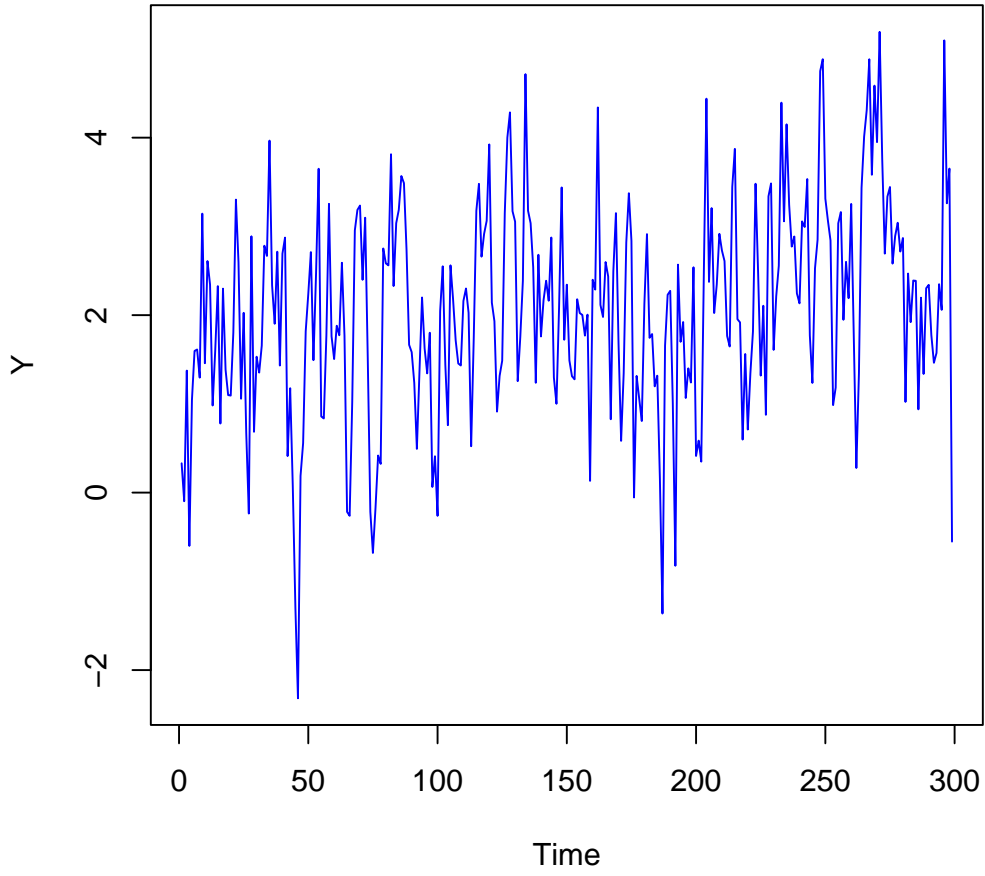
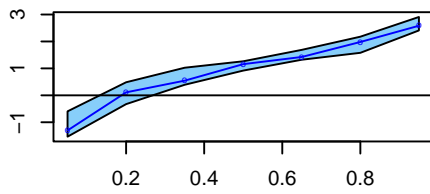


Figura 4.2: Exemplo do Modelo 3 para $N = 300$.



(Intercept)



X

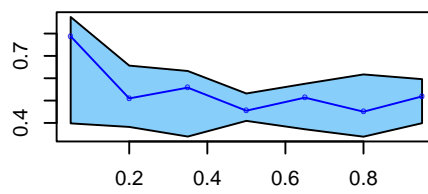
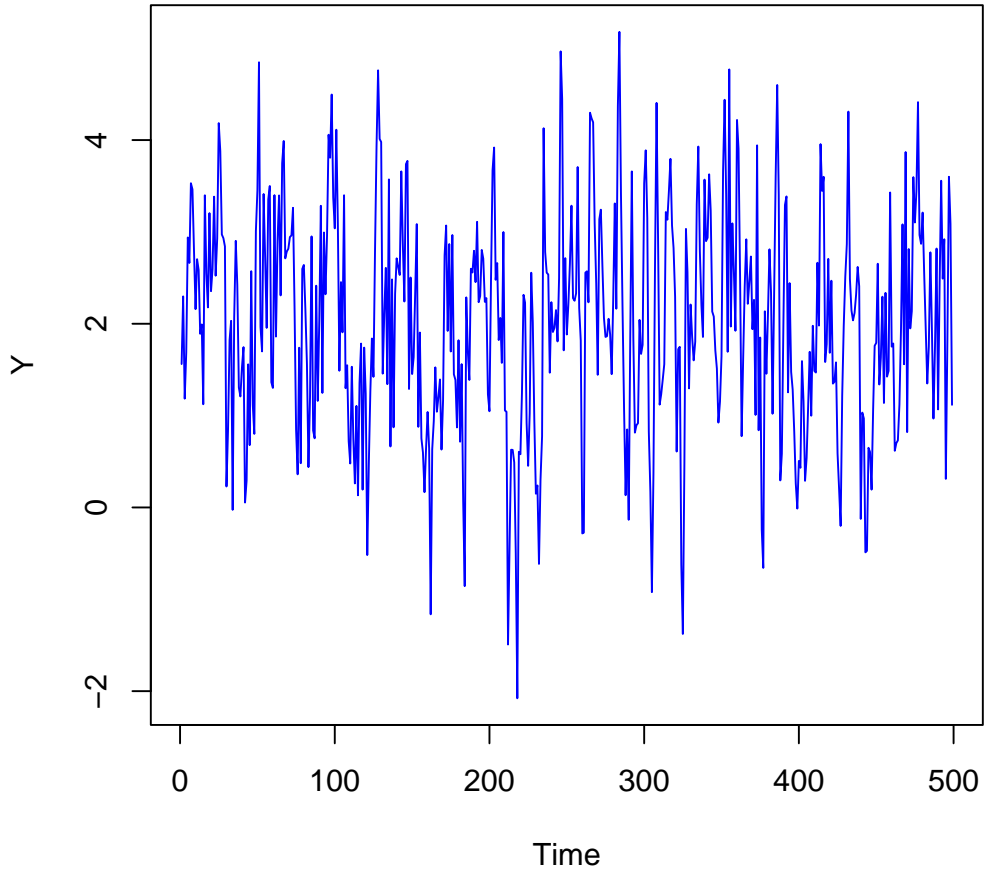
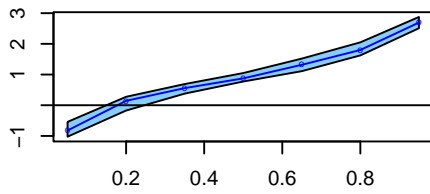


Figura 4.3: Exemplo do Modelo 3 para $N = 500$.



(Intercept)



X

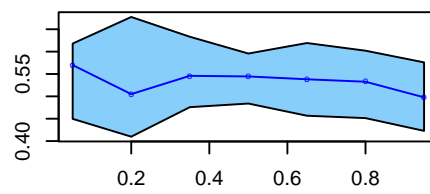
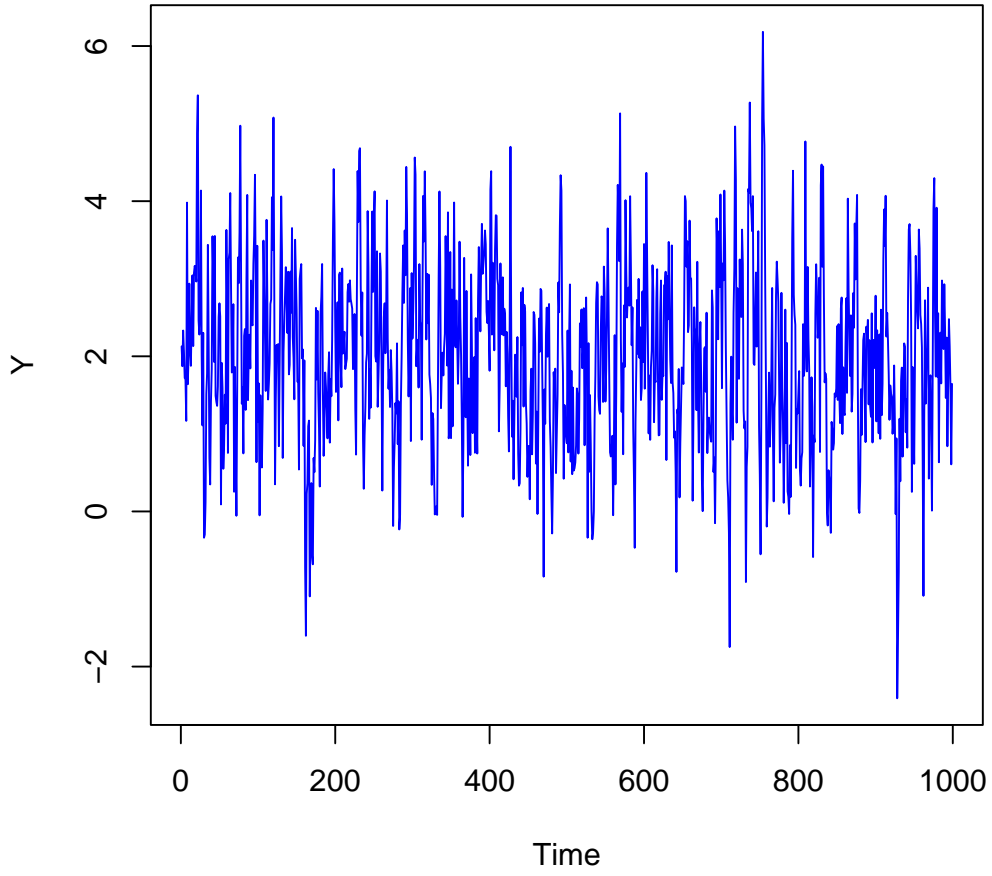
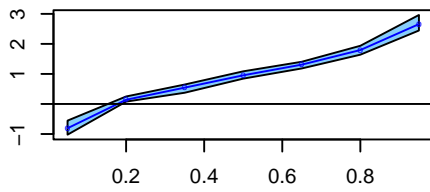


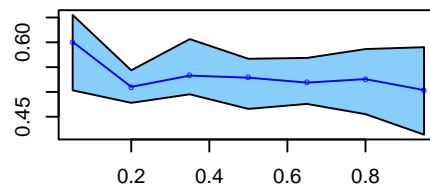
Figura 4.4: Exemplo do Modelo 3 para $N = 1000$.



(Intercept)



X



Modelo 4: Um AR (1), com $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = 0.9$.

Comparações efetuadas para Modelo 4: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.9$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.6449	-0.8416	-0.3853	0	0.3853	0.8416	1.6449
$\theta_0(\tau)$	-1.6323	-0.8238	-0.3819	0.0106	0.4012	0.8462	1.6350
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\theta_1(\tau)$	0.8661	0.8637	0.8626	0.8604	0.8571	0.8563	0.8549

Tabela 4.13: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 100$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.6449	-0.8416	-0.3853	0	0.3853	0.8416	1.6449
$\theta_0(\tau)$	-1.6371	-0.8377	-0.3840	0.0023	0.3884	0.8470	1.6419
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\theta_1(\tau)$	0.8845	0.8847	0.8838	0.8841	0.8841	0.8849	0.8834

Tabela 4.14: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 300$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.6449	-0.8416	-0.3853	0	0.3853	0.8416	1.6449
$\theta_0(\tau)$	-1.6308	-0.8420	-0.3880	-0.0003	0.3858	0.8407	1.6370
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\theta_1(\tau)$	0.8926	0.8947	0.8944	0.8935	0.8939	0.8934	0.8907

Tabela 4.15: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 500$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.6449	-0.8416	-0.3853	0	0.3853	0.8416	1.6449
$\theta_0(\tau)$	-1.6434	-0.8401	-0.3834	0.0016	0.3881	0.8443	1.6456
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\theta_1(\tau)$	0.8965	0.8969	0.8968	0.8966	0.8974	0.8970	0.8964

Tabela 4.16: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 1000$.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 4*, observa-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e aproxima-se consideravelmente do valor teórico à medida que a amostra (N) aumenta. O parâmetro estimado $\theta_1(\tau)$ aproxima do valor teórico $\theta_1 = 0.9$, conforme a amostra (N) aumenta.

4.3.3

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo - Modelos: 1, 2, 3 e 4 (grupo 1)**Modelo 1: Um Ruído Branco Gaussiano.**

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo efetuadas para o Modelo 1: Um Ruído Branco Gaussiano.

Estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0909	0.0432	0.0363	0.0313	0.0359	0.0464	0.0952
$\theta_1(\tau)$	0.0486	0.0209	0.0172	0.0152	0.0159	0.0220	0.0498
Estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0298	0.0125	0.0109	0.0104	0.0107	0.0130	0.0314
$\theta_1(\tau)$	0.0156	0.0065	0.0056	0.0048	0.0050	0.0063	0.0167
Estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0185	0.0090	0.0069	0.0063	0.0070	0.0084	0.0157
$\theta_1(\tau)$	0.0099	0.0040	0.0034	0.0032	0.0035	0.0041	0.0083
Estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0091	0.0042	0.0032	0.0031	0.0035	0.0045	0.0089
$\theta_1(\tau)$	0.0045	0.0021	0.0016	0.0015	0.0016	0.0021	0.0048

Tabela 4.17: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 1.

Para a variância das estimativas de Monte Carlo a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ e $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui conforme a amostra (N) aumenta, mas são maiores para os quantis da extremidade e menores para os quantis medianos, veja Tabela 4.17.

Modelo 2: Um AR (1), com $\theta_0 = 1$ e $\theta_1 = 0.1$.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo efetuadas para o Modelo 2: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.1$.

Estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.1146	0.0498	0.0367	0.0344	0.0391	0.0416	0.0968
$\theta_1(\tau)$	0.0484	0.0214	0.0162	0.0141	0.0162	0.0198	0.0449
Estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0339	0.0143	0.0127	0.0120	0.0122	0.0150	0.0337
$\theta_1(\tau)$	0.0143	0.0068	0.0056	0.0053	0.0054	0.0068	0.0150
Estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0204	0.0094	0.0078	0.0071	0.0076	0.0090	0.0207
$\theta_1(\tau)$	0.0089	0.0042	0.0035	0.0033	0.0036	0.0042	0.0095
Estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0101	0.0045	0.0035	0.0036	0.0037	0.0045	0.0088
$\theta_1(\tau)$	0.0044	0.0020	0.0016	0.0015	0.0016	0.0020	0.0039

Tabela 4.18: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 2.

À variância das estimativas de Monte Carlo a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ e $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui conforme a amostra (N) aumenta, mas são maiores para os quantis das extremidades e menores para os quantis medianos, veja Tabela 4.18.

Modelo 3: Um AR (1), com $\theta_0 = 1$ e $\theta_1 = 0.5$.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo efetuadas para o Modelo 3: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.5$.

Estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.194	0.084	0.066	0.063	0.075	0.092	0.209
$\theta_1(\tau)$	0.037	0.016	0.012	0.011	0.013	0.017	0.039
Estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.062	0.03	0.023	0.022	0.022	0.027	0.055
$\theta_1(\tau)$	0.011	0.0053	0.0042	0.004	0.004	0.0054	0.011
Estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0372	0.015	0.013	0.012	0.013	0.015	0.033
$\theta_1(\tau)$	0.0068	0.003	0.0023	0.0022	0.0023	0.003	0.0061
Estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.018	0.0081	0.0069	0.0067	0.0067	0.0085	0.018
$\theta_1(\tau)$	0.003	0.0015	0.0013	0.0012	0.0013	0.0015	0.003

Tabela 4.19: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 3.

À variância das estimativas de Monte Carlo a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ e $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui conforme a amostra (N) aumenta, mas são maiores para os quantis da ponta e menores para os quantis medianos, veja Tabela 4.19.

Modelo 4: Um AR (1), com $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = 0.9$.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo efetuadas para o Modelo 4: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.9$.

Estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.0644	0.0335	0.0313	0.0297	0.0312	0.0325	0.0714
$\theta_1(\tau)$	0.0145	0.0055	0.0049	0.0044	0.0047	0.0062	0.0133
Estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.01700	0.00829	0.00713	0.00694	0.00776	0.00844	0.01691
$\theta_1(\tau)$	0.00349	0.00156	0.00142	0.00132	0.00143	0.00163	0.00346
Estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.01055	0.00441	0.00386	0.00366	0.00356	0.00427	0.00876
$\theta_1(\tau)$	0.00190	0.00079	0.00061	0.00061	0.00066	0.00089	0.00188
Estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.004088	0.002251	0.001723	0.001723	0.001720	0.002294	0.004152
$\theta_1(\tau)$	0.000863	0.000426	0.000347	0.000335	0.000321	0.000384	0.000817

Tabela 4.20: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 4.

Para os quantis $\tau = 0.05$ e $\tau = 0.95$, há valores mais altos da $\text{var}(\theta_0(\tau))$ em todos os tamanhos da amostra (N). Para o quantil $\tau = 0.5$, tem-se o menor valor de $\text{var}(\theta_0(\tau))$, e à medida que a amostra (N) aumenta, a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ diminui em todos os quantis. A $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui em todos os quantis e, conforme a amostra (N) aumenta, veja Tabela 4.20.

4.3.4

Análise da média das estimativas de Monte Carlo - Modelos: 5, 6, 7, 8, 9 e 10 (grupo 1)

Modelo 5: Um GARCH (1,1), com $\alpha_0 = 0.5 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_1 = 0.25$, $\beta_1 = 0.70$.

Análise da média das estimativas de Monte Carlo para Modelo 5.

Média das estimativas de Monte Carlo, mod.5 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.47E^{-1}$	$-0.21E^{-1}$	$-0.96E^{-2}$	$0.8E^{-4}$	$0.97E^{-2}$	$0.22E^{-1}$	$0.46E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$-0.31E^{-1}$	$-0.19E^{-1}$	$-0.17E^{-1}$	$-0.17E^{-1}$	$-0.17E^{-1}$	$-0.16E^{-1}$	$-0.17E^{-1}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.5 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.48E^{-1}$	$-0.22E^{-1}$	$-0.96E^{-2}$	$0.14E^{-3}$	$0.98E^{-2}$	$0.22E^{-1}$	$0.48E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$-0.23E^{-2}$	$-0.52E^{-2}$	$-0.68E^{-2}$	$-0.74E^{-3}$	$-0.36E^{-3}$	$-0.27E^{-2}$	$-0.9E^{-2}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.5 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.48E^{-1}$	$-0.21E^{-1}$	$-0.96E^{-2}$	$0.8E^{-4}$	$0.96E^{-2}$	$0.22E^{-1}$	$0.48E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$0.29E^{-2}$	$-0.7E^{-4}$	$-0.38E^{-2}$	$-0.20E^{-2}$	$0.12E^{-3}$	$-0.35E^{-3}$	$-0.47E^{-2}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.5 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.47E^{-1}$	$-0.21E^{-1}$	$-0.95E^{-2}$	$-0.1E^{-4}$	$0.95E^{-2}$	$0.21E^{-1}$	$0.47E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$0.27E^{-2}$	$0.94E^{-3}$	$0.31E^{-2}$	$0.25E^{-2}$	$0.55E^{-3}$	$0.99E^{-3}$	$-0.26E^{-2}$

Tabela 4.21: Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 5.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 5*, nota-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e diminui conforme a amostra (N) aumenta. O parâmetro $\theta_1(\tau)$ aumenta ao passo que a amostra (N) aumenta ficando próximo de 0, mas possui um pequeno viés < 0 , veja Tabela 4.21.

