

7. Referências bibliográficas

- [1] BRASSARD, G. **Brief History of Quantum Cryptography: A Personal Perspective.** quant-ph/0604072 (2006).
- [2] SHOR, P. W. **Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring.** Proc. 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Shafi Goldwasser, Ed.), IEEE Computer Society Press, 124-134 (1994).
- [3] FUJIWARA, M.; SASAKI, M. **Photon Number Resolving Detector at Telecommunication Wavelength.** AIP Conference Proceedings on Quantum Communication, Measurement and Computing, vol. 734, 40-43 (2004).
- [4] BOUWMEESTER, D.; EKERT, A.; ZEILINGER, A. (Eds.) **The Physics of Quantum Information: quantum cryptography, quantum teleportation, quantum computation.** Springer, 2000.
- [5] KRAUS, B.; TITTEL, W.; GISIN, N.; NILSSON, M.; KROLL, S.; CIRAC, J. I. **Quantum memory for non-stationary light fields based on controlled reversible inhomogeneous broadening.** Ph. Rev. A 73, 020302 (2006).
- [6] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. **Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?** Physical Review Letters, 47, 777-780 (1935).
- [7] BELL, J. S. **Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics.** Cambridge: Cambridge University Press (1987).
- [8] NIELSEN, M. A. ; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information.** Cambridge : Cambridge University Press (2000).
- [9] MÉROLLA, J-M. ; MAZURENKO, Y. ; GOEDGEBUER, J. P.; RHODES, W. T. **Single-Photon Interference in Sidebands of Phase-Modulated Light for Quantum Cryptography.** Phys. Rev. Lett. 82, 1656-1659.
- [10] STUCKI, D.; BRUNNER, N.; GISIN, N.; SCARANI, V.; ZBINDEN, H. **Fast and simple one-way quantum key distribution.** quant-ph/0506097.

- [11] ALMEIDA, M. P.; WALBORN, S. P.; SOUTO RIBEIRO, P. H. **Experimental investigation of quantum key distribution with position and momentum of photon pairs.** quant-ph/0411183
- [12] TEMPORÃO, G. **Um Polarímetro de Baixo Custo.** Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio (2003).
- [13] HUARD, S. **La Polarization de la Lumière.** Paris: Masson (1994).
- [14] BENNETT, C. H. **Quantum Cryptography using any two nonorthogonal states.** Phys. Rev. Lett. 68, 3121–3124 (1992).
- [15] BRENDDEL, J.; GISIN, N.; TITTEL, W.; ZBINDEN, H. **Pulsed energy-time entangled twin-photon source for quantum communication.** Phys. Rev. Lett. 82, 2594–2597 (1999).
- [16] GISIN, N.; RIBORDY, G.; TITTEL, W.; ZBINDEN, H. **Quantum Cryptography.** Rev. Mod. Phys. 74, 145-195 (2002).
- [17] HONG, C. K.; MANDEL, L. **Experimental Realization of a Localized One-Photon State.** Phys. Rev. Lett. 56, 58–60 (1986).
- [18] HORNBERGER, K. **Introduction to Decoherence Theory.** quant-ph/0612118 (2006).
- [19] SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. **Fundamentals of Photonics.** New York: Wiley-Interscience (1991).
- [20] www.idquantique.com
- [21] COVA, S.; LONGONI, A.; RIPAMONTI, G. **Active-Quenching and Gating Circuits for Single-Photon Avalanche Diodes.** IEEE Transactions on Nuclear Science, vol. NS-29 (1982).
- [22] MILLER, A. J.; NAM, S. W.; MARTINIS, J. M.; SERGIENKO, A. V. **Demonstration of a low-noise near-infrared photon counter with multiphoton discrimination.** Appl. Phys. Lett., 83, 791-793 (2003).
- [23] BENNETT, C. H.; BRASSARD, G. Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing. 175-179 (1984).
- [24] BENNETT, C. H.; BESSETTE, F.; BRASSARD, G.; SALVAIL, L.; SMOLIN, J. **Experimental quantum cryptography.** J. Cryptology 5, 3–28 (1992).
- [25] KRAUS, B.; GISIN, N.; RENNER, R. **Lower and upper bounds on the secret key rate for QKD protocols using one-way classical communication.** Phys. Rev. Lett. 95, 080501 (2005).

