

### 3 Auto-Regressão Quantílica

Os modelos lineares de séries temporais com coeficientes constantes descritos anteriormente são muito bem sucedidos na econometria. Os modelos auto-regressivos  $AR(p)$  (2-6) de séries temporais supõem que a dinâmica da série contém uma dependência linear às observações passadas até uma defasagem ( $p$ ) e um erro aleatório, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d).

Os modelos de séries temporais com coeficientes aleatórios viabilizam uma particular aplicação do modelo linear de auto-regressão quantílica. Estes modelos são uma generalização dos modelos  $AR(p)$  em que os coeficientes auto-regressivos variam com o quantil da distribuição condicional.

Os modelos de auto-regressão quantílica de ordem ( $p$ ) denominados de  $QAR(p)$  têm recebido uma atenção muito especial na literatura, podendo ser estimados através dos métodos de regressão quantílica propostos por Koenker e Bassett (21). A grande novidade do modelo de  $QAR(p)$  é não restringir os coeficientes auto-regressivos a serem independentes dos quantis e nem os erros a serem identicamente distribuídas (i.d.), cujos coeficientes da auto-regressão quantílica possam examinar quantis diferentes.

Os parâmetros da auto-regressão quantílica podem variar com os quantis ( $\tau$ ) dentro do intervalo  $[0, 1]$  da distribuição condicional, não sendo necessária, portanto, uma componente explícita de erro aleatório. Há uma literatura teórica substancial, incluindo Koenker (20), Weiss (32), Knight (18), Koul e Saleh (26), Koul e Mukherjee (25), Hercé (14), Hasan e Koenker (13), Jurécková e Hallin (17) que trata do modelo de  $QAR(p)$ .

Uma característica importante desta literatura é focalizar exclusivamente no caso de inovações independentes e identicamente distribuídas, em que as variáveis condicionais desempenham seu papel clássico de deslocar a posição da densidade condicional de  $y_t$ , mas sem nenhum efeito na escala condicional ou na forma.

A vantagem deste modelo é que, em vez de confiar exclusivamente em uma única medida de tendência central, eles permitem a análise de funções quantis condicionais, permitindo, assim, a análise de toda a distribuição

condicional da variável resposta. Por outro lado, há a desvantagem do maior custo computacional e de ter que efetuar programas para análise desses modelos. Sempre é bom considerar que nenhum modelo se adapta a todos os tipos de série temporal e o QAR não é uma exceção. Processos mais simples podem ser modelados de forma mais adequada pelos modelos AR.

### 3.1

#### O modelo de auto-regressão quantílica

Seja  $U_t$  uma seqüência de variáveis aleatórias uniformes padrão (i.i.d.), com média zero e variância  $\sigma^2 < \infty$ . Considere a ordem  $p$ , o processo

$$y_t = \theta_0(U_t) + \theta_1(U_t)y_{t-1} + \dots + \theta_p(U_t)y_{t-p} \quad (3-1)$$

é chamado de *modelo de auto-regressão quantílica*, denotado por  $QAR(p)$ . Neste modelo, os  $\theta_j$ 's são as funções desconhecidas a serem estimadas e definidas em  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $U_t$  é o quantil de  $y_t$  em sua distribuição condicional, desta forma, a  $\tau$ -ésima é denominada função quantil condicional de  $y_t$ , e pode ser escrita da seguinte forma

$$Q_{y_t}(\tau|y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) = \theta_0(\tau) + \theta_1(\tau)y_{t-1} + \dots + \theta_p(\tau)y_{t-p}, \quad (3-2)$$

ou, de maneira mais compacta, como

$$Q_{y_t}(\tau|y_{t-1}, \dots, y_{t-p}) = x_t^\top \theta(\tau), \quad (3-3)$$

onde  $x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})^\top$  e  $\theta(\tau) = (\theta_0(\tau), \theta_1(\tau), \dots, \theta_p(\tau))^\top$ .