Modelo 6: Um GARCH (1,1), com $\alpha_0 = 1.0 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_1 = 0.05$, $\beta_1 = 0.90$ (curtose por volta de 3.16).

Para as simulações e estimativas do *Modelo 6*, observa-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e diminui conforme a amostra (N) aumenta. O parâmetro $\theta_1(\tau)$ diminui à medida que a amostra (N) aumenta, ficando próximo de 0, porém, possui um pequeno viés < 0 , veja Tabela 4.22.

Análise da média das estimativas de Monte Carlo para Modelo 6.

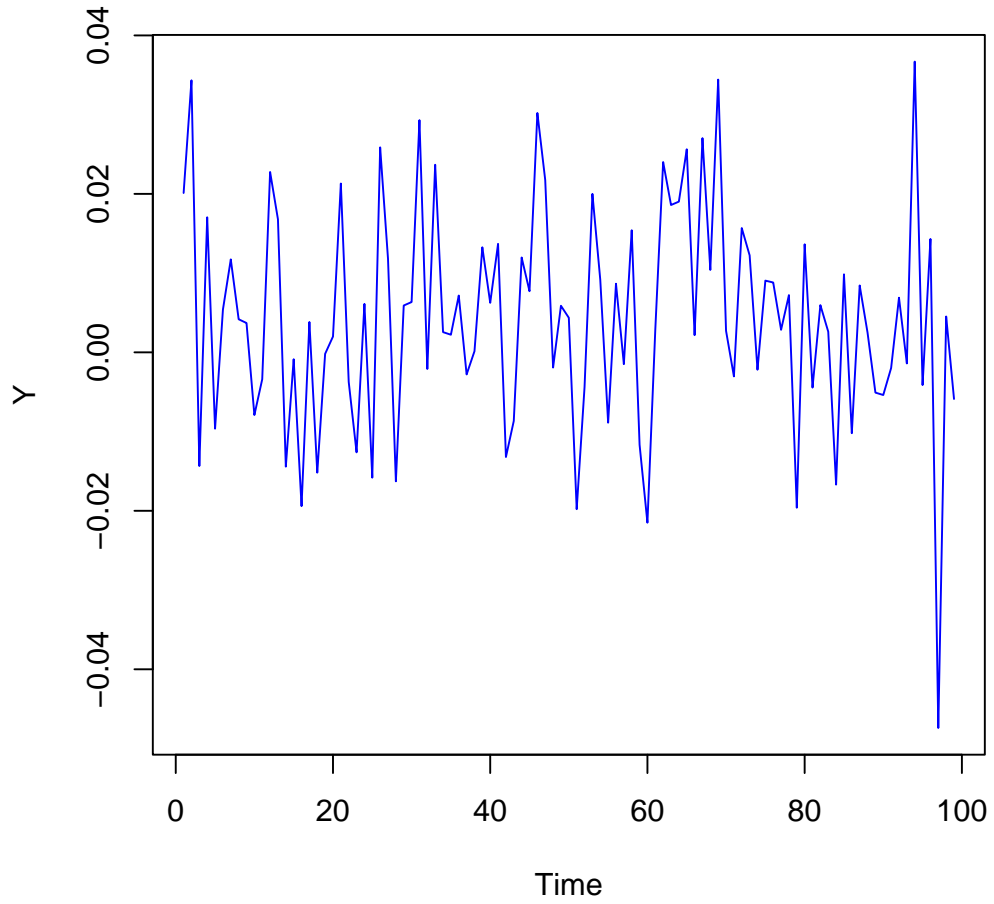
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.6 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.23E^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.53E^{-2}$	$0.15E^{-3}$	$0.55E^{-2}$	$0.12E^{-1}$	$0.23E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$0.47E^{-2}$	$-0.18E^{-1}$	$-0.84E^{-2}$	$-0.96E^{-2}$	$-0.98E^{-2}$	$-0.10E^{-1}$	$-0.67E^{-2}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.6 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.23E^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.54E^{-2}$	$-0.2E^{-4}$	$0.53E^{-2}$	$0.12E^{-1}$	$0.23E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$-0.13E^{-1}$	$-0.52E^{-2}$	$-0.53E^{-2}$	$-0.43E^{-2}$	$-0.28E^{-2}$	$-0.22E^{-2}$	$-0.23E^{-2}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.6 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.23E^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.54E^{-2}$	$-0.6E^{-4}$	$0.53E^{-2}$	$0.12E^{-1}$	$0.23E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$0.59E^{-3}$	$0.17E^{-2}$	$-0.21E^{-2}$	$-0.21E^{-2}$	$-0.21E^{-2}$	$-0.47E^{-2}$	$0.25E^{-2}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.6 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.23E^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.54E^{-2}$	$-0.1E^{-4}$	$0.53E^{-2}$	$0.12E^{-1}$	$0.23E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$-0.57E^{-2}$	$-0.48E^{-3}$	$0.16E^{-2}$	$-0.40E^{-3}$	$0.61E^{-3}$	$0.10E^{-2}$	$0.99E^{-3}$

Tabela 4.22: Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 6.

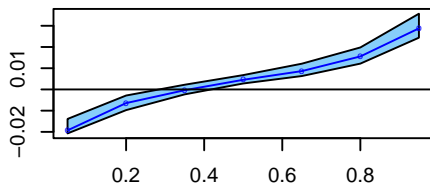
A seguir, são ilustrados alguns exemplos dos gráficos gerados de certas réplicas da simulação de Monte Carlo do Modelo 6, para os diferentes tamanhos de N e as suas respectivas estimações aos quantis ($\tau = 0.05, 0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.95$) pelo Modelo de QAR(1).

Modelo 6: Um GARCH (1,1), com $\alpha_0 = 1.0 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_1 = 0.05$, $\beta_1 = 0.90$ (curtose por volta de 3.16).

Figura 4.5: Exemplo do Modelo 6 para $N = 100$.



(Intercept)



X

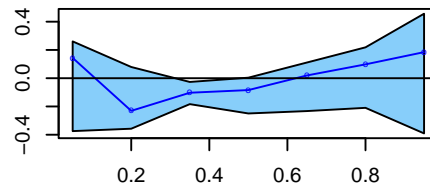
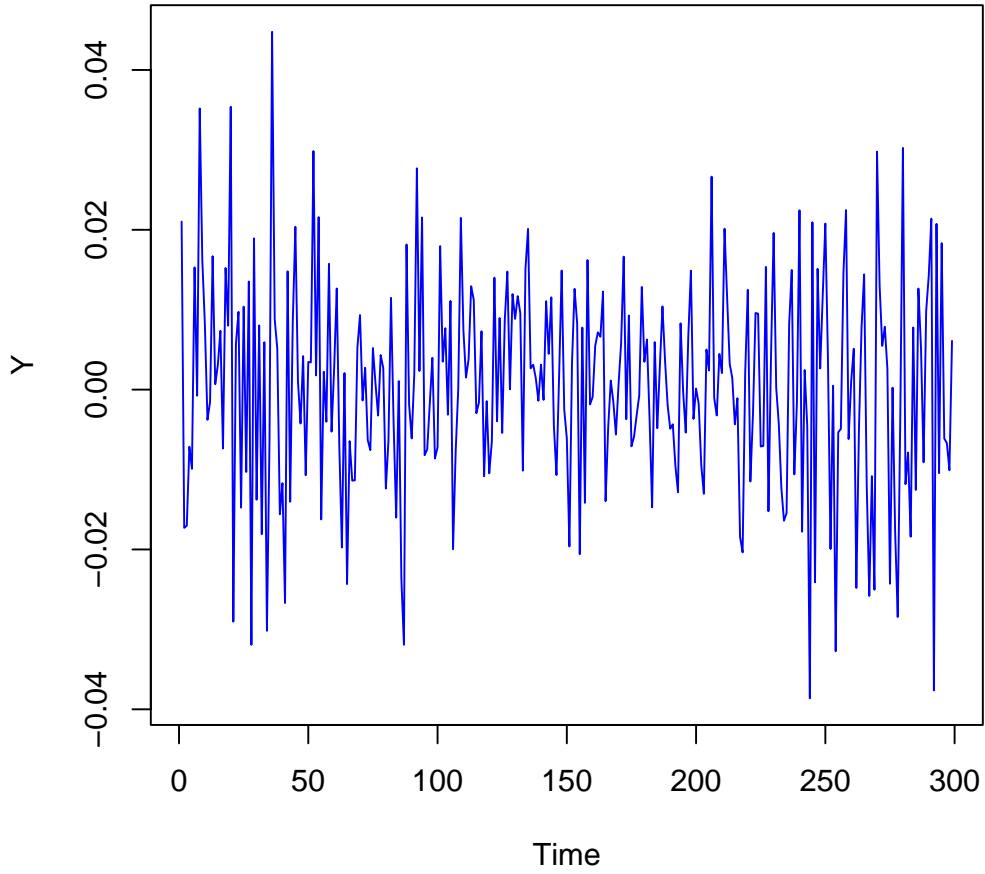
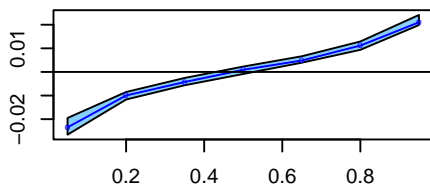


Figura 4.6: Exemplo do Modelo 6 para $N = 300$.



(Intercept)



X

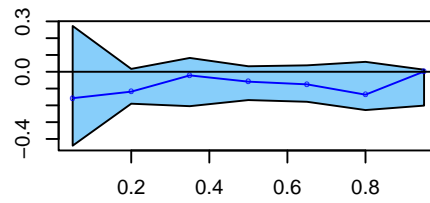
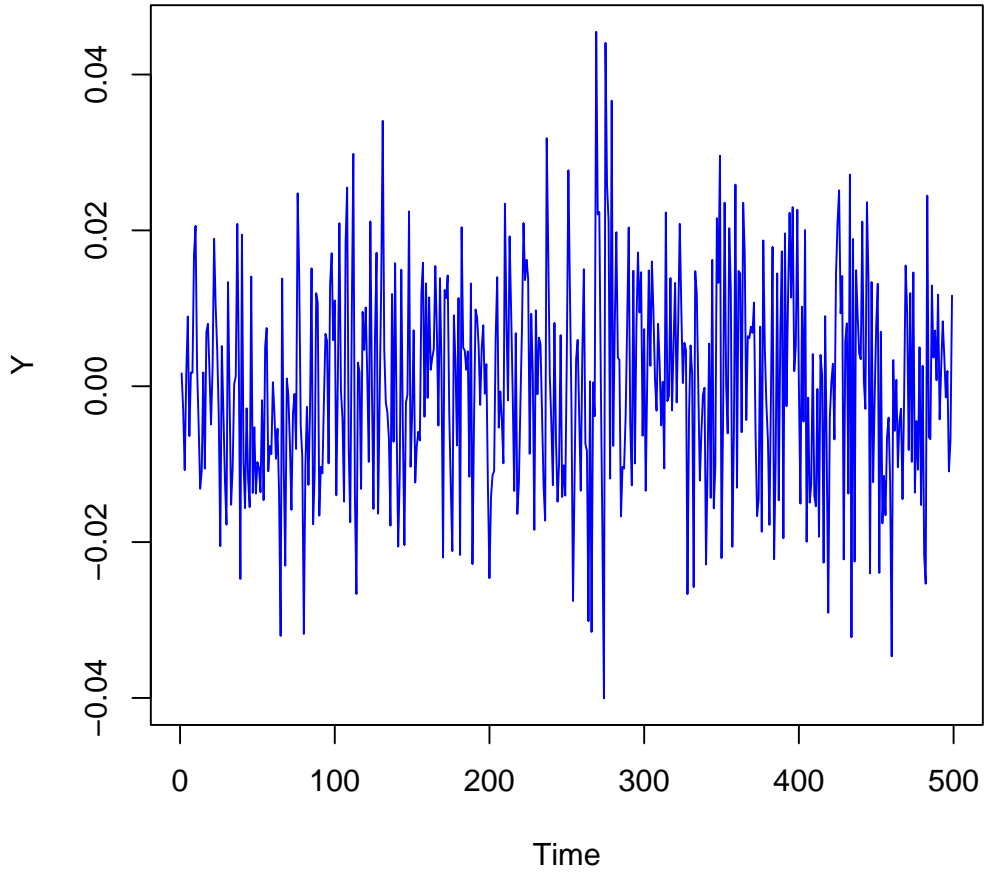
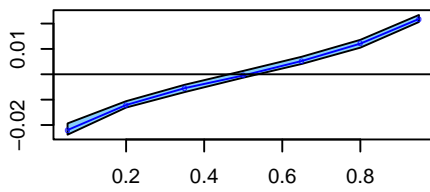


Figura 4.7: Exemplo do Modelo 6 para $N = 500$.



(Intercept)



X

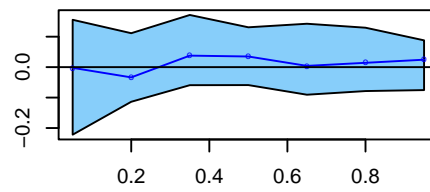
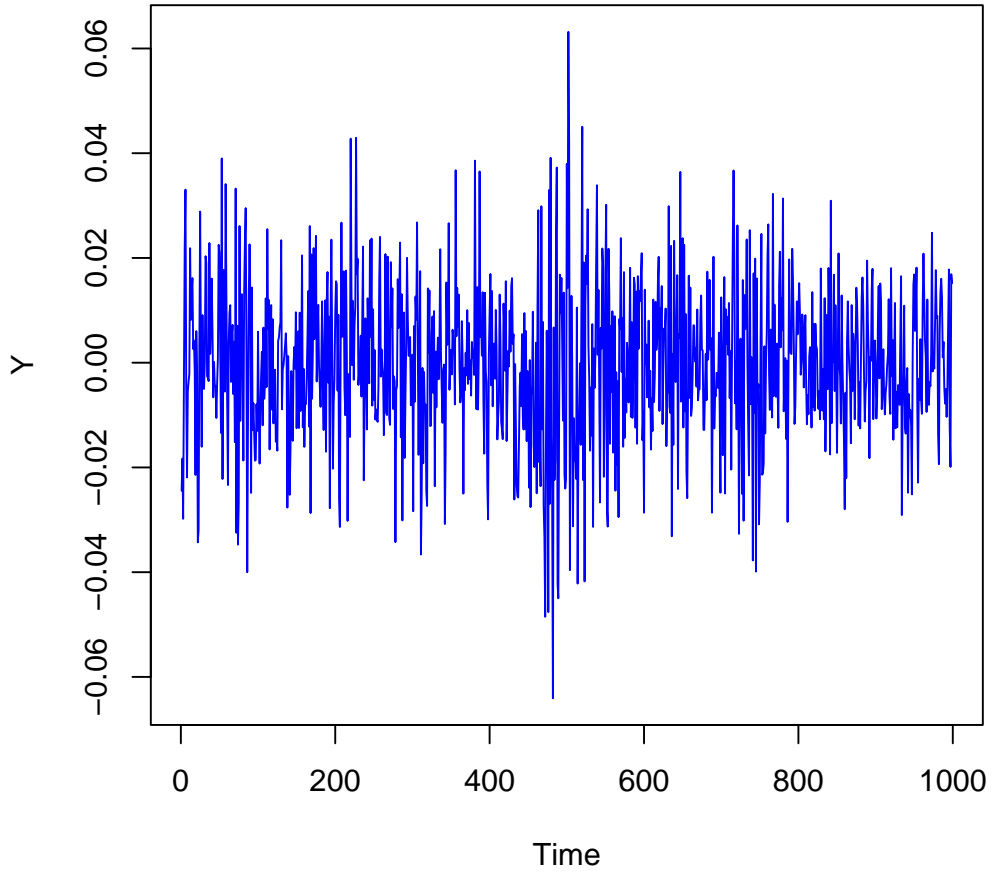
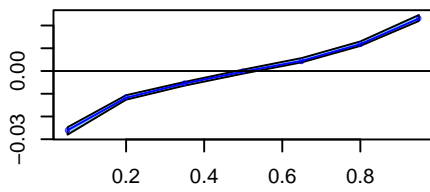


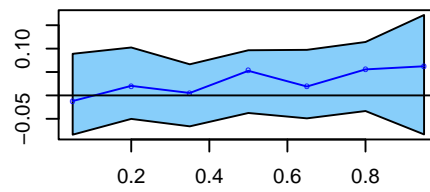
Figura 4.8: Exemplo do Modelo 6 para $N = 1000$.



(Intercept)



X



Modelo 7: Um GARCH (1, 1), com $\alpha_0 = 1.0 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_1 = 0.09$, $\beta_1 = 0.90$ (curtose alta por volta de 16.14).

Análise da média das estimativas de Monte Carlo para Modelo 7.

Média das estimativas de Monte Carlo, mod.7 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.48E^{-1}$	$-0.25E^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.45E^{-3}$	$0.11E^{-1}$	$0.24E^{-1}$	$0.47E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$-0.18E^{-1}$	$-0.88E^{-2}$	$-0.66E^{-2}$	$-0.81E^{-2}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.86E^{-2}$	$-0.33E^{-1}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.7 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.48E^{-1}$	$-0.23E^{-1}$	$-0.11E^{-1}$	$-0.14E^{-3}$	$0.10E^{-1}$	$0.23E^{-1}$	$0.48E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$0.86E^{-2}$	$0.18E^{-2}$	$-0.20E^{-2}$	$-0.14E^{-2}$	$-0.42E^{-2}$	$-0.74E^{-2}$	$-0.49E^{-2}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.7 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.48E^{-1}$	$-0.23E^{-1}$	$-0.10E^{-1}$	$0.1E^{-4}$	$0.10E^{-1}$	$0.23E^{-1}$	$0.49E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$-0.72E^{-3}$	$0.92E^{-3}$	$0.10E^{-2}$	$-0.82E^{-3}$	$-0.11E^{-2}$	$-0.17E^{-2}$	$-0.42E^{-3}$
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.7 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.49E^{-1}$	$-0.23E^{-1}$	$-0.10E^{-1}$	$-0.6E^{-4}$	$0.99E^{-2}$	$0.23E^{-1}$	$0.48E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	$-0.13E^{-2}$	$0.5E^{-4}$	$0.23E^{-2}$	$-0.89E^{-3}$	$-0.67E^{-3}$	$0.15E^{-3}$	$-0.65E^{-3}$

Tabela 4.23: Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 7.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 7*, analisa-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e diminui ao ponto que a amostra (N) aumenta. O parâmetro $\theta_1(\tau)$ diminui conforme a amostra (N) aumenta, ficando próximo de 0, contudo, possui um pequeno viés < 0 , veja Tabela 4.23.