- [26] SCARANI, V.; ACÍN, A.; RIBORDY, G.; GISIN, N. **Quantum cryptography protocols robust against photon number splitting attacks for weak laser pulses implementations.** Phys. Rev. Lett. 92, 057901 (2004).
- [27] HWANG, W. Y. **Quantum Key Distribution with High Loss: Toward Global Secure Communication.** Phys. Rev. Lett. 91, 057901 (2003).
- [28] BALANIS, C. A. **Advanced Engineering Electromagnetics.** New York: John Wiley and Sons (1989).
- [29] BURNS, G.; GLAZER, A. M. **Space Groups for Solid State Scientists.** Academic Press, 2a ed. (1990).
- [30] BOYD, R. W. **Nonlinear Optics.** New York: Academic Press, 2a ed. (2003).
- [31] MIDWINTER, J. E.; WARNER, J. **The effects of phase matching method and of uniaxial crystal symmetry on the polar distribution of second-order non-linear optical polarization.** Br. J. Appl. Phys. 16 1135-1142 (1965).
- [32] GUENTHER, B. D. **Modern Optics.** New York: John Wiley and Sons (1990).
- [33] ARMSTRONG, A.; BLOEMBERGEN, N.; DUCUING, J.; PERSHAN, P. S. **Interactions between light waves in a nonlinear dielectric.** Phys. Rev. 127, 1918 (1962).
- [34] YARIV, A.; YEH, P. **Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation.** New York: Wiley-Interscience (2002).
- [35] BORN, M.; WOLF, E. **Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light.** Cambridge: Cambridge University Press (1999).
- [36] RISK, W. P.; GOSNELL, T.; NURMIKKO, A. V. **Compact Blue-Green Lasers.** Cambridge: Cambridge University Press (2003).
- [37] BOYD, G. D.; KLEINMAN, D. A. **Parametric Interaction of focused Gaussian beams.** J. Appl. Phys. 39, 3597-3639 (1968).
- [38] GUHA, S.; FALK, J. **The effects of focusing in the three-frequency parametric upconverter.** J. Appl. Phys. 51, 50-60 (1980).
- [39] MANDEL, L.; WOLF, E. **Optical Coherence and Quantum Optics.** Cambridge: Cambridge University Press (1995).

- [40] VEDRAL, V. **Modern Foundations of Quantum Optics**. Londres: Imperial College Press (2006).
- [41] THEW, R.; TANZILLI, S.; KRAINER, L.; ZELLER, S. C.; ROCHAS, A.; RECH, I.; COVA, S.; ZBINDEN, H.; GISIN, N. **Low jitter up-conversion detectors for telecom wavelength GHz QKD**. *New J. Phys.* 8, 32 (2006).
- [42] PAN, H.; ZENG, H. **Efficient and stable single-photon counting at 1.55 μm by intracavity frequency upconversion**. *Opt. Lett.* 31, 6, 793-795 (2006).
- [43] PAN, H.; DONG, H.; ZENG, H.; LU, W. **Efficient single-photon counting at 1.55 μm by intracavity frequency upconversion in a unidirectional ring laser**. *Appl. Phys. Lett.* 89, 191118 (2006).
- [44] HUGHES, R.; NORDHOLT, J.; DERKACS, D. PETERSON, C. G. **Practical free-space quantum key distribution over 10 km in daylight and at night**. *New J. Phys.* 4, 43.1–43.14 (2002)
- [45] RESCH, K.; LINDENTHAL, M.; BLAUENSTEINER, B.; BOHM, H.; FEDRIZZI, A.; KURTSIEFER, C.; POPPE, A.; SCHMIRRMANDERBACH, T.; TARABA, M.; URSIN, R.; WALTHER, P.; WEIER, H.; WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A.; NIELSEN, M. A.; KEMPE, J. **Distributing entanglement and single photons through an intra-city, free-space quantum channel**. *Opt. Express* 13, pp. 202-209 (2005).
- [46] WEIERL, H.; SCHMITT-MANDERBACH, T.; REGNER, N. KURTSIEFER, C.; WEINFURTER, H. **Free space quantum key distribution: Towards a real life application**. *Fortschr. Phys.* 54, No. 8 – 10, 840 – 845 (2006)
- [47] ARNULF, A.; BRICARD, J.; CURÉ, E.; VÉRET, C. **Transmission by haze and fog in the spectral region 0.35 to 10 microns**. *J. Opt. Soc. Am.* 47, 491-498 (1957).
- [48] MANOR, H.; ARNON, S. **Performance of an optical wireless communication system as a function of wavelength**. *Appl. Optics* 42, 4285-4294 (2003).
- [49] COLVERO, C. P.; CORDEIRO, M. C. R.; DE FARIA, G. V.; VON DER WEID, J. P. **Experimental Comparison Between Far and Near Infrared Wavelengths in FSO Systems**. *Microwave and Opt. Tech. Lett.* 46, 319-323 (2005).