A transformação de (3-1) para (3-2) é uma consequência imediata do fato de que, para toda função monótona crescente,  $g$  é uma variável aleatória uniforme padrão de  $U$ , dessa forma,  $Q_{g(U)}(\tau) = g(Q_U(\tau)) = g(\tau)$  onde  $Q_U(\tau) = \tau$  é a função quantílica de  $U$ . Tem-se, então, a  $\tau$ -ésima função quantil condicional de  $y_t$ , a qual é expressa como uma função linear dos valores passados de  $y_t$ . Os coeficientes auto-regressivos podem ser  $\tau$ -dependentes e podem variar com os quantis, diferentemente dos modelos  $AR(p)$  (2-6) em que os coeficientes  $\phi_t$  são assumidos independentes de  $\varepsilon_t$ . As variáveis condicionais deslocam não somente a posição da distribuição de  $y_t$ , mas também podem alterar a escala e a forma da distribuição condicional.

Considera-se o caso mais simples do modelo, o  $QAR(1)$ , em que só se emprega uma defasagem do modelo anterior,

$$Q_{y_t}(\tau|y_{t-1}) = \theta_0(\tau) + \theta_1(\tau)y_{t-1}, \quad (3-4)$$

onde  $\theta_0(\tau) = \sigma\Phi^{-1}(\tau)$  e  $\theta_1(\tau) = \min\{\gamma_0 + \gamma_1\tau, 1\}$  para  $\gamma_0 \in (0, 1)$  e  $\gamma_1 > 0$ .

Aqui  $\Phi^{-1}(\tau)$ , representa a função quantil da distribuição normal padrão, que acumula probabilidade  $\tau$ . Neste modelo, se  $U_t > \frac{(1-\gamma_0)}{\gamma_1}$ , então  $y_t$  é gerado de acordo com o modelo gaussiano padrão de raiz unitária; porém, para realizações menores de  $U_t$ , tem-se comportamento de reversão à média. Assim, o processo exibe uma forma de persistência assimétrica no sentido que seqüências de  $\theta_0(\tau)$  fortemente positivas tendem realçar o comportamento de raiz unitária, enquanto que realizações de  $U_t$  inferiores a  $\frac{(1-\gamma_0)}{\gamma_1}$  induzem reversão à média.

Pode-se escrever o modelo QAR(1) de uma forma mais convencional, obtendo-se a seguinte equação

$$y_t = \alpha_t y_{t-1} + u_t, \quad (3-5)$$

com  $\alpha_t = \theta_1(U_t)$  e  $u_t = \theta_0(U_t)$ . O modelo auto-regressivo  $AR(1)$  é obtido ajustando  $\theta_1(\tau)$  a uma constante.

### 3.2

#### TCL para o modelo QAR(p)

O processo de auto-regressão quantílica do modelo (3-1) pode ser transformado em uma notação de coeficiente aleatório mais convencional como

$$y_t = \mu_0 + \alpha_{1,t} y_{t-1} + \dots + \alpha_{p,t} y_{t-p} + u_t \quad (3-6)$$

onde  $\mu = E[\theta_0(U_t)]$ ,  $u_t = \theta_0(U_t) - \mu$ , e  $\alpha_{j,t} = \theta_j(U_t)$ , se  $j = 1, \dots, p$ .

Assim,  $\{u_t\}$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Seja  $F(\cdot)$  a função de distribuição de  $u_t$ , a qual corresponde uma densidade  $f_u(\cdot)$  contínua com suporte uniformemente limitado entre 0 e  $\infty$  e os coeficientes  $\alpha_{j,t}$  são funções desta variável aleatória da inovação  $u_t$ .

Descreve-se as seguintes condições para facilitar uma análise assintótica do modelo de  $QAR(p)$ .

**C.1:** A seqüência  $\{u_t\}$  são variáveis aleatórias (i.i.d.), com média zero e variância  $\sigma^2 < \infty$ .

**C.2:** A função de distribuição de  $u_t$ ,  $F(\cdot)$ , tem densidade contínua  $f_u(\cdot)$  com  $f(u) > 0$  com  $\mathcal{U} = \{u : 0 < F(u) < 1\}$ .

**C.3:** Denota-se a função de distribuição condicional  $Pr[y_t < \cdot | \mathcal{F}_{t-1}]$  onde  $F_{t-1}(\cdot)$  é a derivada de  $f_{t-1}(\cdot)$ ,  $f_{t-1}$  é uniformemente integrável em  $\mathcal{U}$ .