Modelo 8: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.5$ e com erro do Modelo 5.

Análise da média das estimativas de Monte Carlo para Modelo 8.

Média das estimativas de Monte Carlo, mod.8 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.47E^{-1}$	$-0.22E^{-1}$	$-0.10E^{-1}$	$0.10E^{-3}$	$0.10E^{-1}$	$0.22E^{-1}$	$0.48E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.472	0.468	0.467	0.469	0.467	0.465	0.459
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.8 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.46E^{-1}$	$-0.21E^{-1}$	$-0.96E^{-2}$	$0.2E^{-4}$	$0.95E^{-2}$	$0.22E^{-1}$	$0.474E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.477	0.485	0.484	0.487	0.487	0.488	0.477
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.8 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.47E^{-1}$	$-0.21E^{-1}$	$-0.95E^{-2}$	$-0.1E^{-4}$	$0.95E^{-2}$	$0.21E^{-1}$	$0.47E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.499	0.498	0.499	0.499	0.498	0.496	0.488
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.8 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.47E^{-1}$	$-0.21E^{-1}$	$-0.94E^{-2}$	$0.1E^{-4}$	$0.94E^{-2}$	$0.21E^{-1}$	$0.47E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.491	0.497	0.498	0.499	0.499	0.499	0.503

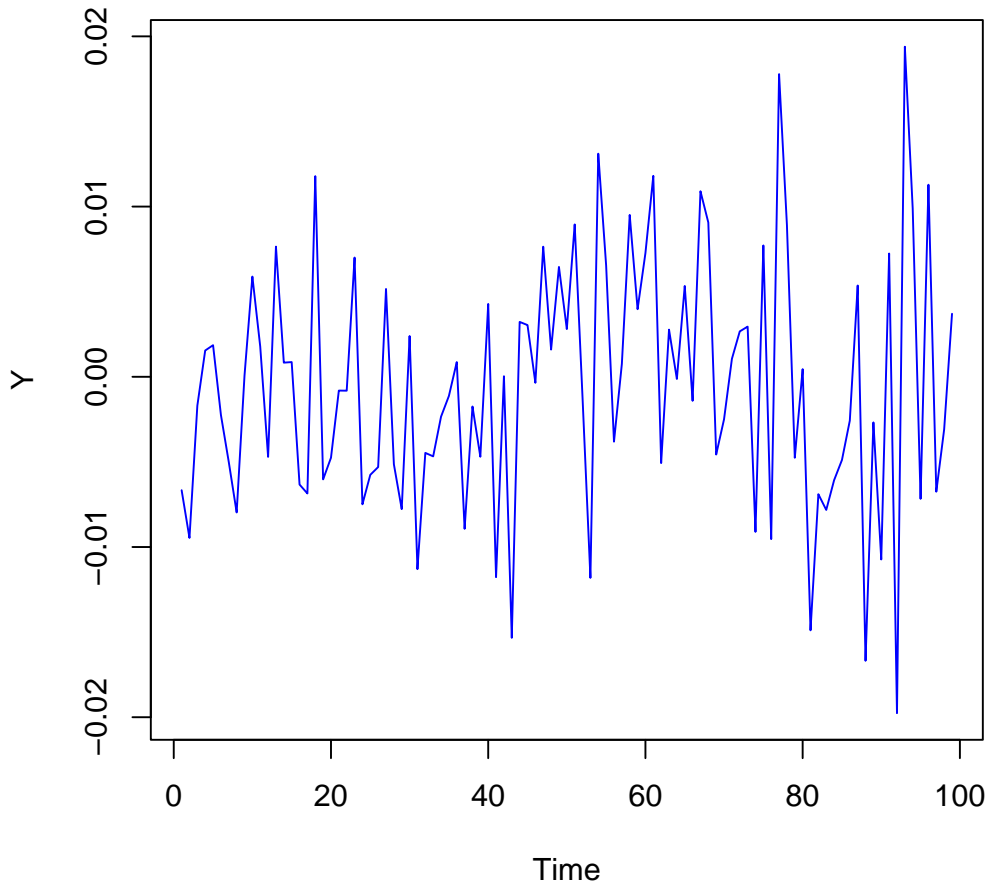
Tabela 4.24: Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 8.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 8*, observa-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e diminui conforme a amostra (N) aumenta. O parâmetro $\theta_1(\tau)$ fica muito próximo de seu valor teórico $\theta_1 = 0.5$ à proporção que a amostra (N) aumenta, veja Tabela 4.24.

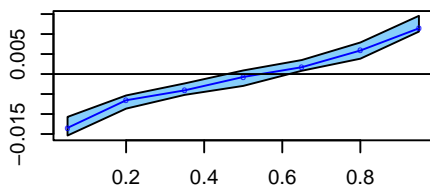
Adiante, são ilustrados alguns exemplos dos gráficos gerados de algumas réplicas da simulação de Monte Carlo do Modelo 9 para os diferentes tamanhos de N e as suas respectivas estimações aos quantis ($\tau = 0.05, 0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.95$) pelo Modelo de QAR(1).

Modelo 9: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.5$ e com erro do modelo 6.

Figura 4.9: Exemplo do Modelo 9 para $N = 100$.



(Intercept)



X

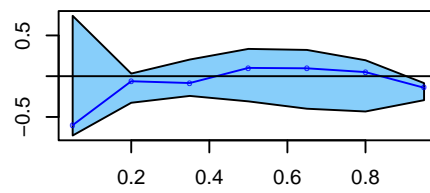
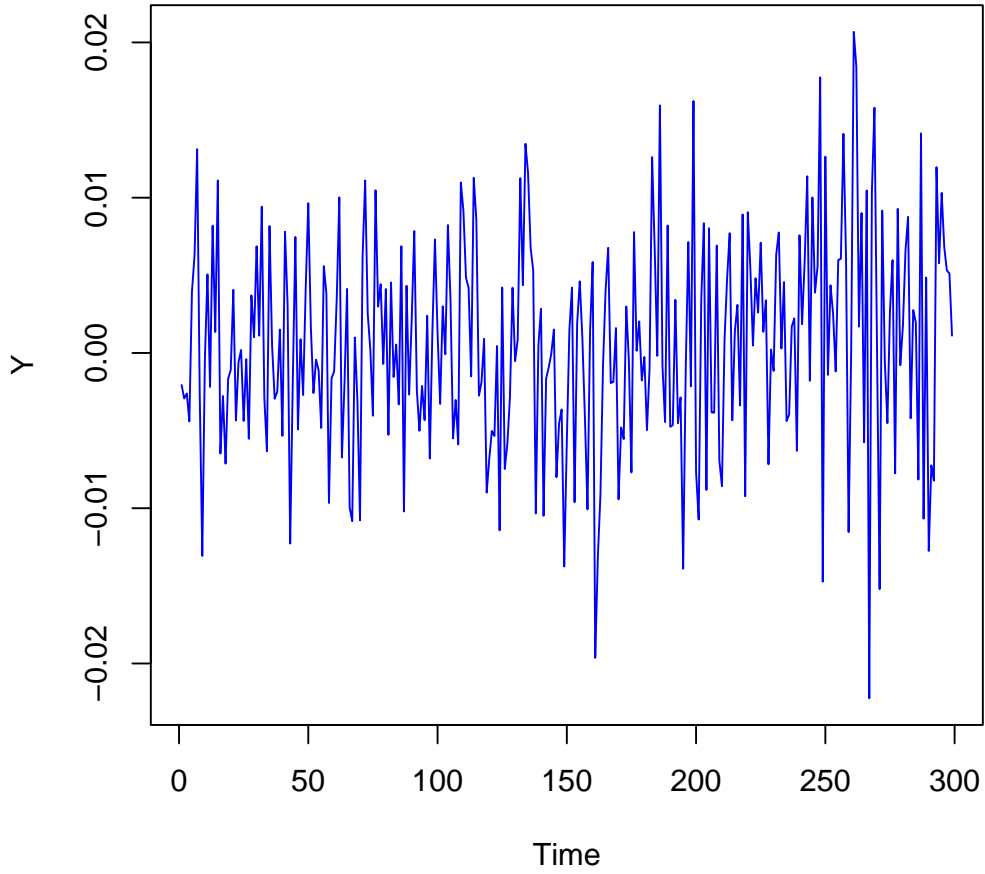
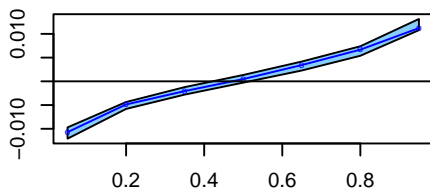


Figura 4.10: Exemplo do Modelo 9 para $N = 300$.



(Intercept)



X

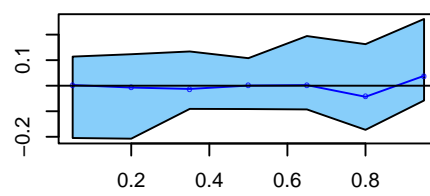
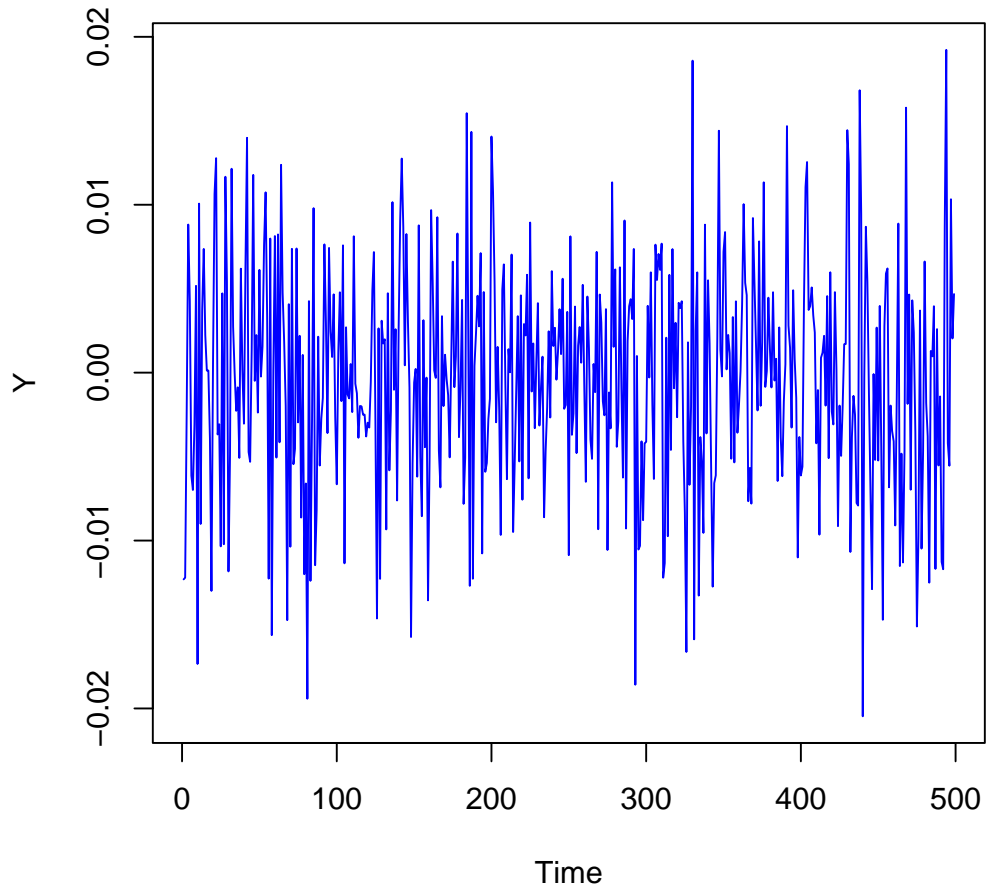
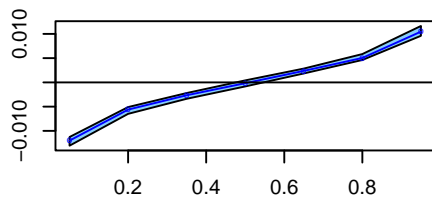


Figura 4.11: Exemplo do Modelo 9 para $N = 500$.



(Intercept)



X

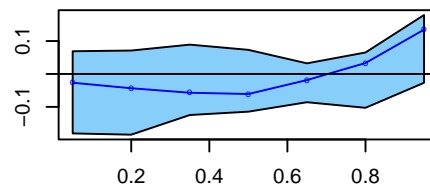
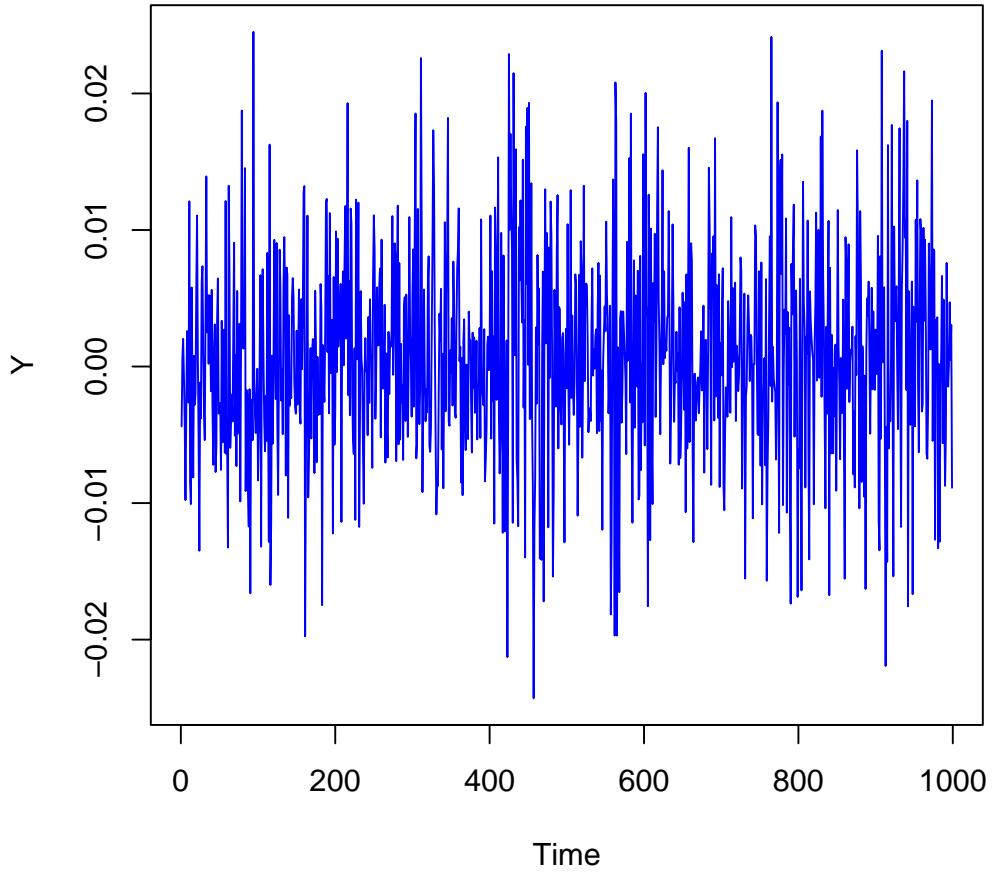
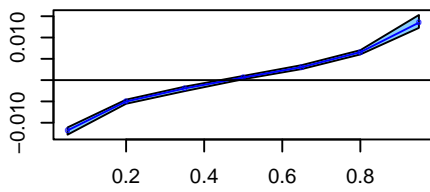


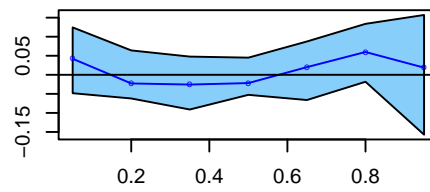
Figura 4.12: Exemplo do Modelo 9 para $N = 1000$.



(Intercept)



X



Modelo 9: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.5$ e com erro do Modelo 6.

Análise da média das estimativas de Monte Carlo para Modelo 9.

Média das estimativas de Monte Carlo, mod.9 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.23E^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.54E^{-2}$	$-0.9E^{-4}$	$0.53E^{-2}$	$0.12E^{-1}$	$0.23E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.488	0.469	0.464	0.467	0.468	0.471	0.465
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.9 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.23e^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.54E^{-2}$	$-0.7E^{-4}$	$0.54E^{-2}$	$0.12E^{-1}$	$0.23E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.494	0.496	0.496	0.493	0.488	0.487	0.485
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.9 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.23E^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.54E^{-2}$	$0.2E^{-4}$	$0.54E^{-2}$	$0.12E^{-1}$	$0.23E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.490	0.494	0.496	0.495	0.496	0.496	0.494
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.9 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.23E^{-1}$	$-0.12E^{-1}$	$-0.53E^{-2}$	$0.3E^{-4}$	$0.53E^{-2}$	$0.12E^{-1}$	$0.02E^{-2}305$
$\theta_1(\tau)$	0.494	0.497	0.501	0.497	0.498	0.498	0.503

Tabela 4.25: Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 9.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 9*, examina-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e diminui de acordo com a amostra (N) aumenta. O parâmetro $\theta_1(\tau)$ oscila em seu valor teórico $\theta_1 = 0.5$ ao passo que a amostra (N) aumenta, veja Tabela 4.25.

Modelo 10: Um AR (1), com $\theta_1 = 0.5$ e com erro do Modelo 7.

Análise da média das estimativas de Monte Carlo para Modelo 10.

Média das estimativas de Monte Carlo, mod.10 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.47E^{-1}$	$-0.23E^{-1}$	$-0.11E^{-1}$	$0.18E^{-3}$	$0.11E^{-1}$	$0.24E^{-1}$	$0.47E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.463	0.471	0.479	0.477	0.479	0.477	0.476
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.10 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.48E^{-1}$	$-0.23E^{-1}$	$-0.11E^{-1}$	$-0.12E^{-3}$	$0.10E^{-1}$	$0.23E^{-1}$	$0.47E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.485	0.483	0.487	0.490	0.487	0.486	0.479
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.10 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.49E^{-1}$	$-0.23E^{-1}$	$-0.10E^{-1}$	$-0.9E^{-4}$	$0.10E^{-1}$	$0.23E^{-1}$	$0.49E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.488	0.493	0.494	0.496	0.496	0.493	0.491
Média das estimativas de Monte Carlo, mod.10 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$-0.49E^{-1}$	$-0.22E^{-1}$	$-0.10E^{-1}$	$-0.8E^{-4}$	$0.10E^{-1}$	$0.22E^{-1}$	$0.48E^{-1}$
$\theta_1(\tau)$	0.50	0.499	0.499	0.498	0.498	0.499	0.494

Tabela 4.26: Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 10.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 10*, vê-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e diminui à proporção que a amostra (N) aumenta. Conforme o tamanho da amostra aumenta, o parâmetro $\theta_1(\tau)$ oscila em seu valor teórico $\theta_1 = 0.5$, veja Tabela 4.26.