- [50] MILLER, A.; BECK, M.; FAIST, J.; OESTERLE, U.; ILLEGEMS, M. Appl. Phys. Lett. 75, pp. 1509-1511 (1999).
- [51] COLVERO, C. P. Comunicação pessoal.
- [52] GURZADIAN, G. G.; NIKOGOSKILAN, D. N.; DMITRIEV, V. G. **Handbook of Nonlinear Optical Crystals**. Springer-Verlag (2006).
- [53] CANARELLI, P.; BENKO, Z.; HIELSCHER, A. H.; CURL, R. F.; TITTEL, F. K. **Measurement of Nonlinear Coefficient and Phase Matching Characteristics of AgGaS₂**. IEEE J. Quant. Elect., 28, 52-55 (1992).
- [54] TEMPORÃO, G.; TANZILLI, S.; ZBINDEN, H.; GISIN, N.; AELLEN, T.; GIOVANNINI, M.; FAIST, J. **Mid-Infrared Single Photon Counting**. Opt. Lett. 31, 1094-1096 (2006).
- [55] VANDEVENDER, A. P.; KWIAT, P. G. **High-efficiency single photon detection via frequency up-conversion**. Proc. SPIE, **5105**, 216-224 (2003).
- [56] BLASER, S.; HOFSTETTER, D.; BECK, M.; FAIST, J. **Free-space optical data link using Peltier-cooled quantum cascade laser**. Electronics Lett. 37, pp. 778-780 (2001)
- [57] ASPELMEYER, M.; BOHM, H. R.; GYATSO, T.; JENNEWAIN, T.; KALTENBAEK, R.; LINDENTHAL, M.; MOLINA-TERRIZA, G.; POPPE, A.; RESCH, K.; TARABA, M.; URSIN, R.; WALTHER, P.; ZEILINGER, A. **Long-Distance Free-Space Distribution of Quantum Entanglement**. Science, 301, 621-623 (2003).
- [58] KUBRUSLY, C. **Elements of Operator Theory**. Boston: Birkhauser (2001).
- [59] ZBINDEN, H. **Optique**. Université de Genève (2006).

Apêndice A

O que é um Espaço de Hilbert?

Um espaço de Hilbert é uma estrutura matemática riquíssima, cuja origem está diretamente ligada aos primeiros esforços de se estabelecer um fundamento matemático à física quântica, em grande parte pelo matemático John von Neumann na década de 30.

Este apêndice está voltado aos alunos dos cursos de engenharia elétrica (ou qualquer outra engenharia) interessados no assunto, já que, de acordo com o currículo em vigor no Brasil, esse assunto não é sequer citado em sala de aula.

Antes de fornecer uma definição formal, vamos brevemente mostrar como se constrói um espaço de Hilbert partindo de estruturas mais básicas, de forma a facilitar nossa compreensão e nos permitir enxergar com mais facilidade toda a riqueza dessa estrutura⁹⁸.

A.1. Espaços Lineares

Vamos começar com uma estrutura familiar a todos que estudam álgebra linear, o chamado *espaço linear* ou *espaço vetorial*. Um espaço linear é um *conjunto* onde duas operações, chamadas de “soma” e “multiplicação por escalar” são definidas. Assim, além do que podemos normalmente fazer com conjuntos – fazer interseções, definir funções, etc – um espaço linear nos permite *somar* dois elementos do conjunto, ou *multiplicar* um elemento por um número (“escalar”) proveniente de um *corpo* subjacente. Se o corpo for o conjunto dos números reais, o espaço linear é chamado de *espaço linear real*, e analogamente definimos um *espaço linear complexo*.

Por exemplo, o conjunto de todas as funções definidas de um conjunto S aos números complexos \mathbf{C} onde adição e multiplicação por escalar são definidos

⁹⁸ A discussão segue a apresentação do curso de pós-graduação ministrado pelo prof. Carlos Kubrusly na PUC-Rio. Maiores detalhes podem ser encontrados em seu excelente “livro verde” [58].

ponto a ponto, ou seja, $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ e $(\alpha x)(t) = \alpha(x(t))$, é um espaço linear (complexo). Espaços lineares nos fornecem os conceitos de *subespaços lineares*, *dependência linear*, *base* e *transformações lineares*, entre outros.