**Teorema 3.2.1** *Se  $y_t$  for determinado por  $y_t = \alpha_t y_{t-1} + u_t$  e  $\omega_\alpha^2 = E(\alpha_t)^2 < 1$  e sob a condição (C.1),  $y_t$  é estacionário de segunda ordem e satisfaz o teorema*

central do limite

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n y_t \xrightarrow{d} N(0, \omega_y^2),$$

onde

$$\omega_y^2 = \frac{1 + \mu_\alpha}{(1 - \mu_\alpha)(1 - \omega_\alpha^2)} \sigma^2,$$

com  $\mu_\alpha = E(\alpha_t) < 1$ .

### 3.3

#### Estimação de QAR(p)

O procedimento de estimação de parâmetros dos modelos de  $QAR(p)$  é embasado na técnica elaborada por Koenker e Bassett (21) em 1978. Baseados nessa estrutura, Koenker e Xiao (24) elaboraram todo o procedimento de estimação para o modelo de auto-regressão quantílica,  $QAR(p)$ . Pode-se estimar o modelo  $QAR(p)$  (3-3) resolvendo o seguinte problema:

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{t=1}^n \rho_\tau(y_t - x_t^\top \theta), \quad (3-7)$$

onde  $(\rho_\tau)$  é denominado função de perda e definido como:

$$\rho_\tau(u) = \begin{cases} \tau u, & \text{se } u \geq 0; \\ (\tau - 1)u, & \text{se } u < 0, \end{cases}$$

assim em Koenker e Bassett (21)(1978).

A solução para um dado  $\tau$  (*quantil*),  $\hat{\theta}(\tau)$ , foi denominado por Koenker e Xiao (24) de  $\tau$ -ésimo quantil da auto-regressão. Dado  $\hat{\theta}(\tau)$ , o  $\tau$ -ésimo quantil condicional de  $y_t$  é condicional às informações passadas  $x_t$ , e pode ser estimado por

$$\hat{Q}_{y_t}(\tau|x_t) = x_t^\top \hat{\theta}(\tau).$$

Para alguma seqüência apropriadamente escolhida de  $\tau$ 's, a densidade condicional de  $y_t$  pode ser estimada pelos diferentes quocientes, conforme a seguinte equação

$$\hat{f}_{y_t}(\tau|x_{t-1}) = \frac{(\tau_i - \tau_{i-1})}{(\hat{Q}_{y_t}(\tau_i|x_{t-1}) - \hat{Q}_{y_t}(\tau_{i-1}|x_{t-1}))}.$$

A média de  $y_t$  é  $E(y_t) = \mu_y$ , e a autocovariância  $E(y_t y_{t-j}) = \gamma_j$ . Seja  $\Omega_0 = E(x_t x_t^\top) = \lim \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t x_t^\top$ . Assim, tem-se

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} 1 & \mu_y \\ \mu_y & \Omega_y \end{bmatrix},$$

onde

$$\Omega_y = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

Para o modelo de ordem um, o QAR(1), há  $\Omega_0 = E(x_t x_t^\top) = \text{diag}[1, \gamma_0]$ , a média é  $E(y_t) = \mu$  e a variância é  $\gamma_0 = E[y_t^2]$ .

Seja  $\Omega_1 = \lim \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f_{t-1} [F_{t-1}^{-1}] x_t x_t^\top$  e defina  $\Sigma = \Omega_1^{-1} \Omega_0 \Omega_1^{-1}$  como sendo a distribuição assintótica de  $\hat{\theta}(\tau)$ .

**Teorema 3.3.1** *Sob as suposições das condições (C.1 – C.3), tem-se*

$$\sum^{-1/2} \sqrt{n} (\hat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)) \xrightarrow{d} B_k(\tau),$$

onde  $B_k(\tau)$  representa a  $k$ -dimensão do Movimento Browniano Padrão,  $k = p + 1$ .