4.3.5

Análise variância das estimativas de Monte Carlo - Modelos: 5, 6, 7, 8, 9 e 10 (grupo 1)

À variância das estimativas de Monte Carlo do *Modelo 5*, avista-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos e aproxima-se de 0, segundo o aumento da amostra (N). Conforme a amostra (N) aumenta a $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui, veja Tabela 4.27.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 5.

Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.5 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.39E^{-3}$	$0.57E^{-4}$	$0.21E^{-4}$	$0.12E^{-4}$	$0.15E^{-4}$	$0.44E^{-4}$	$0.28E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.55E^{-1}$	$0.29E^{-1}$	$0.24E^{-1}$	$0.23E^{-1}$	$0.26E^{-1}$	$0.32E^{-1}$	$0.58E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.5 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.18E^{-3}$	$0.17E^{-4}$	$0.5E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.6E^{-5}$	$0.18E^{-4}$	$0.17E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.24E^{-1}$	$0.99E^{-2}$	$0.88E^{-2}$	$0.77E^{-2}$	$0.78E^{-2}$	$0.10E^{-1}$	$0.23E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.5 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.79E^{-4}$	$0.8E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.4E^{-5}$	$0.1E^{-4}$	$0.87E^{-4}$
$\theta_1(\tau)$	$0.16E^{-1}$	$0.72E^{-2}$	$0.58E^{-2}$	$0.52E^{-2}$	$0.53E^{-2}$	$0.67E^{-2}$	$0.16E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.5 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.37E^{-4}$	$0.4E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.4E^{-5}$	$0.34E^{-4}$
$\theta_1(\tau)$	$0.95E^{-2}$	$0.36E^{-2}$	$0.28E^{-2}$	$0.28E^{-2}$	$0.30E^{-2}$	$0.39E^{-2}$	$0.84E^{-2}$

Tabela 4.27: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 5.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 6.

Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.6 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.17E^{-4}$	$0.5E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.4E^{-5}$	$0.5E^{-5}$	$0.14E^{-4}$
$\theta_1(\tau)$	$0.45E^{-1}$	$0.22E^{-1}$	$0.18E^{-1}$	$0.16E^{-1}$	$0.18E^{-1}$	$0.21E^{-1}$	$0.46E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.6 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.6E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.5E^{-5}$
$\theta_1(\tau)$	$0.14E^{-1}$	$0.74E^{-2}$	$0.61E^{-2}$	$0.67E^{-2}$	$0.69E^{-2}$	$0.78E^{-2}$	$0.17E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.6 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.3E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.3E^{-5}$
$\theta_1(\tau)$	$0.92E^{-2}$	$0.42E^{-2}$	$0.38E^{-2}$	$0.34E^{-2}$	$0.37E^{-2}$	$0.48E^{-2}$	$0.96E^{-2}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.6 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.2E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	0	0	0	$0.1E^{-5}$	$0.2E^{-5}$
$\theta_1(\tau)$	$0.49E^{-2}$	$0.21E^{-2}$	$0.19E^{-2}$	$0.17E^{-2}$	$0.16E^{-2}$	$0.21E^{-2}$	$0.48E^{-2}$

Tabela 4.28: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 6.

À variância das estimativas do *Modelo 6*, reconhece-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos diminuem ao passo que amostra (N) aumenta, ficando próximo de 0. Como a amostra

(N) aumenta, a $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui, veja Tabela 4.28.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 7.

Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.7 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.25E^{-3}$	$0.75E^{-4}$	$0.27E^{-4}$	$0.15E^{-4}$	$0.22E^{-4}$	$0.60E^{-4}$	$0.21E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.53E^{-1}$	$0.21E^{-1}$	$0.17E^{-1}$	$0.17E^{-1}$	$0.17E^{-1}$	$0.24E^{-1}$	$0.53E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.7 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.24E^{-3}$	$0.49E^{-4}$	$0.13E^{-4}$	$0.4E^{-5}$	$0.13E^{-4}$	$0.52E^{-4}$	$0.27E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.19E^{-1}$	$0.87E^{-2}$	$0.72E^{-2}$	$0.68E^{-2}$	$0.71E^{-2}$	$0.87E^{-2}$	$0.16E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.7 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.18E^{-3}$	$0.30E^{-4}$	$0.8E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.8E^{-5}$	$0.31E^{-4}$	$0.20E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.13E^{-1}$	$0.51E^{-2}$	$0.43E^{-2}$	$0.39E^{-2}$	$0.38E^{-2}$	$0.48E^{-2}$	$0.11E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.7 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.12E^{-3}$	$0.16E^{-4}$	$0.4E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.15E^{-4}$	$0.11E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.72E^{-2}$	$0.29E^{-2}$	$0.22E^{-2}$	$0.19E^{-2}$	$0.19E^{-2}$	$0.25E^{-2}$	$0.65E^{-2}$

Tabela 4.29: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 7.

Para a variância das estimativas do *Modelo 7*, sabe-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos e diminui conforme a amostra (N) aumenta, sendo próximo ao 0. A $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui, e a amostra (N) aumenta, simultaneamente. Veja Tabela 4.29.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 8.

Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.8 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.30E^{-3}$	$0.54E^{-4}$	$0.20E^{-4}$	$0.12E^{-4}$	$0.17E^{-4}$	$0.45E^{-4}$	$0.32E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.46E^{-1}$	$0.22E^{-1}$	$0.17E^{-1}$	$0.18E^{-1}$	$0.19E^{-1}$	$0.23E^{-1}$	$0.51E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.8 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.13E^{-3}$	$0.13E^{-4}$	$0.5E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.5E^{-5}$	$0.16E^{-4}$	$0.15E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.21E^{-1}$	$0.92E^{-2}$	$0.66E^{-2}$	$0.60E^{-2}$	$0.65E^{-2}$	$0.87E^{-2}$	$0.20E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.8 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.84E^{-4}$	$0.8E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.8E^{-5}$	$0.72E^{-4}$
$\theta_1(\tau)$	$0.16E^{-1}$	$0.63E^{-2}$	$0.45E^{-2}$	$0.37E^{-2}$	$0.43E^{-2}$	$0.63E^{-2}$	$0.15E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.8 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.39E^{-4}$	$0.5E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.4E^{-5}$	$0.39E^{-4}$
$\theta_1(\tau)$	$0.82E^{-2}$	$0.31E^{-2}$	$0.21E^{-2}$	$0.19E^{-2}$	$0.23E^{-2}$	$0.33E^{-2}$	$0.89E^{-2}$

Tabela 4.30: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 8.

À variância das estimativas do *Modelo 8*, nota-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos e diminui conforme a amostra (N) aumenta, cerceando o 0. A $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui quando a amostra (N) aumenta sendo maior nos quantis das extremidade e menores nos quantis medianos, veja Tabela 4.30.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 9.

Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.9 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.14E^{-4}$	$0.6E^{-5}$	$0.4E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.4E^{-5}$	$0.6E^{-5}$	$0.14E^{-4}$
$\theta_1(\tau)$	$0.45E^{-1}$	$0.18E^{-1}$	$0.13E^{-1}$	$0.13E^{-1}$	$0.14E^{-1}$	$0.17E^{-1}$	$0.40E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.9 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.5E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.5E^{-5}$
$\theta_1(\tau)$	$0.12E^{-1}$	$0.55E^{-2}$	$0.49E^{-2}$	$0.49E^{-2}$	$0.47E^{-2}$	$0.50E^{-2}$	$0.12E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.9 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.3E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.5E^{-5}$
$\theta_1(\tau)$	$0.74E^{-2}$	$0.31E^{-2}$	$0.25E^{-2}$	$0.25E^{-2}$	$0.25E^{-2}$	$0.33E^{-2}$	$0.76E^{-2}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.9 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.2E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	0	0	0	$0.1E^{-5}$	$0.2E^{-5}$
$\theta_1(\tau)$	$0.42E^{-2}$	$0.18E^{-2}$	$0.14E^{-2}$	$0.13E^{-2}$	$0.13E^{-2}$	$0.17E^{-2}$	$0.37E^{-2}$

Tabela 4.31: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 9.

À variância das estimativas do *Modelo 9*, observa-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos, e diminui conforme a amostra (N) aumenta ficando muito próximo de 0. A $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui assim que a amostra (N) aumenta, sendo maior nos quantis das extremidade e menor nos quantis medianos, veja Tabela 4.31.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 10.

Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.10 para $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.31E^{-3}$	$0.85E^{-4}$	$0.29E^{-4}$	$0.14E^{-4}$	$0.28E^{-4}$	$0.90E^{-4}$	$0.31E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.37E^{-1}$	$0.19E^{-1}$	$0.14E^{-1}$	$0.15E^{-1}$	$0.15E^{-1}$	$0.18E^{-1}$	$0.37E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.10 para $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.32E^{-3}$	$0.51E^{-4}$	$0.12E^{-4}$	$0.4E^{-5}$	$0.14E^{-4}$	$0.55E^{-4}$	$0.28E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.15E^{-1}$	$0.71E^{-2}$	$0.54E^{-2}$	$0.49E^{-2}$	$0.52E^{-2}$	$0.64E^{-2}$	$0.16E^{-1}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.10 para $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.24E^{-3}$	$0.31E^{-4}$	$0.7E^{-5}$	$0.2E^{-5}$	$0.8E^{-5}$	$0.31E^{-4}$	$0.25e^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.11E^{-2}$	$0.420.11E^{-2}$	$0.31E^{-2}$	$0.31E^{-2}$	$0.33E^{-2}$	$0.44E^{-2}$	$0.10e^{-2}$
Variância das estimativas de Monte Carlo, mod.10 para $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	$0.11E^{-3}$	$0.13E^{-4}$	$0.3E^{-5}$	$0.1E^{-5}$	$0.3E^{-5}$	$0.13E^{-4}$	$0.10E^{-3}$
$\theta_1(\tau)$	$0.53E^{-2}$	$0.21E^{-2}$	$0.14E^{-2}$	$0.13E^{-2}$	$0.15E^{-2}$	$0.23E^{-2}$	$0.57E^{-2}$

Tabela 4.32: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 10.

À variância das estimativas do *Modelo 10*, pondera-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos, e diminui quando a amostra (N) aumenta, aproximando-se de 0. A $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui ao passo que a amostra (N) aumenta, sendo maior nos quantis das extremidade e menor nos quantis medianos, veja Tabela 4.32.

4.3.6

Análise da média das estimativas de Monte Carlo - Modelos: 11, 12, 13 (grupo 2)

Modelo 11: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.65 + 0.25 \cdot \tau$

Comparações efetuadas para Modelo 11: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.65 + 0.25 \cdot \tau$

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.630	-0.842	-0.392	-0.003	0.381	0.839	1.629
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.6625	0.7	0.7375	0.775	0.8125	0.85	0.8875
$\theta_1(\tau)$	0.641	0.668	0.7067	0.741	0.778	0.817	0.860

Tabela 4.33: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.11 para $N = 100$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.636	-0.843	-0.389	0	0.387	0.840	1.633
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.6625	0.7	0.7375	0.775	0.8125	0.85	0.8875
$\theta_1(\tau)$	0.656	0.690	0.725	0.762	0.800	0.838	0.872

Tabela 4.34: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.11 para $N = 300$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.642	-0.840	-0.388	-0.005	0.384	0.843	1.644
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.6625	0.7	0.7375	0.775	0.8125	0.85	0.8875
$\theta_1(\tau)$	0.657	0.695	0.731	0.767	0.805	0.842	0.881

Tabela 4.35: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.11 para $N = 500$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.641	-0.837	-0.384	0.001	0.385	0.841	1.643
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.6625	0.7	0.7375	0.775	0.8125	0.85	0.8875
$\theta_1(\tau)$	0.657	0.695	0.733	0.771	0.809	0.845	0.882

Tabela 4.36: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.11 para $N = 1000$.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 11*, atenta-se para o fato que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ aumenta nos quantis e aproxima-se de forma considerável do valor teórico à medida que a amostra (N) aumenta. A amostra

(N) aumenta, posto que o parâmetro $\theta_1(\tau)$ é crescente, aproximando-se do seus valores teóricos para os respectivos quantis. Esses fatos são bons para a modelagem realizada pelo QAR(1).

Modelo 12: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.5$ se $\tau < 0.5$ ou $\theta_1(\tau) = 0.95$ se $\tau \geq 0.5$

Comparações efetuadas para Modelo 12: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.5$ se $\tau < 0.5$ ou $\theta_1(\tau) = 0.95$ se $\tau \geq 0.5$

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.630	-0.861	-0.448	-0.018	0.414	0.848	1.638
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.5	0.5	0.5	0.95	0.95	0.95	0.95
$\theta_1(\tau)$	0.469	0.485	0.533	0.690	0.849	0.893	0.917

Tabela 4.37: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.12 para $N = 100$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.640	-0.854	-0.447	-0.017	0.431	0.854	1.642
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.5	0.5	0.5	0.95	0.95	0.95	0.95
$\theta_1(\tau)$	0.493	0.510	0.544	0.705	0.880	0.920	0.933

Tabela 4.38: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.12 para $N = 300$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.640	-0.859	-0.445	-0.001	0.445	0.860	1.639
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.5	0.5	0.5	0.95	0.95	0.95	0.95
$\theta_1(\tau)$	0.499	0.515	0.549	0.720	0.890	0.923	0.944

Tabela 4.39: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.12 para $N = 500$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.643	-0.860	-0.447	-0.009	0.442	0.859	1.644
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.5	0.5	0.5	0.95	0.95	0.95	0.95
$\theta_1(\tau)$	0.499	0.517	0.550	0.716	0.892	0.927	0.946

Tabela 4.40: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.12 para $N = 1000$.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 12*, examina-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ é crescente e aproxima-se de forma enfática do valor teórico à medida que a amostra (N) aumenta. Para os quantis $\tau < 0.5$, o parâmetro $\theta_1(\tau)$ é crescente com o quantil e próximo do seu valor teórico $\theta_1(\tau) = 0.5$. Já o quantil $\tau = 0.5$, o parâmetro $\theta_1(\tau)$ fica em torno de 0.7 abaixo de seu valor teórico 0.95, ou seja, perto do limiar (quando θ_1 muda) há um viés na estimação de $\theta_1(\tau)$, e o viés não diminui com o tamanho de N, como seria desejável. O quantil ($\tau > 0.5$) aumenta segundo os crescentes valores estimados, aproximando-se do seu valor teórico $\theta_1(\tau) = 0.95$.

Modelo 13: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.85 + 0.25 \cdot \tau$

Comparações efetuadas para Modelo 13: Um QAR (1), com $\theta_0(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ e $\theta_1(\tau) = 0.85 + 0.25 \cdot \tau$

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.651	-0.852	-0.401	-0.016	0.365	0.806	1.586
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.863	0.900	0.938	0.975	1.013	1.050	1.088
$\theta_1(\tau)$	0.815	0.854	0.893	0.928	0.964	0.998	1.033

Tabela 4.41: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.13 para $N = 100$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.646	-0.848	-0.402	-0.014	0.370	0.829	1.635
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.863	0.900	0.938	0.975	1.013	1.050	1.088
$\theta_1(\tau)$	0.848	0.885	0.922	0.960	0.997	1.035	1.073

Tabela 4.42: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.13 para $N = 300$.

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.657	-0.857	-0.405	-0.017	0.367	0.826	1.630
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.863	0.900	0.938	0.975	1.013	1.050	1.088
$\theta_1(\tau)$	0.854	0.890	0.928	0.967	1.003	1.040	1.078

Tabela 4.43: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.13 para $N = 500$.

Para as simulações e estimativas do *Modelo 13*, repara-se que o parâmetro $\theta_0(\tau)$ é crescente com os quantis e aproxima-se de forma considerável do valor teórico à medida que a amostra (N) aumenta. E, quando há este aumento, o

τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
Teórico para $\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.842	-0.385	0	0.385	0.842	1.645
$\theta_0(\tau)$	-1.645	-0.847	-0.391	-0.005	0.379	0.837	1.647
Teórico para $\theta_1(\tau)$	0.863	0.900	0.938	0.975	1.013	1.050	1.088
$\theta_1(\tau)$	0.860	0.896	0.934	0.971	1.008	1.045	1.083

Tabela 4.44: Média das estimativas de Monte Carlo, mod.13 para $N = 1000$.

parâmetro $\theta_1(\tau)$ é crescente e próximo dos seus valores teóricos $\theta_1(\tau)$ para os respectivos quantis.

4.3.7

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo - Modelos: 11, 12, 13 (grupo 2)

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 11.

Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.050	0.027	0.020	0.020	0.020	0.022	0.048
$\theta_1(\tau)$	0.021	0.010	0.008	0.008	0.008	0.010	0.024
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.015	0.007	0.006	0.007	0.007	0.008	0.015
$\theta_1(\tau)$	0.006	0.003	0.002	0.002	0.002	0.003	0.006
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.009	0.004	0.004	0.003	0.003	0.004	0.009
$\theta_1(\tau)$	0.004	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.004
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.004	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.005
$\theta_1(\tau)$	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002

Tabela 4.45: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 11.

À variância das estimativas do *Modelo 11*, observa-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos, e diminui no tempo em que a amostra (N) aumenta, ficando próximo de 0. A $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui e a amostra (N) aumenta, sendo maior nos quantis das extremidade e menor nos quantis medianos, veja Tabela 4.45.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 12.

Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.045	0.019	0.015	0.036	0.024	0.027	0.051
$\theta_1(\tau)$	0.022	0.007	0.007	0.028	0.011	0.009	0.025
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.015	0.006	0.004	0.023	0.007	0.007	0.017
$\theta_1(\tau)$	0.006	0.002	0.002	0.017	0.003	0.003	0.006
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.009	0.003	0.002	0.016	0.003	0.004	0.009
$\theta_1(\tau)$	0.004	0.001	0.001	0.014	0.001	0.002	0.004
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.005	0.002	0.001	0.012	0.002	0.002	0.005
$\theta_1(\tau)$	0.002	0.001	0	0.010	0.001	0.001	0.002

Tabela 4.46: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 12.

Para a variância das estimativas do *Modelo 12*, vê-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos e diminui conforme a amostra (N) aumenta, ficando próximo de 0. A $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui ao passo que a amostra (N) aumenta, sendo maior nos quantis das extremidade e menor nos quantis medianos, veja Tabela 4.46.