A.2. Espaços Métricos

Nesse momento, vamos momentaneamente deixar os espaços lineares de lado e voltarmos nossa atenção a outro tipo de espaço: os *espaços topológicos*. Espaços topológicos introduzem a noção de *vizinhança* entre dois pontos de um conjunto, isto é, fornecem uma noção de *distância*. Talvez isso seja melhor compreendido para os chamados *espaços métricos*, uma classe de espaços topológicos onde é definida uma função distância, chamada de *métrica*, que nada mais é que uma função não-negativa $d : X \times X \rightarrow R$ que satisfaça algumas propriedades altamente intuitivas (positividade, simetria e desigualdade triangular). Espaços métricos (e topológicos em geral) nos fornecem os importantíssimos conceitos de *convergência* e *continuidade*, e a partir deles, o conceito de *espaços completos*.

O que é um espaço completo? Em termos extremamente coloquiais, é um espaço no qual toda seqüência que “quer” convergir, converge. Chamamos essas seqüências de *seqüências de Cauchy*, e podemos defini-las da seguinte forma para espaços métricos:

Definição A.1. *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma seqüência tomando valores em X , denominada $\{x_n\}$, é uma Seqüência de Cauchy em (X, d) se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo $n(\varepsilon)$ tal que $n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Ou seja, um espaço é completo se toda seqüência de Cauchy definida nesse espaço converge. Pense, por exemplo, nos números racionais (definindo uma métrica natural $d(x, y) = |x - y|$): é fácil encontrar exemplos que mostram que ele é um espaço *incompleto*. Essa noção de completitude é importante para a compreensão dos espaços de Hilbert.

A.3. Espaços Normados

Dado que podemos adicionar estruturas algébricas e topológicas a um conjunto subjacente X , a pergunta que surge é: o que acontece se fizermos as duas coisas ao mesmo tempo, isto é, inserirmos em um mesmo conjunto X os dois tipos de estrutura?

Essa pergunta tem duas respostas: “muita coisa” ou “nada”. Se as estruturas algébrica e topológica forem incompatíveis – isto é, se elas “não se enxergarem” – não haverá nada além do que foi estudado para espaços lineares e espaços topológicos separadamente. Porém, se conseguirmos fazer a álgebra e a topologia trabalharem juntas, ganhamos uma nova estrutura chamada de *espaço normado*.

Um espaço normado surge quando a métrica “reconhece” as operações de soma vetorial e multiplicação por escalar. Isso pode ser feito através da definição de uma *norma* em um espaço linear X , que pode ser definida da seguinte forma:

Definição A.2. *Seja X um espaço linear sobre o corpo \mathbb{F} . Uma função $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma em X se as seguintes condições forem satisfeitas para todos os vetores x e y em X e todos os escalares α em \mathbb{F} :*

$$(i) \quad \|x\| > 0 \quad \text{se} \quad x \neq 0;$$

$$(ii) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Observe que a norma nos fornece a noção de “tamanho” de um vetor. Para fazermos com que a métrica consiga ser compatível com a norma, basta definirmos $d(x, y) = \|x - y\|$. Dizemos que essa é a *métrica gerada pela norma*. Espaços normados nos permitem estudar conceitos de somas infinitas e séries convergentes, e nos introduz à idéia de *transformações lineares contínuas*. Se o espaço normado for completo (com relação à métrica gerada pela norma), é chamado de *espaço de Banach*.

A.4. Espaços produto interno

Após misturarmos álgebra com topologia, obtemos uma estrutura que nos permite fazer combinações lineares de vetores e dizer o quão próximo um vetor é do outro. A única coisa que ainda está faltando é a noção de *ângulo* – ou seja, uma estrutura geométrica. Essa estrutura pode ser fornecida se equiparmos um espaço normado com uma operação chamada *produto interno*, que nos dá o conceito de *ortogonalidade*.

Definição A.3. *Seja X um espaço linear sobre o corpo \mathbb{F} (\mathbb{C} ou \mathbb{R}). Uma função $\langle \cdot; \cdot \rangle: X \rightarrow \mathbb{F}$ é um produto interno em X se as seguintes condições forem satisfeitas para todos os vetores x e y em X e todos os escalares α em \mathbb{F} :*

- (i) $\langle x + y; z \rangle = \langle x; z \rangle + \langle y; z \rangle$;
- (ii) $\langle \alpha x; y \rangle = \alpha \langle x; y \rangle$;
- (iii) $\langle x; y \rangle = \overline{\langle y; x \rangle}$;
- (iv) $\langle x; x \rangle \geq 0$.

No axioma (iii), \bar{x} é o complexo conjugado de x . O interessante é que, quando a norma é obtida do produto interno da forma $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$, o espaço produto interno herda todas as propriedades do espaço normado e ganha o conceito extra de *ortogonalidade*: x e y são ortogonais quando $\langle x; y \rangle = 0$.