Por definição, para algum  $\tau$  (*quantil*) fixado,  $B_k(\tau) \xrightarrow{d} N(0, \tau(1 - \tau)I_k)$ . Um caso especial importante com coeficientes constantes,  $\Omega_1 = f[F^{-1}(\tau)]\Omega_0$ , onde  $f(\cdot)$  e  $F(\cdot)$  são as densidades e funções de distribuição de  $u_t$ , respectivamente. As condições acima resultam no seguinte corolário:

**Corolário 3.3.1** *Sob as suposições das condições (C.1 – C.3), se os coeficientes  $\theta_j(U_t)$  do modelo de QAR( $p$ ) são constantes, então*

$$[f[F^{-1}(\tau)]^{-1} \Omega_0]^{1/2} \sqrt{n} (\hat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)) \xrightarrow{d} B_k(\tau).$$

Uma descrição mais detalhada das provas dos Teoremas e Corolários dos modelos de QAR( $p$ ) pode ser encontrada em Koenker (23) (2002) e (24) (2004).

## 3.4

### Inferência sobre o modelo QAR ( $p$ )

#### 3.4.1

#### O Teste de Hipóteses Location-Scale (Posição-Escala)

Seja a hipótese nula de que os parâmetros auto-regressivos são constantes, espera-se uma certa confiança de que os mesmos variem com os quantis para se usar um modelo mais sofisticado como o modelo QAR ( $p$ ). De outro modo, os modelos AR( $p$ ) são muito mais parcimoniosos e possuem ferramentas consolidadas de inferência estatística, sendo, portanto, mais adequados. Considerando esta hipótese nula, constroem-se testes assintóticos, como os do

tipo Wald. Os valores críticos dos testes são avaliados pela simulação de aproximações do Movimento Browniano. A auto-regressão quantílica oferece uma extensão natural destes princípios desde o caso geral da regressão linear. As covariáveis não necessitam ser binárias, ou mesmo discretas.

Após a estimação da auto-regressão quantílica, são considerados alguns testes de hipóteses, especialmente testes de posição *location-scale-shift* com hipóteses estabelecidas para modelos de ordem  $p$ .

Esses testes são adaptáveis, usando a escala da função quantil condicional, testando a hipótese de que as covariáveis particulares não exerçam nenhum efeito nos quantis selecionados. Esta habilidade de focalizar a atenção em quantis particulares é especialmente importante porque a inferência baseada em hipóteses globais arrisca-se a cancelar efeitos significativos (não detectá-los) se os mesmos têm direções contrárias em diferentes quantis.

O modelo  $QAR(p)$  possui uma característica muito distinta em que as variáveis condicionantes desempenham um papel de deslocar a posição da densidade condicional de  $y_t$ , mas não têm nenhum efeito na escala condicional ou na forma. Para o modelo linear *Location-Scale* é considerado a seguinte etapa: seja  $y_i = x_i^\top \alpha + (x_i^\top \gamma)u_i$ , onde  $u_i$  são supostamente (*i.i.d.*) de alguma distribuição  $F_0$ . Neste caso, a função quantil condicional da resposta é escrita como

$$Q_{y_i}(\tau|x_i) = x_i^\top \beta(\tau),$$

onde  $\beta(\tau) = \alpha + \gamma F_0^{-1}$ .

Desta forma, todos  $p$  componentes do vetor da função  $\beta$  são idênticos sob a hipótese de *Location-Scale*. Alternativamente, se preferível testar a hipótese mais restrita de um modelo puramente *Location-Shift*, então,  $x_i^\top \gamma = 1$ .

Este problema se relaciona com a clássica questão de testar o ajuste de um modelo a um conjunto de dados baseado na função de distribuição empírica, quando, sob a hipótese nula, alguns parâmetros são desconhecidos. Ao invés de testar os resultados das observações provenientes da distribuição normal padrão, poder-se-ia testar o resultado proveniente de uma distribuição normal com parâmetros média e variância mais gerais.

Ingenuamente, calcular-se-ia simplesmente o valor de  $\hat{\theta}_n = (\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$ , então, construir-se-ia um processo empírico paramétrico

$$U_n(y) = \sqrt{n}(F_n(y) - F_{\hat{\theta}_n}(y)),$$

onde  $F_{\hat{\theta}_n}(y) = \Phi\left(\frac{y - \hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n}\right)$ , e finalmente calcular-se-ia a estatística Kolmogorov-Smirnov

$$K_n = \sup \|U_n(y)\|.$$

Demonstra-se que a distribuição limite de  $U_n$  tende a um processo gaussiano, mas, a função de covariância depende da estimação do parâmetro de  $\theta$ . Conseqüentemente,  $K_n$  não tem a desejada distribuição Kolmogorov-Smirnov. Maiores detalhes, veja Koenker e Xiao (23).