Análise da variância das estimativas de Monte Carlo para Modelo 13.

Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 100$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.050	0.027	0.020	0.020	0.020	0.022	0.048
$\theta_1(\tau)$	0.021	0.010	0.008	0.008	0.008	0.010	0.024
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 300$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.015	0.007	0.006	0.007	0.007	0.008	0.015
$\theta_1(\tau)$	0.006	0.003	0.002	0.002	0.002	0.003	0.006
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 500$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.009	0.004	0.004	0.003	0.003	0.004	0.009
$\theta_1(\tau)$	0.004	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.004
Variância das estimativas de Monte Carlo $N = 1000$							
τ	0.05	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8	0.95
$\theta_0(\tau)$	0.004	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.005
$\theta_1(\tau)$	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002

Tabela 4.47: Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 13.

À variância das estimativas do *Modelo 13*, pondera-se que a $\text{var}(\theta_0(\tau))$ é maior nos quantis das extremidades e menor nos quantis medianos, e diminui concomitantemente ao aumento da amostra (N), aproximando-se de 0. A $\text{var}(\theta_1(\tau))$ diminui ao passo que a amostra (N) aumenta, sendo maior nos quantis das extremidade e menor nos quantis medianos, veja Tabela 4.47.

4.3.8

Simulação de Monte Carlo - teste de hipóteses

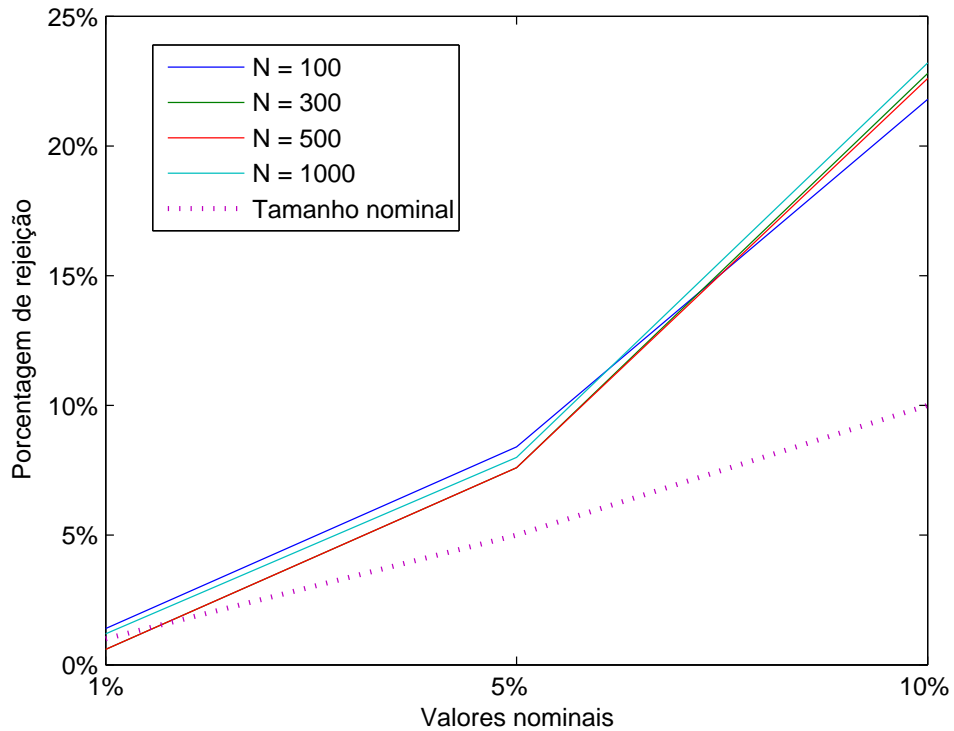
Através da simulação de Monte Carlo, foram analisadas, para o Modelo de $QAR(1)$, as estimativas da média, da variância e do teste de hipóteses. Os resultados obtidos do teste de *Location-Scale* são mapeados a seguir. Para construção do intervalo $\mathcal{T} \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, foi escolhido o valor $\varepsilon = 0.05$, obtendo então $\mathcal{T} \in [0.05, 0.95]$. Os valores críticos assintóticos do teste para estas condições são encontrados em Koenker (20) (2005). Uma parte desses valores foram descritos na Tabela 3.1.

Os valores críticos da estatística do teste para $p = 1$ associados aos valores nominais de 1%, 5% e 10% são, respectivamente, 1% = 2.721, 5% = 2.14 e 10% = 1.872.

Imediatamente, é feita a análise dos (DGP) do grupo 1 - Tamanho do teste.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 1.

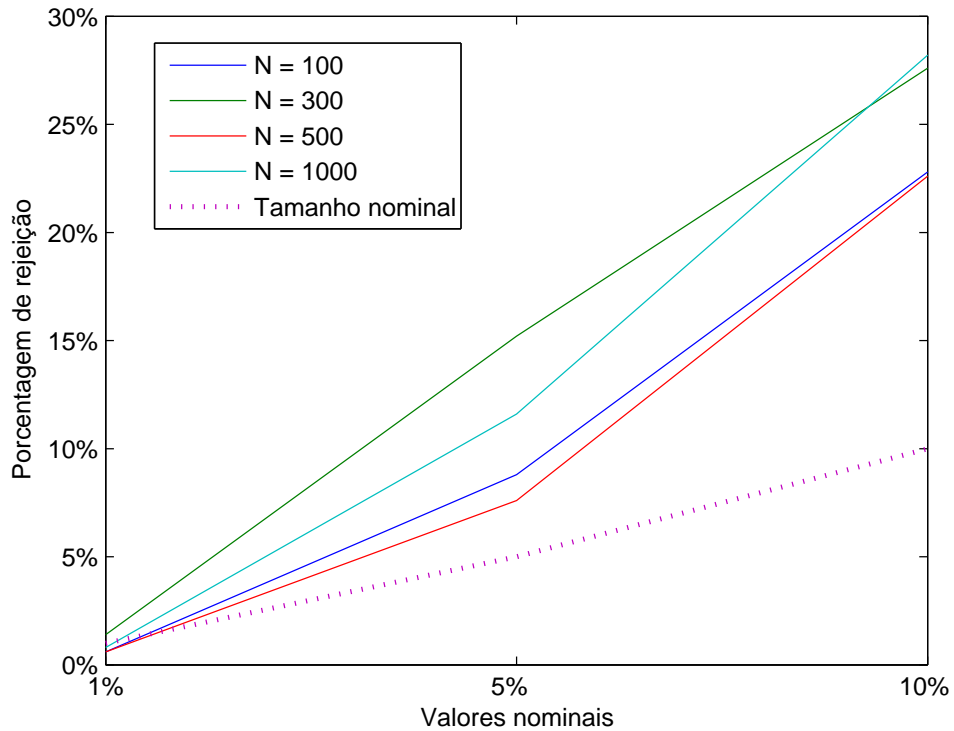
Figura 4.13: Resultado teste de hipótese do Modelo 1.



Para o Modelo 1, o gráfico mostra que o teste rejeitou a hipótese nula muito mais vezes do que se esperava. Exceto nos casos onde o tamanho nominal do teste foi de 1%, a porcentagem de rejeição foi próxima ao seu valor nominal.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 2.

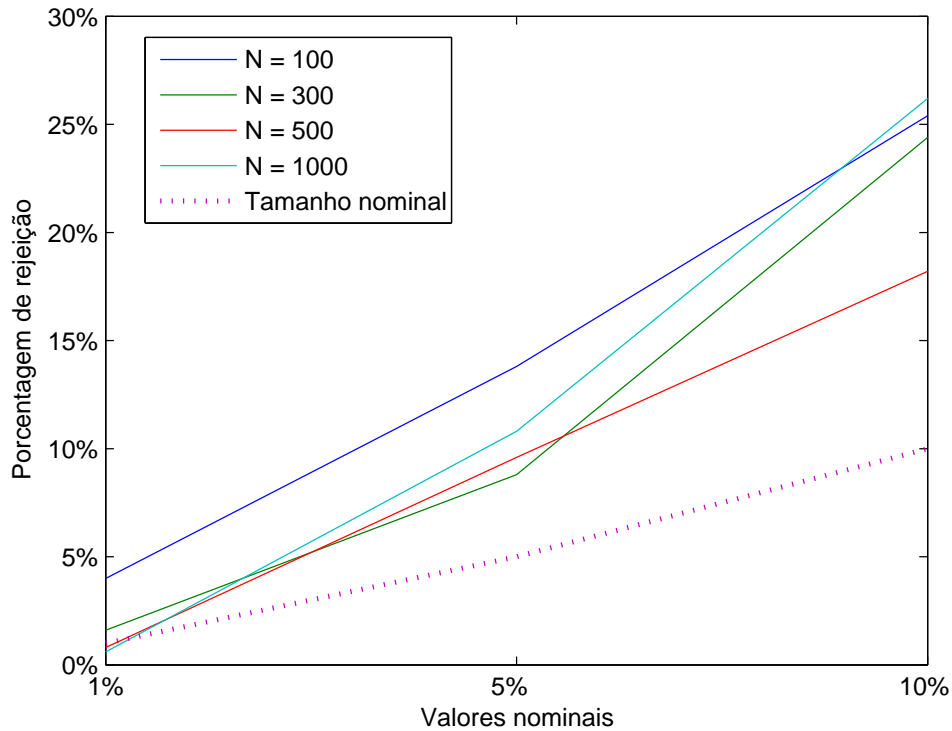
Figura 4.14: Resultado teste de hipótese do Modelo 2.



Para o Modelo 2, o gráfico expõe que o teste rejeitou a hipótese nula muito mais vezes do que se esperava. Exceto nos casos onde o tamanho nominal do teste foi de 1%, a porcentagem de rejeição foi próxima ao seu valor nominal.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 3.

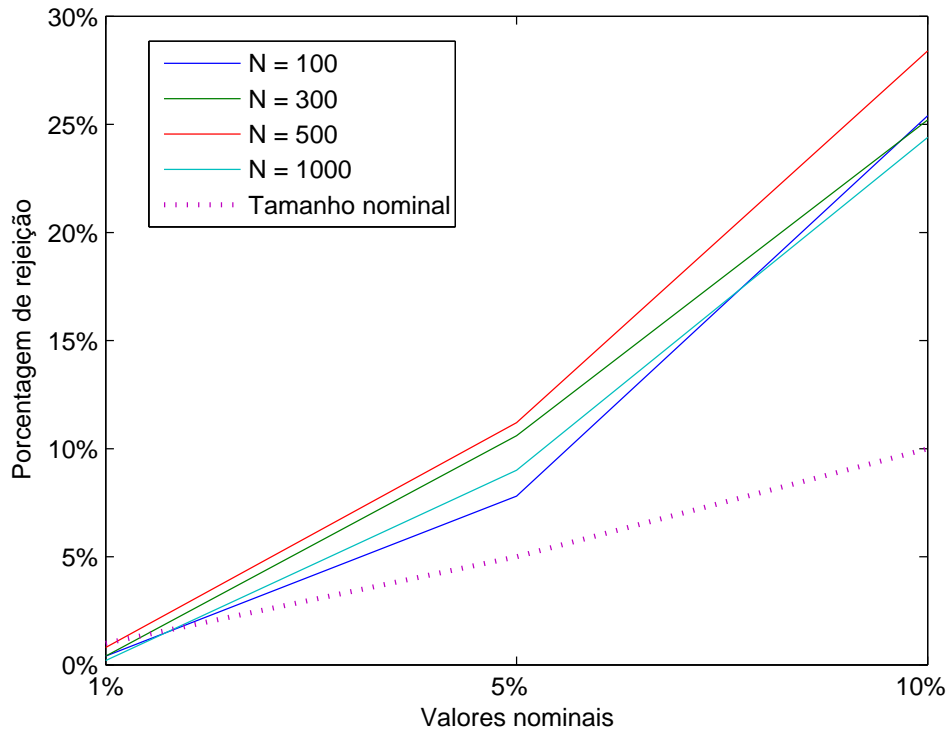
Figura 4.15: Resultado teste de hipótese do Modelo 3.



Para o Modelo 3, o gráfico revela que o teste rejeitou a hipótese nula muito mais vezes do que se esperava para as taxas nominais de 5% e de 10%. Exceto nos casos onde o tamanho nominal do teste foi de 1%, a porcentagem de rejeição foi próxima ao seu valor nominal, mas, para $N = 100$, a porcentagem de rejeição mostrou-se alta.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 4.

Figura 4.16: Resultado teste de hipótese do Modelo 4.



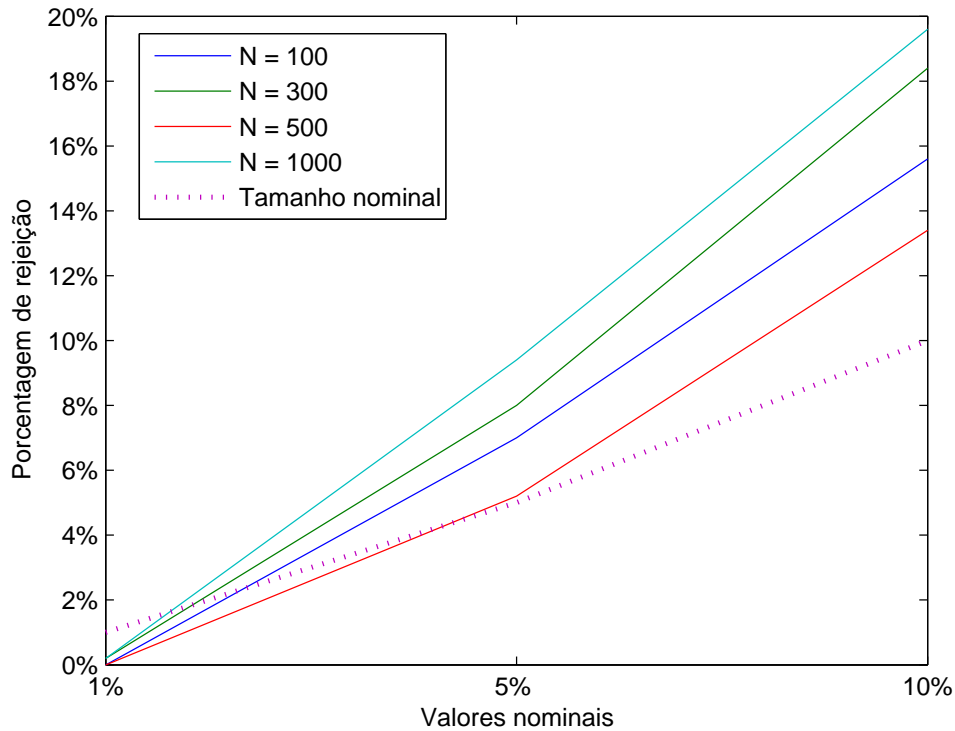
Para o Modelo 4, o gráfico exibe que o teste rejeitou a hipótese nula muito mais vezes do que se esperava para as taxas nominais de 5% e de 10%. Já na taxa nominal de 1%, a porcentagem de rejeição foi próxima ao seu valor nominal.

Portanto, os Modelos 1, 2, 3, 4 apresentaram, para o valor nominal de 1%, resultados razoáveis; porém, para valores nominais de 5% e 10%, observou-se um alto índice de rejeição da hipótese nula. A alta taxa de rejeição da hipótese nula - isto é, a hipótese de que o modelo $AR(p)$ deve ser utilizado para a modelagem dos dados - pode levar à errônea decisão da utilização de um modelo mais complexo $QAR(p)$ e com menor ferramental analítico disponível na literatura.

Por outro lado, as boas propriedades da estimação e a boa potência do teste apresentada pelos modelos do grupo 2 indicam que a utilização do $QAR(p)$ produz bons resultados estatísticos, quando modelamos os dados originados de um modelo $AR(p)$.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 5.

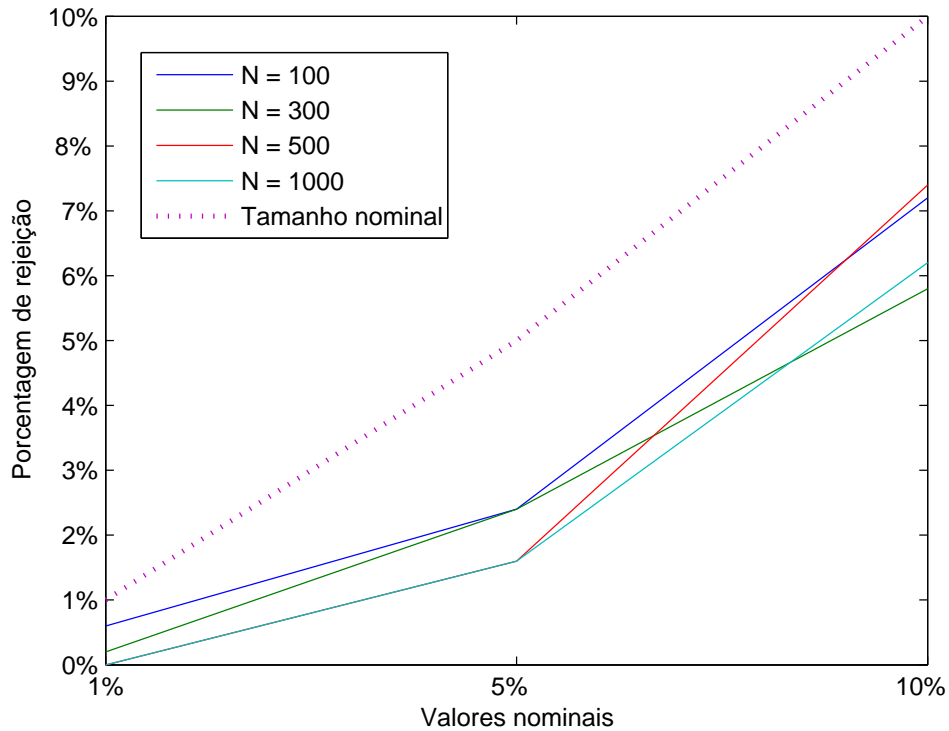
Figura 4.17: Resultado teste de hipótese do Modelo 5.



Para o Modelo 5, o gráfico mostra que, quando a taxa nominal de 1%, a porcentagem de rejeição foi abaixo do seu valor nominal. Na taxa de 5%, a porcentagem de rejeição ficou próxima de seu valor nominal. Já na taxa de 10%, o teste rejeitou a hipótese nula muito mais vezes do que se esperava, ou seja, o tamanho do teste piora quando aumenta o tamanho da amostra.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 6.

