



Fabiano dos Santos Souza

**Análise Empírica dos Modelos de
Auto-Regressão Quantílica**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Carlos Tomei
Co-Orientador: Prof. Leonardo Rocha Souza

Rio de Janeiro
Março de 2007



Fabiano dos Santos Souza

**Análise Empírica dos Modelos de
Auto-Regressão Quantílica**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Tomei

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Leonardo Rocha Souza

Co-Orientador

Department of Economic and Social Affairs – United Nations

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Fernanda Chaves Pereira

IAPUC – PUC-Rio

Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 06 de Março de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Fabiano dos Santos Souza

Concluiu a Especialização em Matemática para Professores do Ensino Médio e Fundamental pela Universidade Federal Fluminense em Junho de 2004. Trabalhou como Professor Substituto do Departamento de Estatística da UFF de março de 2003 até março de 2005, trabalhou também como Professor Substituto do Departamento de Matemática da UERJ-FFP de Julho de 2003 até Julho de 2004. Atualmente é Professor Especialista do Departamento de Matemática da Uniabeu - Centro Universitário, leciona também no Ensino Médio do Colégio São José, Colégio Argumento e no Ensino Fundamental do Colégio MV1 - Icaraí.

Ficha Catalográfica

Souza, Fabiano dos Santos

Análise Empírica dos Modelos de Auto-Regressão Quantílica / Fabiano dos Santos Souza; orientador: Carlos Tomei; co-orientador: Leonardo Rocha Souza. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 119 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. Auto-Regressão Quantílica, Processos Estocásticos, Séries Temporais, $AR(p)$, $ARCH(p)$, $GARCH(p, q)$, Simulação de Monte Carlo. I. Tomei, Carlos. II. Souza, Leonardo Rocha. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Aos meus pais Luiz Carlos de Souza, Eliana dos Santos Souza e filha Juliana de Barros Souza.

Agradecimentos

A Deus, por ter me iluminado todos esses anos e ter me dado muita força e fé nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador Professor Carlos Tomei e ao meu Co-Orientador Professor Leonardo Rocha Souza, pelo apoio, orientação, seriedade, simpatia, amizade para a realização deste trabalho.

À PUC-Rio/CAPES, pelos auxílios concedidos, sem os quais seria impossível estudar e realizar este trabalho.

À Juliana Souza cujo amor, carinho e atenção que abdiquei para realização desse trabalho.

Aos meus pais, Luiz Carlos de Souza e Eliana Souza, e meu irmão Rodrigo Souza e família, pelo apoio e dedicação ao longo desses anos.

Ao meu tio amigo Edson Noronha, por sempre ter sido um grande referencial em todos esses anos.

Aos meus amigos especiais da PUC-Rio, Aldo Ferreira da Silva, Bernardo Kulnig Pagnoncelli, Carla Jardim Dias, Regina Kazumi Fukuda, Renato Alencar Adelino da Costa, que me fizeram admirar e adorar esse lugar.

À Elícia Soares minha esposa, por ter me encorajado e acreditado na execução final deste trabalho, com o seu apoio, amor e carinho.

Aos Professores e grandes amigos: Luiz Fernando Athayde, Fábio Pacheco, Carlos Orelana, Paulo Trales, Paulo Jorge, pela amizade, incentivo ao longo dessa jornada.

Às secretárias e aos auxiliares administrativos do Departamento de Matemática da PUC-Rio pela prestatividade de sempre. A secretária da Pós Creuza, por ser o nosso anjo querido e amigo.

Resumo

Souza, Fabiano dos Santos; Tomei, Carlos; Souza, Leonardo Rocha. **Análise Empírica dos Modelos de Auto-Regressão Quantílica**. Rio de Janeiro, 2007. 119p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Modelos auto-regressivos ($AR(p)$) de séries temporais supõem que a dinâmica da série contém uma dependência linear às observações passadas até uma defasagem p , e um erro aleatório independente e identicamente distribuído (i.i.d). Modelos de auto-regressão quantílica ($QAR(p)$) são uma generalização dos $AR(p)$ em que os coeficientes auto-regressivos variam com o quantil da distribuição condicional, não sendo necessária, portanto, uma componente explícita de erro aleatório. Esta dissertação estuda a inferência estatística proposta para modelos $QAR(p)$ por Koenker e Xiao (2004), com o auxílio de simulações de Monte Carlo. Enquanto a estimação mostra-se bem precisa, os resultados do teste de hipóteses, onde a hipótese nula supõe um modelo auto-regressivo (AR), não apresentam bons resultados, variando estes com o modelo gerador de dados.