Em 1981, Khmaladze propôs a primeira abordagem geral para o problema de determinar a distribuição assintótica da estatística do teste sob hipótese nula com parâmetros estimados. A extensão natural desta abordagem para os modelos de auto-regressão quantílica é bem explorada por Koenker e Xiao (24).

Considere o modelo de *Location-Scale* o processo

$$\sqrt{n}\varphi_0(\tau)\Omega^{-\frac{1}{2}}(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau)).$$

Este modelo converge em conjuntos compactos  $\mathcal{T} \subset (0, 1)$  para um Movimento Browniano Padrão  $p$ -dimensional, onde  $\varphi_0(\tau) = f_0(F_0^{-1}(\tau))$  e  $\Omega = H_0^{-1}J_0H_0^{-1}$  com  $J_0 = \lim n^{-1} \sum x_i x_i^\top$  e  $H_0 = \lim n^{-1} \sum \frac{x_i x_i^\top}{(\gamma^\top x_i)}$ .

Conseqüentemente, define-se a hipótese nula do teste de hipóteses por

$$H_0 : R\beta(\tau) = r(\tau),$$

baseando-se no seguinte processo:

$$\nu_n(\tau) = \sqrt{n}\varphi_0(\tau)(R\Omega R^\top)^{-\frac{1}{2}}(R\hat{\beta}(\tau) - r(\tau)),$$

desde que  $R$  e  $r$  sejam completamente especificados.

O processo  $\hat{\nu}_n(\tau) = \sqrt{n}\varphi_0(\tau)(R\Omega R^\top)^{-\frac{1}{2}}(R\hat{\beta}(\tau) - r(\tau))$ , é estimado baseado na estatística do teste de *Kolmogorov-Smirnov* do tipo  $K_n = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \|\hat{\nu}_n(\tau)\|$ . Os valores críticos desta estatística são simulados facilmente. O índice  $\mathcal{T}$  é ajustado e escolhido tipicamente para ser um intervalo da forma  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ , porém, escolhe-se para focalizar a atenção em uma cauda ou em alguma outra característica da distribuição. Em algumas situações, é desejável restringir o intervalo para o subintervalo  $[\tau_0, \tau_1]$  de  $(0, 1)$ , o que é facilmente acomodado, considerando renormalização da estatística do teste para

$$K_n = \frac{\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \|\hat{\nu}_n(\tau) - \hat{\nu}_n(\tau_0)\|}{\sqrt{\tau_1 - \tau_0}}.$$

Na tabela a seguir, os valores críticos foram calculados para as taxas nominais de 1%, 5% e 10% do teste estatístico  $K_n = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \|\hat{\nu}_n(\tau)\|$  baseados na simulação das aproximações do Movimento Browniano, com amostras de tamanho  $n = 2000$  e  $n = 20000$  com intervalo simétrico de  $\mathcal{T} = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ . Neste

estudo, utilizou-se  $\varepsilon = 0.05$ , obtendo  $\mathcal{T} = [0.05, 0.95]$ . Para outros valores de  $\varepsilon$ , veja Koenker (20).

$p$	1 %	5 %	10 %
<b>1</b>	<b>2.721</b>	<b>2.140</b>	<b>1.872</b>
2	4.119	3.393	3.011
3	5.350	4.523	4.091
4	6.548	5.560	5.104
5	7.644	6.642	6.089
6	8.736	7.624	7.047
7	9.876	8.578	7.950
8	10.79	9.552	8.890
9	11.81	10.53	9.820
10	12.91	11.46	10.72

Tabela 3.1: Valores críticos assintóticos de  $K_n$ .

Os valores em negrito da tabela acima foram utilizados como valores críticos do teste de hipóteses deste trabalho. Maiores detalhes sobre a teoria assintótica e inferência do processo de auto-regressão quantílica, veja Koenker (20), Johnston (15).