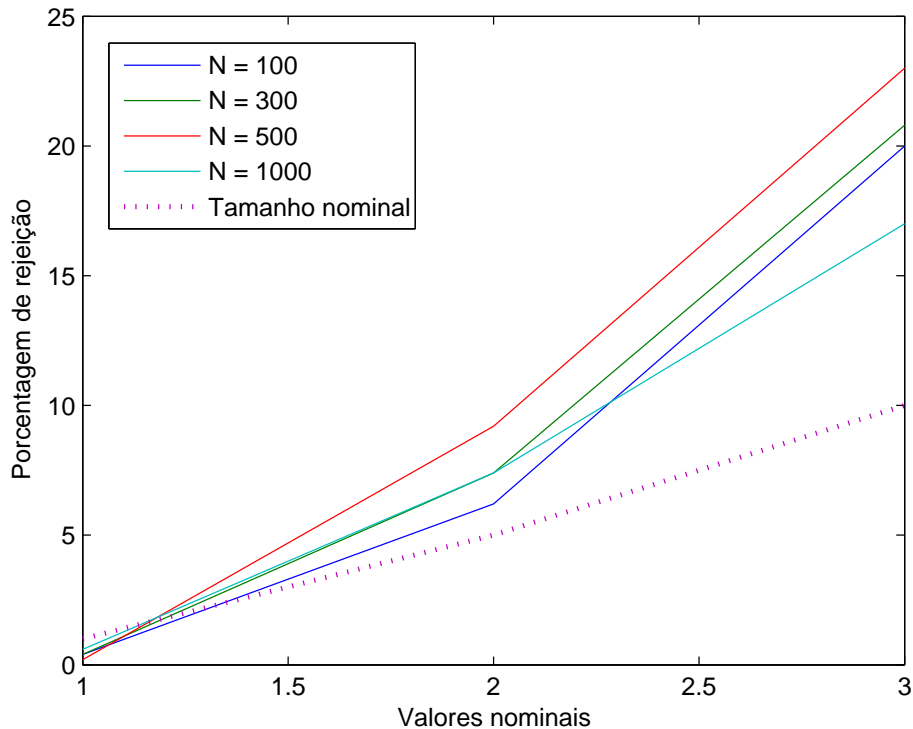
Figura 4.18: Resultado teste de hipótese do Modelo 6.



Para o Modelo 6, o gráfico expõe que, para todas as taxas nominais, a porcentagem de rejeição da hipótese nula ficou abaixo dos seus respectivos valores nominais.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 7.

Figura 4.19: Resultado teste de hipótese do Modelo 7.

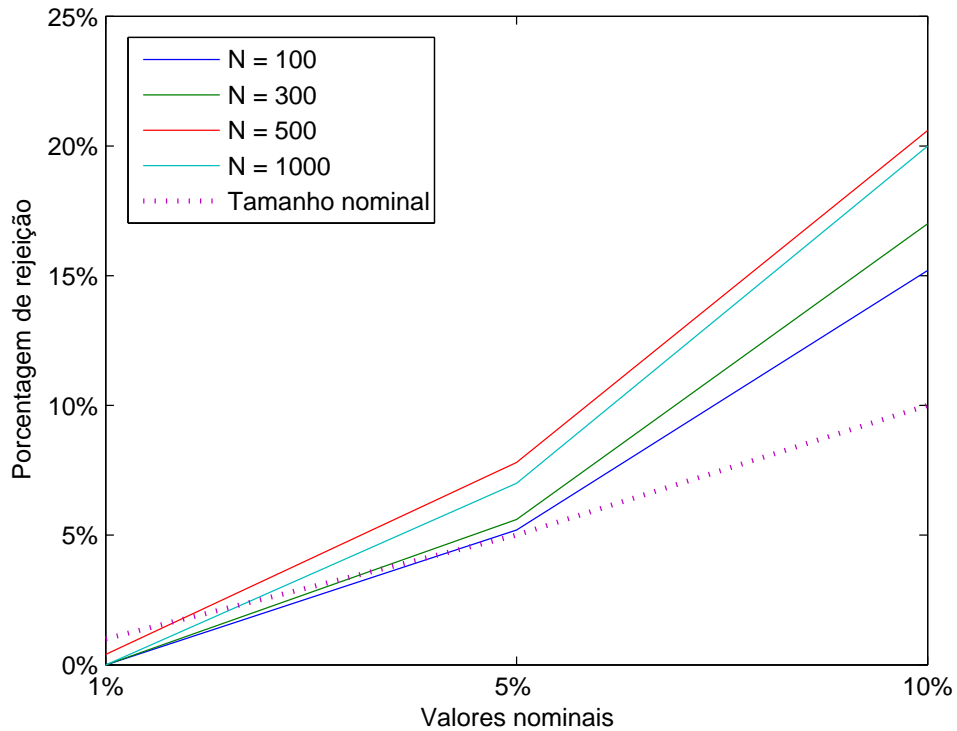


Para o Modelo 7, o gráfico exibe que, para a taxa nominal de 1%, a porcentagem de rejeição foi abaixo do seu valor nominal. Na taxa de 5%, a porcentagem de rejeição ficou acima do valor nominal para todos os tamanhos de N . Já na taxa de 10%, o teste rejeitou a hipótese nula muito acima do que se esperava para todos N .

Assim, os Modelos 5, 6 e 7 apresentaram baixa rejeição da hipótese nula para taxa nominal de 1%. Para a taxa de 5%, diversos resultados foram obtidos: para os modelo 5 e 6, apresentaram-se resultados razoáveis, e, para o modelo 6, apresentou-se baixa rejeição da hipótese nula. Já na taxa de 10%, para todos os três modelos apresentou-se alta rejeição da hipótese nula com taxa elevada. Revelam-se, então, características não desejáveis para um teste de hipóteses que tem por objetivo determinar um modelo de análise a ser seguido.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 8.

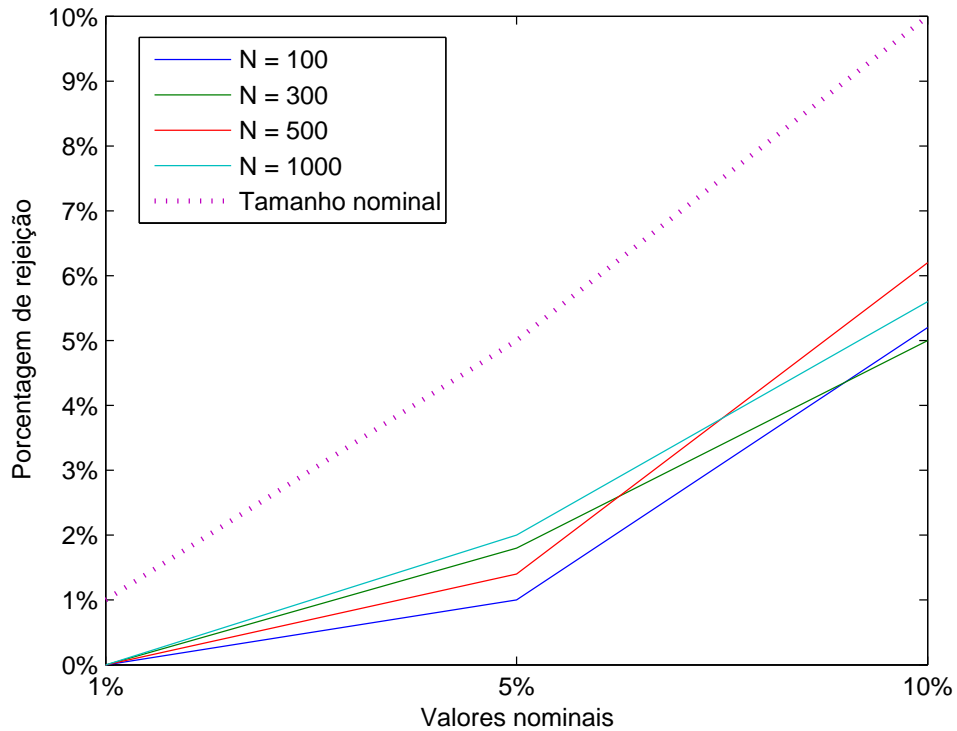
Figura 4.20: Resultado teste de hipótese do Modelo 8.



Para o Modelo 8, o gráfico revela que, para a taxa nominal de 1%, a porcentagem de rejeição ficou muito abaixo do seu valor nominal. Na taxa nominal de 5%, a porcentagem de rejeição ficou próxima de seu valor nominal para $N = 100$, $N = 300$, e para $N = 500$ e $N = 1000$ a mesma ficou um pouco acima do valor nominal do teste. Já na taxa de 10%, a porcentagem de rejeição da hipótese nula ficou muito acima para todos os tamanhos de N .

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 9.

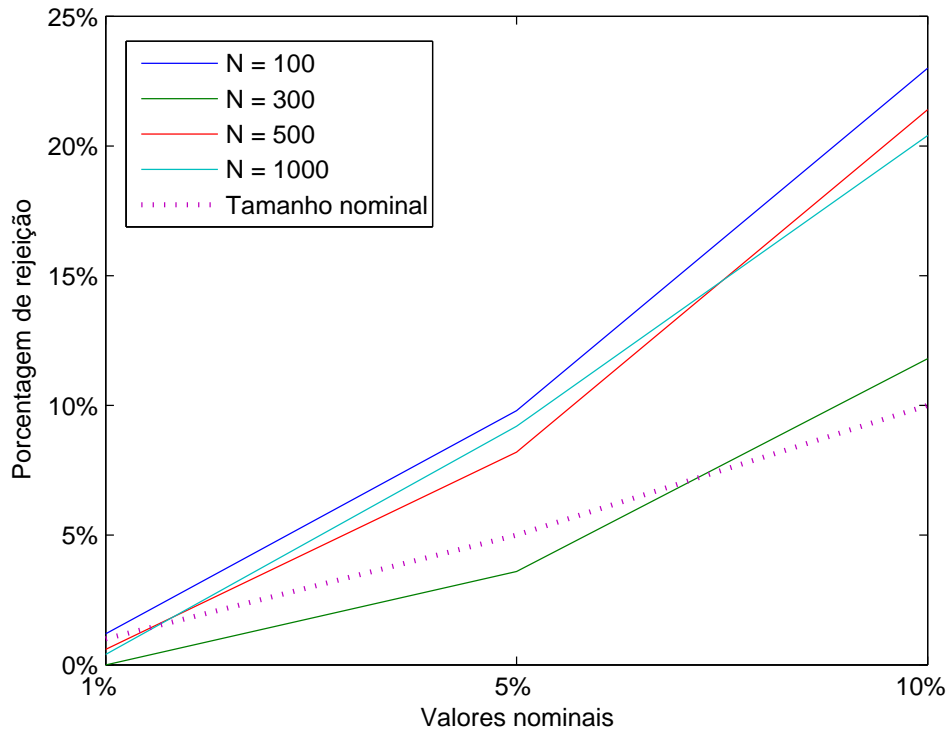
Figura 4.21: Resultado teste de hipótese do Modelo 9.



Para o Modelo 9, o gráfico mostra que, na taxa nominal de 1%, nenhuma réplica da simulação de Monte Carlo foi rejeitada. Na taxa nominal de 5%, a porcentagem de rejeição ficou abaixo do valor nominal do teste. Já na taxa de 10%, a porcentagem de rejeição da hipótese nula ficou muito abaixo para todos os tamanhos de N.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 10.

Figura 4.22: Resultado teste de hipótese do Modelo 10.



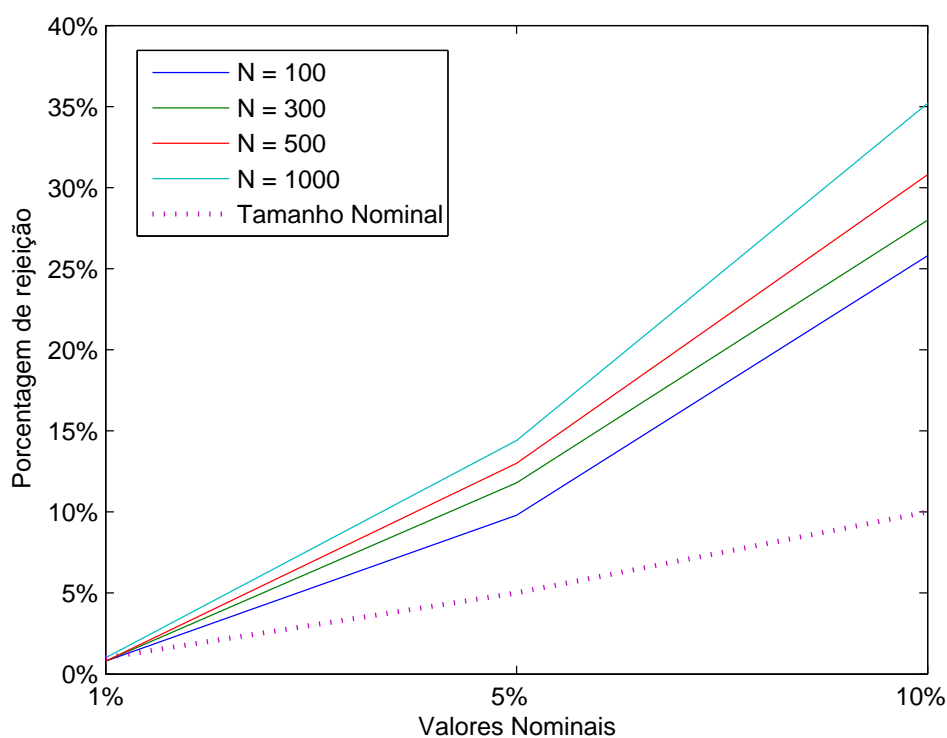
Para o Modelo 10, o gráfico expõe que, na taxa nominal de 1%, a porcentagem de rejeição ficou próxima de seu valor nominal. Na taxa nominal de 5%, a porcentagem de rejeição ficou abaixo para $N = 300$, e nos demais casos ficou acima do valor nominal do teste. Já na taxa de 10%, a porcentagem de rejeição da hipótese nula ficou muito acima para $N = 100, 500$ e 1000 , e próxima para $N = 300$.

Portanto, para os Modelos 8, 9 e 10, notam-se comportamentos distintos: para taxa nominal de 1%, os resultados são ruins para o modelo 8 e 9, e são razoáveis para o modelo 10, embora a porcentagem de rejeição devesse ser mais próxima de seu tamanho nominal. Já na taxa de 5%, os resultados podem ser classificados como satisfatórios para o Modelo 8, razoáveis para o Modelo 9, ficando abaixo de 2% para todas as amostras, e ruins para o Modelo 10 apresentando altas taxas de rejeição, visto que na maioria das amostras a taxa de rejeição ficou próxima de 10%. Para a taxa de 10%, todas as amostras geradas utilizando-se os Modelos 8 e 10 obtiveram uma alta taxa de rejeição, enquanto o Modelo 9 apresentou taxa de rejeição menor do que o tamanho nominal do teste.

A seguir é feita a análise do (DGP) do grupo 2 - Potência do teste. Para avaliar a potência do teste de hipóteses, foram utilizados os modelos do grupo 2 (11, 12 e 13). Agora se trata de potência e deseja-se que esta seja maior do que o tamanho nominal do teste sempre, e de preferência maior que o que o maior tamanho para os modelos do grupo 1 (1 ao 10).

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 11.

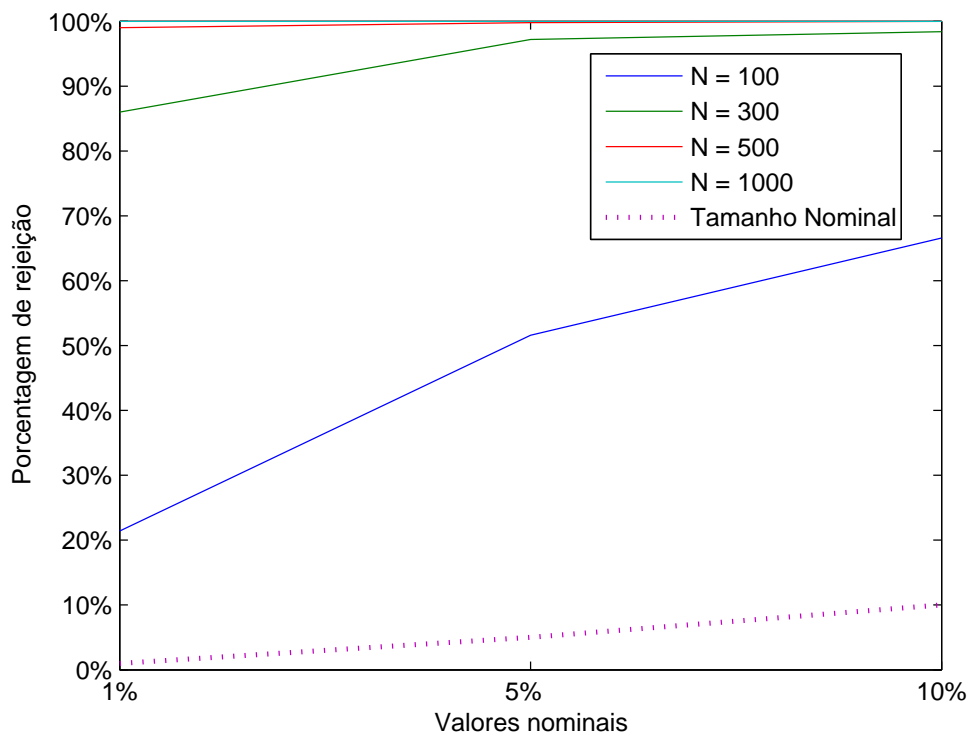
Figura 4.23: Resultado teste de hipótese do Modelo 11.



Para o Modelo 11, o gráfico exibe que, na taxa nominal de 1%, a porcentagem de rejeição ficou próxima de seu valor nominal. Na taxa nominal de 5%, a porcentagem de rejeição ficou acima do valor nominal e aumentou à medida que o tamanho da amostra cresce. Já na taxa de 10%, a porcentagem de rejeição da hipótese nula ficou acima de 25% e crescente ao passo que o tamanho (N) aumenta, ou seja, a potência do teste aumenta à medida que o tamanho de N aumenta.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 12.