Palavras-chave

Auto-Regressão Quantílica, Processos Estocásticos, Séries Temporais, $AR(p)$, ARCH (p), GARCH (p, q), Simulação de Monte Carlo.

Abstract

Souza, Fabiano dos Santos; Tomei, Carlos; Souza, Leonardo Rocha.
Empirical Analysis of the Quantile Autoregression Models.
Rio de Janeiro, 2007. 119p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Autoregressive models (AR(p)) for time series assume that the series dynamics has a linear dependence on past observations up to a lag p , plus an independent and identically distributed (i.i.d.) random error. Quantile autoregressive models (QAR(p)) generalize the AR(p) by allowing different autoregressive coefficients for different quantiles of the conditional distribution and so there is no need for an explicit random error component. This dissertation studies the statistical inference proposed by Koenker e Xiao (2004) for QAR(p) models, by means of Monte Carlo simulations. While the estimation tools show themselves very accurate, the hypothesis test which considers an AR model as the null hypothesis yields poor results, and these vary with the data generating process.

Keywords

Quantile Autoregression, Stochastic Process, Time Series, Autoregressive (AR), Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH), Simulation of Monte Carlo.

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Motivação	12
1.2	Objetivos	13
1.3	Estrutura do trabalho	13
2	Séries Temporais e Modelos Auto-Regressivos	15
2.1	Definições básicas	15
2.2	Os Modelos Auto-Regressivos	19
2.3	Regressão Quantílica	27
3	Auto-Regressão Quantílica	29
3.1	O modelo de auto-regressão quantílica	30
3.2	TCL para o modelo QAR(p)	31
3.3	Estimação de QAR(p)	32
3.4	Inferência sobre o modelo QAR (p)	33
4	Testes e Simulação de QAR	37
4.1	Simulação de Monte Carlo	37
4.2	Métodos	38
4.3	Resultados	40
4.4	Aplicação do Modelo QAR	94
5	Conclusão e trabalhos futuros	106
	Referências Bibliográficas	108
A	Programas realizados para simulação de Monte Carlo	111
B	Resultado do teste de hipótese (Location-Scale)	116

Lista de figuras

4.1	Exemplo do Modelo 3 para $N = 100$.	45
4.2	Exemplo do Modelo 3 para $N = 300$.	46
4.3	Exemplo do Modelo 3 para $N = 500$.	47
4.4	Exemplo do Modelo 3 para $N = 1000$.	48
4.5	Exemplo do Modelo 6 para $N = 100$.	56
4.6	Exemplo do Modelo 6 para $N = 300$.	57
4.7	Exemplo do Modelo 6 para $N = 500$.	58
4.8	Exemplo do Modelo 6 para $N = 1000$.	59
4.9	Exemplo do Modelo 9 para $N = 100$.	63
4.10	Exemplo do Modelo 9 para $N = 300$.	64
4.11	Exemplo do Modelo 9 para $N = 500$.	65
4.12	Exemplo do Modelo 9 para $N = 1000$.	66
4.13	Resultado teste de hipótese do Modelo 1.	81
4.14	Resultado teste de hipótese do Modelo 2.	82
4.15	Resultado teste de hipótese do Modelo 3.	83
4.16	Resultado teste de hipótese do Modelo 4.	84
4.17	Resultado teste de hipótese do Modelo 5.	85
4.18	Resultado teste de hipótese do Modelo 6.	86
4.19	Resultado teste de hipótese do Modelo 7.	87
4.20	Resultado teste de hipótese do Modelo 8.	88
4.21	Resultado teste de hipótese do Modelo 9.	89
4.22	Resultado teste de hipótese do Modelo 10.	90
4.23	Resultado teste de hipótese do Modelo 11.	91
4.24	Resultado teste de hipótese do Modelo 12.	92
4.25	Resultado teste de hipótese do Modelo 13.	93
4.26	Série de média mensal de temperatura máxima da Cidade do Rio de Janeiro período (01/01/1990 a 31/12/2000).	94
4.27	Erro de previsão da Modelagem feita pelo AR.	96
4.28	FAC do resíduos do Modelo AR.	97
4.29	Erro de previsão da Modelagem feita pelo QAR para $\tau = 0.1$.	98
4.30	FAC do resíduos do Modelo QAR com $\tau = 0.1$.	99
4.31	Erro de previsão da Modelagem feita pelo QAR para $\tau = 0.5$.	100
4.32	FAC do resíduos do Modelo QAR com $\tau = 0.5$.	101
4.33	Erro de previsão da Modelagem feita pelo QAR para $\tau = 0.9$.	102
4.34	FAC do resíduos do Modelo QAR com $\tau = 0.9$.	103
4.35	Comparação entre a série e os modelos estimados período 01/01/1999 até 31/12/2000.	104