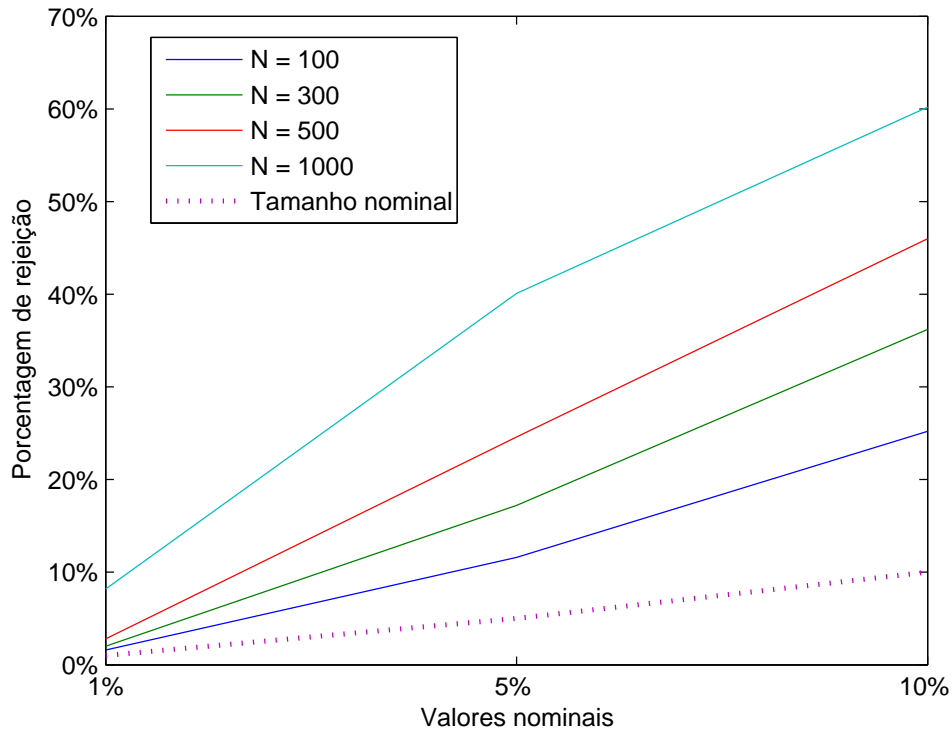
Figura 4.24: Resultado teste de hipótese do Modelo 12.



Para o Modelo 12, o gráfico mostra que, para todas as taxas nominais, a porcentagem de rejeição ficou acima de seus valores nominais e crescente à proporção que o tamanho (N) aumenta. Em alguns casos, a porcentagem chegou a 100%, ou seja, a potência do teste aumenta à medida que o tamanho de N aumenta.

Resultado do teste Location-Scale através da simulação de Monte Carlo para Modelo 13.

Figura 4.25: Resultado teste de hipótese do Modelo 13.



Para o Modelo 13, o gráfico revela que, na taxa nominal de 1%, a porcentagem de rejeição ficou próxima de seu valor nominal para $N = 100$, e crescente ao passo que a amostra aumenta. Na taxa nominal de 5%, a porcentagem de rejeição ficou acima do valor nominal para todos os casos, e crescente com a variação do tamanho da amostra. Já na taxa de 10%, a porcentagem de rejeição da hipótese nula ficou muito acima, e crescente com o tamanho da amostra, ou seja, a potência do teste aumenta bem como o tamanho de N .

Portanto, os modelos 11, 12 e 13 apresentaram ótimos resultados para a potência do teste: valores altos e crescentes com o aumento do tamanho da amostra.

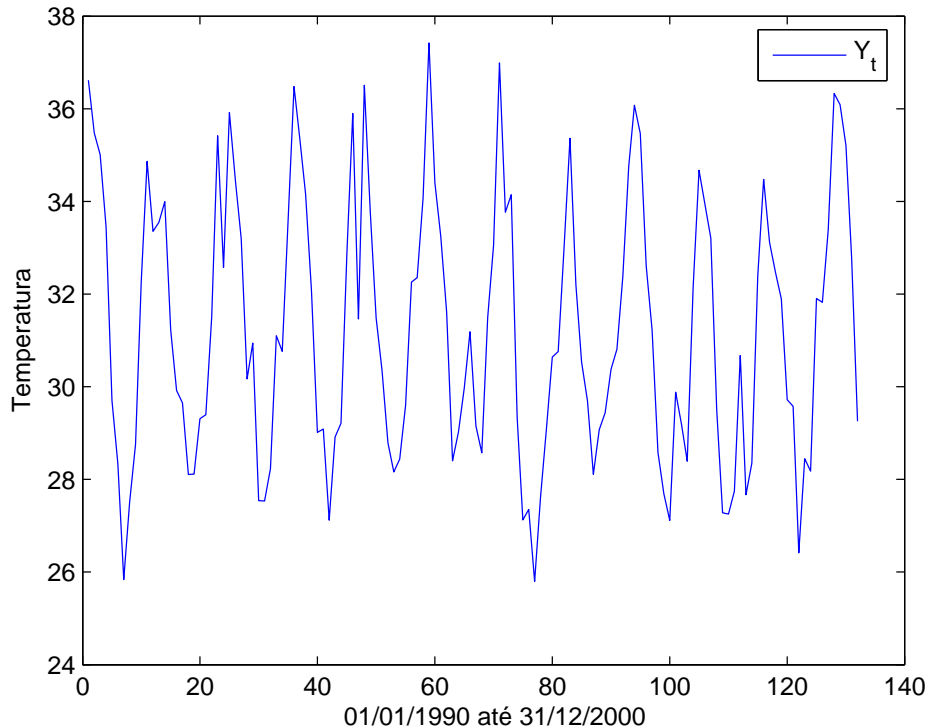
4.4

Aplicação do Modelo QAR

Adiante, é feita uma aplicação Modelo QAR, utilizando uma série de média mensal de temperatura máxima da cidade do Rio de Janeiro, no período de 01/01/1990 até 31/12/2000.

Fazendo-se uma análise mais cuidadosa da série, revelou-se que a média de temperatura alta no mês anterior precede, em geral, a média de temperatura não tão alta. Do mesmo modo, a média de temperatura máxima muito baixa geralmente precede média máxima um pouco mais alta. Em outras palavras, há uma reversão à média. Este resultado é esperado pela intuição cotidiana, já que o contrário implicaria uma espécie de passeio aleatório, de variância infinita. Pode-se propor quatro candidatos à modelagem desta série: um Modelo AR(12), estacionário, e Modelos QAR(12) com $\tau = 0.1, 0.5, 0.9$. Outro exemplo da análise de QAR de temperaturas máximas pode ser encontrado em Koenker (20), página 51, que estuda a série de temperaturas da cidade de Melbourne, Austrália.

Figura 4.26: Série de média mensal de temperatura máxima da Cidade do Rio de Janeiro período (01/01/1990 a 31/12/2000).



Separou-se parte da série para fazer a estimação do período (01/01/1990 até 31/12/1998), e a outra parte para previsão do período (01/01/1999 até 31/12/2000). Estimou-se o período acima com os quatro candidatos AR(12)

e QAR(12) com o $\tau = 0.1, 0.5$ e 0.9 , e comparou-se as previsões um passo à frente, ou seja, um mês a frente. Utilizou-se o teste t para eliminar os termos estatisticamente não significantes a um determinado nível, de forma a reduzir a estrutura do modelo. Para efetuar os diagnósticos nos resíduos, avaliou-se o gráfico da FAC dos resíduos de cada modelo obtido para verificar se o mesmo encontrava-se bem especificado. Após o diagnóstico e a especificação dos modelos acima, os mais adequados foram:

1. Modelo AR: $y_t = 3,651 + 0,541 \cdot y_{t-1} - 0,175 \cdot y_{t-8} + 0,515 \cdot y_{t-10} + \varepsilon_t$;
2. Modelo QAR, $\tau = 0.1$: $y_t = 17.97851 + 0.64576 \cdot y_{t-1} + -0.28275 \cdot y_{t-4}$;
3. Modelo QAR, $\tau = 0.5$: $y_t = -2.62584 + 0.63483 \cdot y_{t-1} + 0.44944 \cdot y_{t-10}$;
4. Modelo QAR, $\tau = 0.9$: $y_t = 50.24939 - 0.386 \cdot y_{t-4} - 0.81355 \cdot y_{t-8} + 0.65574 \cdot y_{t-10}$.

Os detalhes dos modelos serão apresentados em tabelas posteriores. A comparação feita entre os modelos foi através das estatísticas de aderência RMSE (*Root Square Mean Error*) e MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*), as quais comparam a precisão preditiva usando a raiz quadrada da média do erro e a média absoluta da percentagem do erro das previsões respectivamente.

Na tabela abaixo, revelam os valores obtidos por: RMSE e MAPE.

Estatística	AR	QAR $\tau = 0.1$	QAR $\tau = 0.5$	QAR $\tau = 0.9$
RMSE	1.5996	2.4517	1.5805	3.3990
MAPE	4.234%	6.330%	4.267%	9.056%

Observou-se que a estatística RMSE para o modelo QAR com o $\tau = 0.5$ foi o que apresentou melhor resultados. Já a MAPE, o modelo AR, mostrou-se mais adequada para previsão da série.

Modelo AR $y_t = 3,651 + 0,541 \cdot y_{t-1} - 0,175 \cdot y_{t-8} + 0,515 \cdot y_{t-10} + \varepsilon_t$.

A tabela abaixo é relativa a especificação do Modelo AR.

Coefficientes	Value	Std. Error	t Value	Pr(> t)
Intercept	3.65137	3.94432	0.926	0.357
y_{t-1}	0.54146	0.07813	6.930	5.64e-10 ***
y_{t-8}	-0.17542	0.08151	-2.152	0.034 *
y_{t-10}	0.51521	0.06591	7.817	8.63e-12 ***

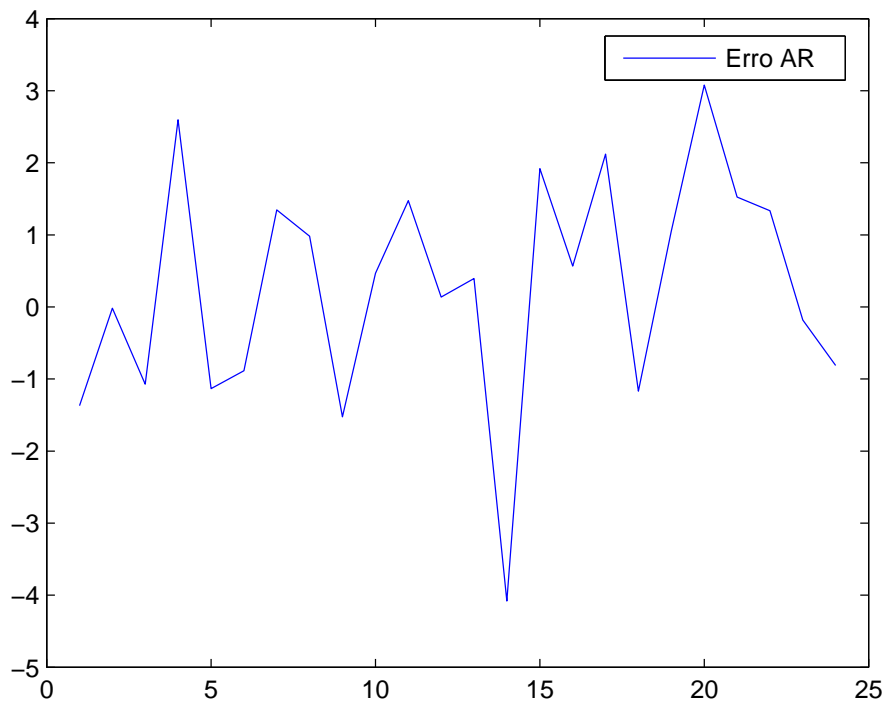
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.534 on 92 degrees of freedom Multiple

R-Squared: 0.6997, Adjusted R-squared: 0.6899

F-statistic: 71.44 on 3 and 92 DF, p-value: $< 2.2e - 16$

Figura 4.27: Erro de previsão da Modelagem feita pelo AR.



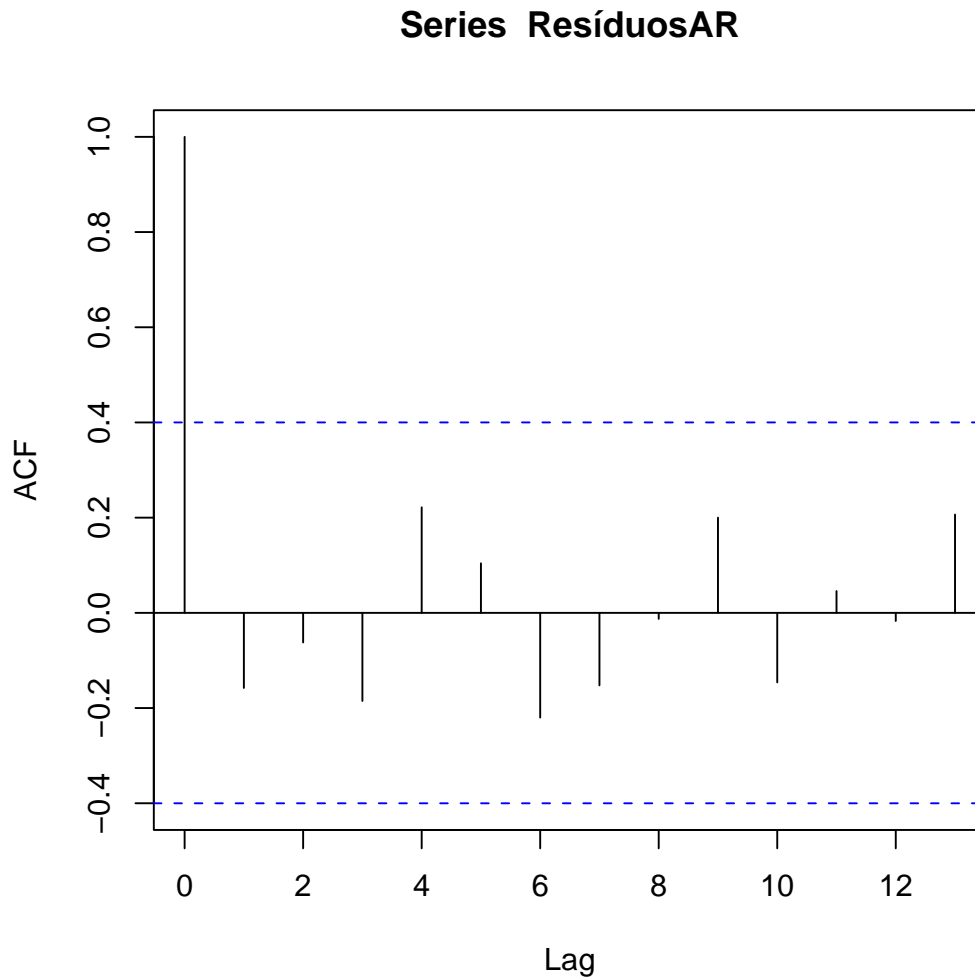
As estimativas da série de média mensal de temperatura máxima para os modelos QAR(12) para $\tau = 0.1, 0.5, 0.9$.

Modelo QAR, $\tau = 0.1$: $y_t = 17.97851 + 0.64576 \cdot y_{t-1} + -0.28275 \cdot y_{t-4}$.

A tabela abaixo é relativa a especificação do Modelo QAR para o $\tau = 0.1$.

Coefficientes	Value	Std. Error	t Value	Pr(> t)
Intercept	17.97851	3.48589	5.15751	0.00000
y_{t-1}	0.64576	0.07964	8.10843	0.00000
y_{t-4}	-0.28275	0.07784	-3.63240	0.00046

Figura 4.28: FAC do resíduos do Modelo AR.

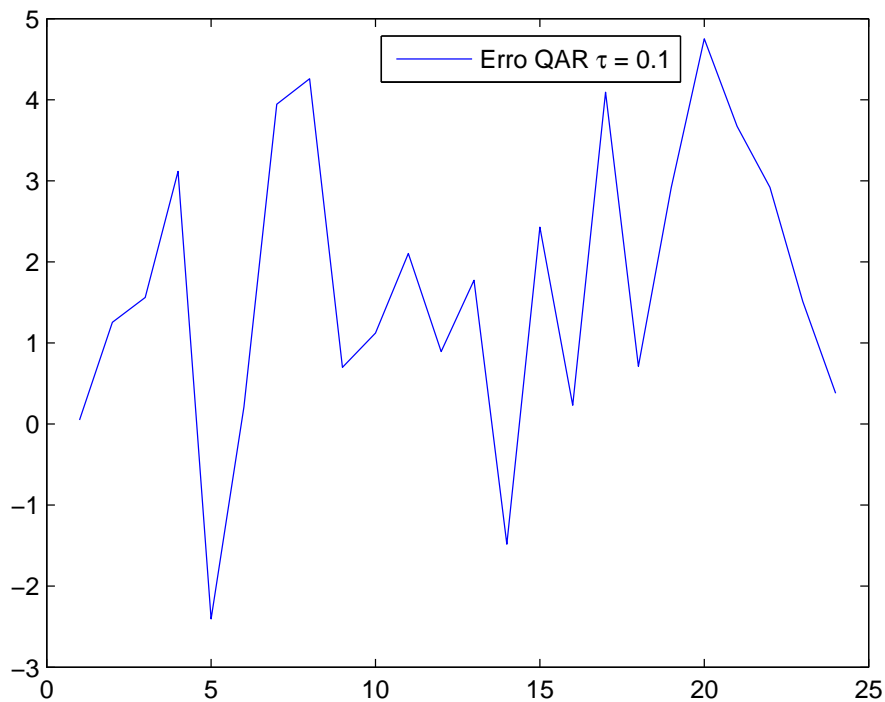


Para o modelo AR acima, o gráfico revela que, os resíduos são decorrelatados para todos os *lags* observados.

Modelo QAR, $\tau = 0.5$: $y_t = -2.62584 + 0.63483 \cdot y_{t-1} + 0.44944 \cdot y_{t-10}$.

A tabela abaixo é relativa a especificação do Modelo QAR para o $\tau = 0.5$.

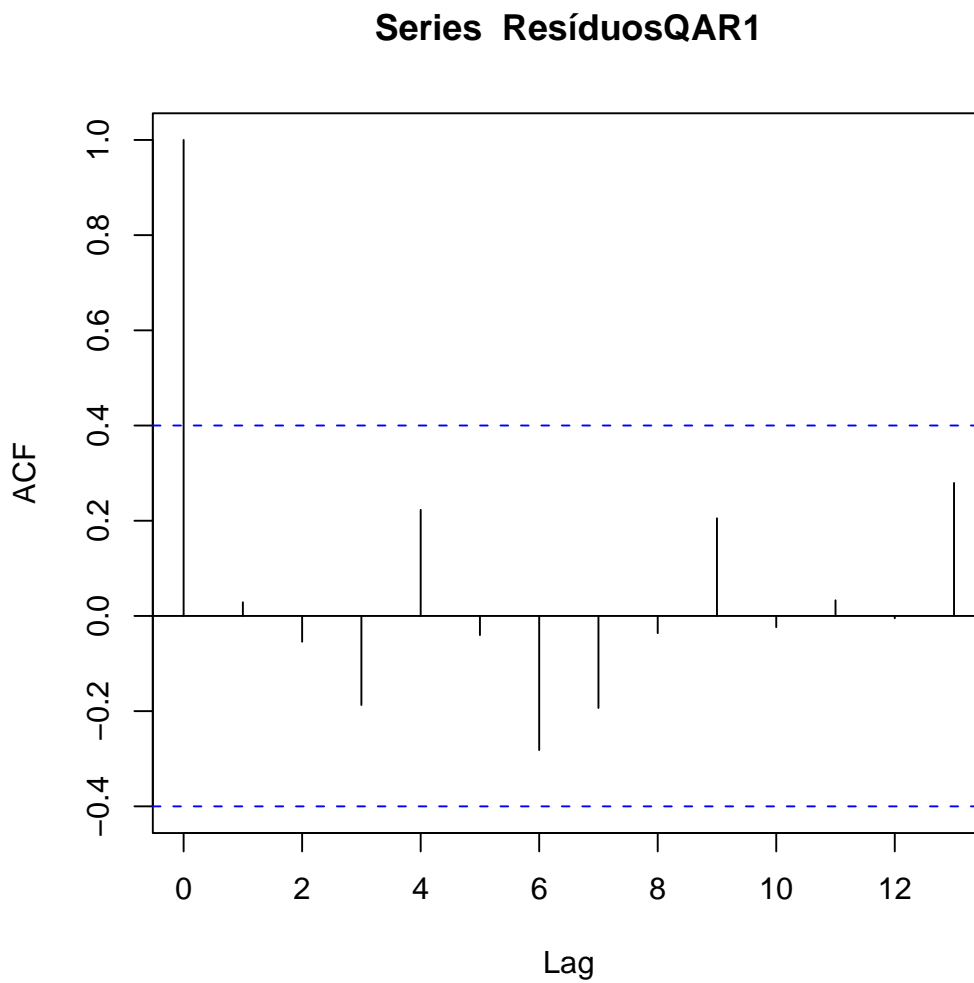
Coeficientes	Value	Std. Error	t Value	Pr(> t)
Intercept	-2.62584	4.11891	-0.63751	0.52536
y_{t-1}	0.63483	0.09329	6.80522	0.00000
y_{t-10}	0.44944	0.09509	4.72660	0.00001

Figura 4.29: Erro de previsão da Modelagem feita pelo QAR para $\tau = 0.1$.

Modelo QAR, $\tau = 0.9$: $y_t = 50.24939 - 0.386 \cdot y_{t-4} - 0.81355 \cdot y_{t-8} + 0.65574 \cdot y_{t-10}$.

A tabela abaixo é relativa a especificação do Modelo QAR para o $\tau = 0.9$.

Coeficientes	Value	Std. Error	t Value	Pr(> t)
Intercept	50.24939	11.61845	4.32497	0.00004
y_{t-4}	-0.38600	0.17471	-2.20937	0.02963
y_{t-8}	-0.81355	0.10522	-7.73200	0.00000
y_{t-10}	0.65574	0.17027	3.85126	0.00022

Figura 4.30: FAC do resíduo do Modelo QAR com $\tau = 0.1$.

Para o modelo QAR para o $\tau = 0.1$, o gráfico mostra que, os resíduos são decorrelatados para todos os *lags* observados.

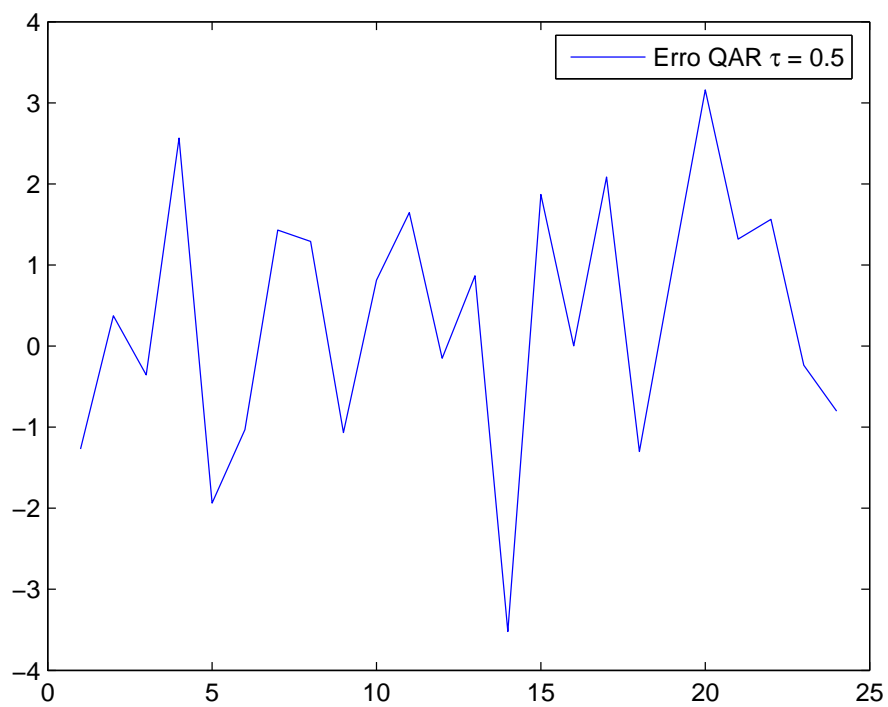
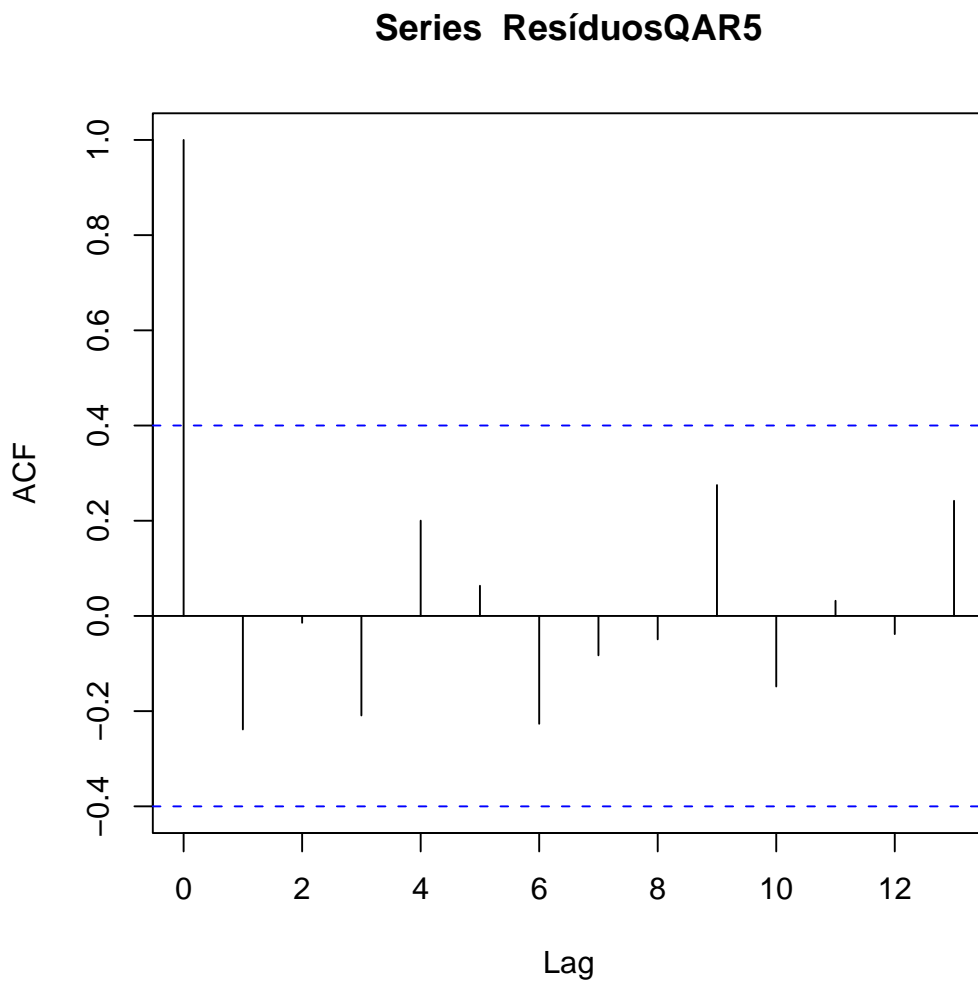
Figura 4.31: Erro de previsão da Modelagem feita pelo QAR para $\tau = 0.5$.

Figura 4.32: FAC do resíduo do Modelo QAR com $\tau = 0.5$.

Para o modelo acima, o gráfico expõe que, os resíduos são descorrelatados para todos os *lags* observados.

Figura 4.33: Erro de previsão da Modelagem feita pelo QAR para $\tau = 0.9$.

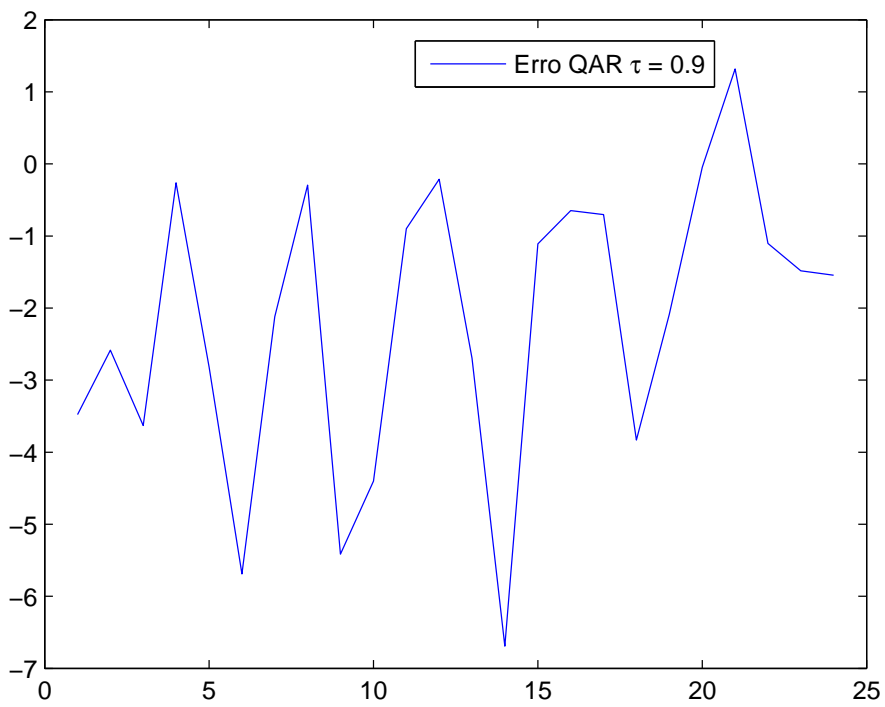
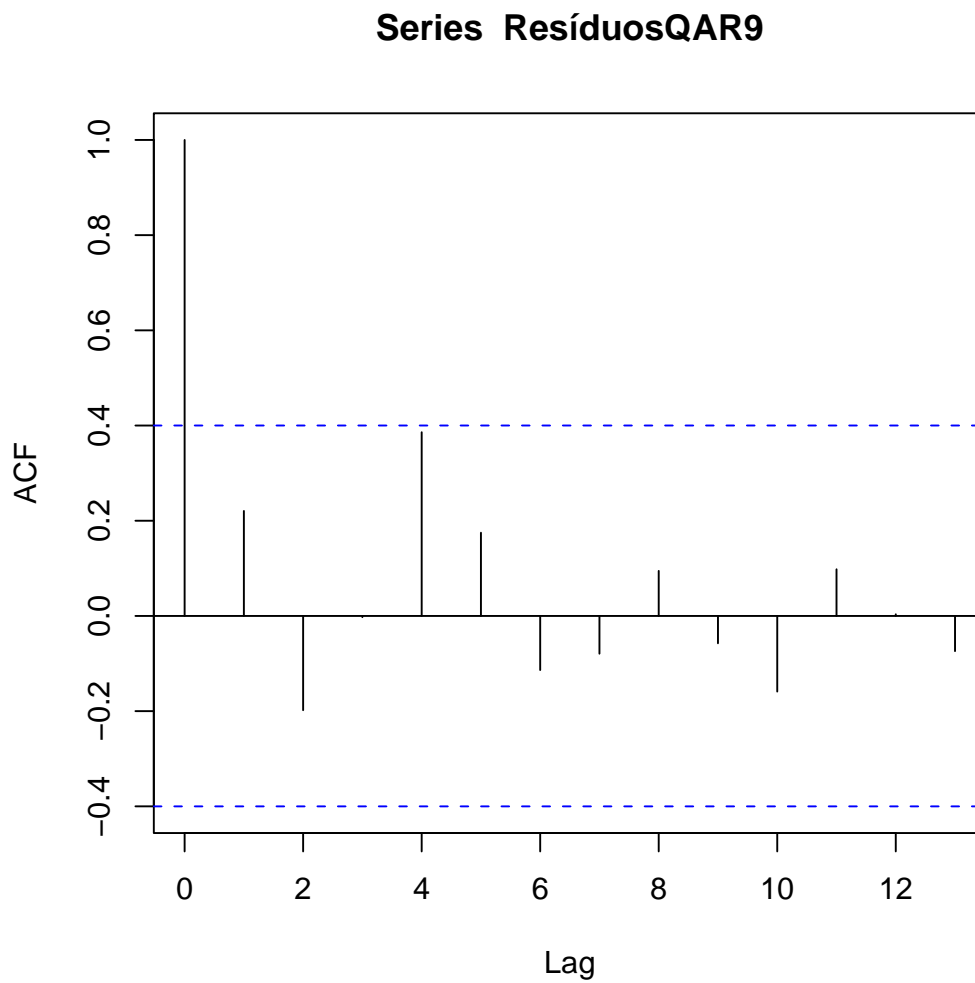
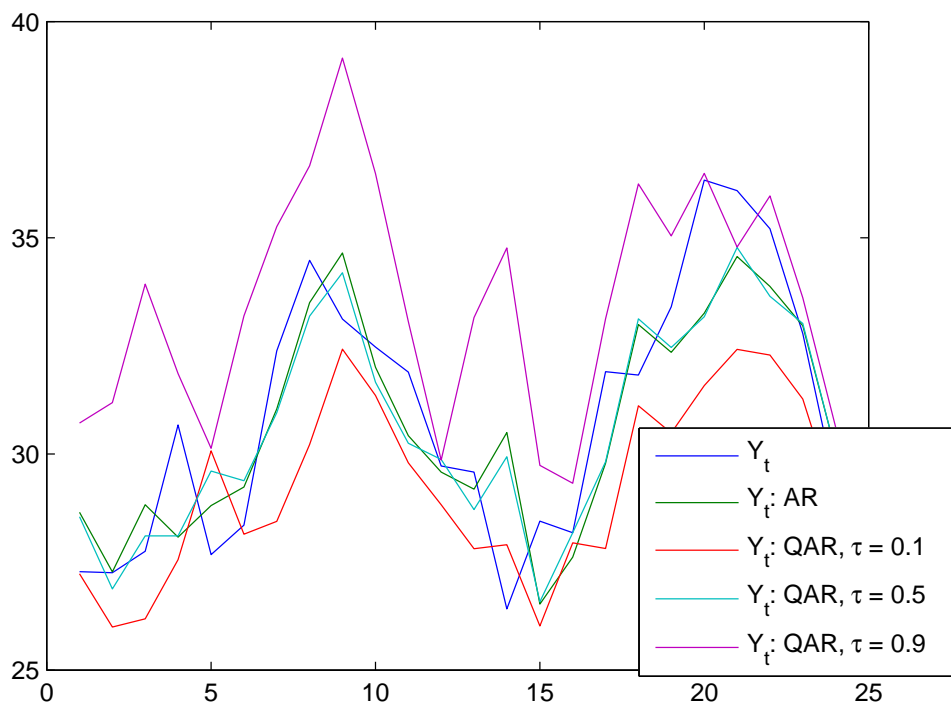


Figura 4.34: FAC do resíduos do Modelo QAR com $\tau = 0.9$.

No modelo acima, o gráfico exibe que, os resíduos são descorrelatados para todos os *lags* observados.

Figura 4.35: Comparação entre a série e os modelos estimados período 01/01/1999 até 31/12/2000.



No gráfico acima, observou-se que as previsões de Y_t para os modelos AR e QAR ($\tau = 0.5$) foram adequadas aos dados. Mas, os modelos QAR com ($\tau = 0.1$), tendem a estimar valores médios mais baixos de temperatura máxima. Nota-se, que o contrário é obtido no modelo QAR com ($\tau = 0.9$), onde estima-se valores mais altos de médias temperaturas.

Y_t	\widehat{Y}_tAR	ε_tAR	$\widehat{Y}_t(\tau = 0.1)$	$\varepsilon_t(\tau = 0.1)$	$\widehat{Y}_t(\tau = 0.5)$	$\varepsilon_t(\tau = 0.5)$	$\widehat{Y}_t(\tau = 0.9)$	$\varepsilon_t(\tau = 0.9)$
27.3	28.6	-1.37	27.2	0.051	28.5	-1.269	30.7	-3.434
27.3	27.3	-0.019	26.0	1.255	26.9	0.375	31.2	-3.933
27.7	28.8	-1.073	26.2	1.562	28.1	-0.356	33.9	-6.179
30.7	28.1	2.596	27.6	3.116	28.1	2.565	31.9	-1.184
27.7	28.8	-1.134	30.1	-2.403	29.6	-1.936	30.1	-2.462
28.4	29.2	-0.885	28.1	0.209	29.4	-1.02	33.2	-4.840
32.4	31.0	1.346	28.4	3.944	31.0	1.430	35.3	-2.871
34.5	33.5	0.981	30.2	4.259	33.2	1.291	36.7	-2.186
33.1	34.6	-1.525	32.4	0.699	34.2	-1.068	39.2	-6.035
32.5	32.0	0.468	31.3	1.122	31.7	0.813	36.5	-4.010
31.9	30.4	1.474	29.8	2.103	30.2	1.645	33.1	-1.168
29.7	29.6	0.138	28.8	0.893	29.9	-0.150	29.9	-0.140
29.6	29.2	0.393	27.8	1.773	28.7	0.866	33.2	-3.573
26.4	30.5	-4.081	27.9	-1.483	29.9	-3.522	34.8	-8.349
28.4	26.5	1.919	26.0	2.429	26.6	1.869	29.7	-1.289
28.2	27.6	0.565	27.9	0.232	28.2	0.003	29.3	-1.141
31.9	29.8	2.120	27.8	4.092	29.8	2.086	33.1	-1.220
31.8	33.0	-1.170	31.1	0.711	33.1	-1.300	36.2	-4.422
33.4	32.4	1.049	30.5	2.915	32.5	0.939	35.0	-1.639
36.3	33.3	3.078	31.6	4.751	33.2	3.160	36.5	-0.157
36.1	34.6	1.524	32.4	3.671	34.8	1.318	34.8	1.305
35.2	33.9	1.336	32.3	2.920	33.6	1.564	36.0	-0.758
32.8	33.0	-0.182	31.3	1.511	33.0	-0.237	33.6	-0.829
29.3	30.1	-0.814	28.9	0.379	30.1	-0.803	30.6	-1.369

Tabela 4.48: Comparação entre a série Y_t no período de 01/01/1999 até 31/12/2000 e as previsões dos Modelos.