Lista de tabelas

3.1	Valores críticos assintóticos de K_n .	36
4.1	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 100$.	41
4.2	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 300$.	41
4.3	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 500$.	41
4.4	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.1 para $N = 1000$.	41
4.5	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 100$.	42
4.6	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 300$.	42
4.7	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 500$.	42
4.8	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.2 para $N = 1000$.	42
4.9	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 100$.	43
4.10	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 300$.	43
4.11	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 500$.	43
4.12	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.3 para $N = 1000$.	43
4.13	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 100$.	49
4.14	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 300$.	49
4.15	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 500$.	49
4.16	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.4 para $N = 1000$.	49
4.17	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 1.	50
4.18	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 2.	51
4.19	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 3.	52
4.20	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 4.	53
4.21	Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 5.	54
4.22	Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 6.	55
4.23	Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 7.	60
4.24	Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 8.	61
4.25	Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 9.	67
4.26	Média das estimativas de Monte Carlo do Modelo 10.	68
4.27	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 5.	69
4.28	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 6.	69
4.29	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 7.	70
4.30	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 8.	71
4.31	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 9.	72
4.32	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 10.	73
4.33	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.11 para $N = 100$.	74
4.34	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.11 para $N = 300$.	74
4.35	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.11 para $N = 500$.	74
4.36	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.11 para $N = 1000$.	74
4.37	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.12 para $N = 100$.	75
4.38	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.12 para $N = 300$.	75
4.39	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.12 para $N = 500$.	75
4.40	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.12 para $N = 1000$.	75
4.41	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.13 para $N = 100$.	76
4.42	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.13 para $N = 300$.	76
4.43	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.13 para $N = 500$.	76

4.44	Média das estimativas de Monte Carlo, mod.13 para $N = 1000$.	77
4.45	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 11.	77
4.46	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 12.	78
4.47	Variância das estimativas de Monte Carlo do Modelo 13.	79
4.48	Comparação entre a série Y_t no período de 01/01/1999 até 31/12/2000 e as previsões dos Modelos.	105
B.1	Resultado teste de hipótese do Modelo 1.	116
B.2	Resultado teste de hipótese do Modelo 2.	116
B.3	Resultado teste de hipótese do Modelo 3.	116
B.4	Resultado teste de hipótese do Modelo 4.	117
B.5	Resultado teste de hipótese do Modelo 5.	117
B.6	Resultado teste de hipótese do Modelo 6.	117
B.7	Resultado teste de hipótese do Modelo 7.	117
B.8	Resultado teste de hipótese do Modelo 8.	118
B.9	Resultado teste de hipótese do Modelo 9.	118
B.10	Resultado teste de hipótese do Modelo 10.	118
B.11	Resultado teste de hipótese do Modelo 11.	118
B.12	Resultado teste de hipótese do Modelo 12.	119
B.13	Resultado teste de hipótese do Modelo 13.	119