Nesse momento já podemos definir formalmente o que é um espaço de Hilbert! Eis a definição:

Definição A.4. *Um espaço produto interno \mathcal{H} é um espaço de Hilbert se ele for completo com relação à métrica gerada pela norma induzida pelo produto interno.*

Ou seja, um espaço de Hilbert é um espaço produto interno que é completo como um espaço métrico com respeito à métrica gerada pela norma induzida pelo

produto interno, isto é, pela métrica $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y; x - y \rangle}$. Ainda em outras palavras, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach cuja norma satisfaz a regra do paralelogramo.

A.5. Notação de Dirac

A notação usada pelos físicos para representar vetores em espaços de Hilbert *difere* da utilizada até então. De forma a tornar as operações de produto interno mais “intuitivas”, Dirac introduziu a notação em *kets* e *bras*, representados respectivamente por:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow |x\rangle \\ \langle y; \cdot \rangle &\rightarrow \langle y| \end{aligned} \tag{A.1}$$

Assim, o produto interno entre os *kets* $|x\rangle$ e $|y\rangle$ é representado pela união do *bra* $\langle y|$ com o *ket* $|x\rangle$, e escrevemos $\langle y|x\rangle$ – um “bracket”! Observe que o *bra* pertence ao espaço dual \mathcal{H}^* , que é o espaço dos funcionais lineares de \mathcal{H}^{op} .

Observe ainda que, na notação de Dirac, o produto interno é linear no *segundo* argumento, e não no primeiro como na notação “matemática”. Isto é, de acordo com a definição 4:

$$\langle x|y\rangle \equiv \langle y; x \rangle \tag{A.2}$$

Estando essa notação clara, podemos prosseguir na discussão sobre qubits.

⁹⁹ Ver o Teorema da Representação de Riesz em [58].

Apêndice B

Feixes Gaussianos

Um *feixe gaussiano* é uma das possíveis soluções à equação de Helmholtz paraxial, $\nabla_T^2 A - j2k \partial A / \partial z = 0$, onde a onda paraxial é definida como uma espécie de onda plana “modulada” por uma amplitude $A(z)$ que satisfaz a aproximação “slowly-varying envelope” $\partial A / \partial z \ll kA$.

Podemos escrever o campo elétrico $E(r, z, t) = A(r) \exp(j\omega t - jkz)$ de um feixe gaussiano da seguinte forma:

$$E(r, z, t) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{\omega^2(z)}\right] \cos[\omega t - kz + \Psi(r, z) + \Phi(z)] \quad (\text{B.1})$$

Observe que o campo expresso por (B.1) possui simetria radial com relação ao eixo z , ao qual a distância é medida por $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. A uma distância $r = \omega(z)$ do eixo, a amplitude do campo elétrico cai a um valor $1/e$ com relação ao seu valor no eixo z ; chamamos essa distância de *raio* do feixe na posição z . Esse valor é mínimo quando $z = 0$, e é designado $\omega(0) \equiv \omega_0$, a “cintura de feixe”.

O raio $\omega(z)$ se relaciona à cintura de feixe da forma:

$$\omega(z) = \omega_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi n \omega_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{B.2})$$

onde n é o índice de refração do meio. Observe da definição (B.2) que, conforme z aumenta, o raio também aumenta.

Enquanto em uma onda plana a fase é constante em qualquer plano perpendicular à direção de propagação, um feixe gaussiano possui frentes de onda curvadas. Essa curvatura é descrita pelo termo:

$$\Psi(r, z) = \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (\text{B.3})$$

onde

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (\text{B.4})$$

Na expressão acima, z_0 é a posição na qual a curvatura das frentes de onda é máxima. Ela é chamada de *distância de Rayleigh*, e é dada por:

$$z_0 = \frac{\pi n \omega_0^2}{\lambda} \quad (\text{B.5})$$

Nessa posição, o valor do raio $\omega(z)$ é tal que $\omega(z_0) = \sqrt{2}\omega_0$. Às vezes, como, por exemplo, na análise de Boyd-Kleinman, utiliza-se um termo equivalente chamado *parâmetro confocal*, definido como $b = 2z_0$. Note, da expressão (B.4), que quando $z = 0$ o raio de curvatura é zero, e que quando z tende a infinito, o raio de curvatura volta a ser zero. Portanto, é nessas posições que o feixe gaussiano mais se assemelha a uma onda plana.

Podemos agora reescrever (B.2) da forma:

$$\omega(z) = \omega_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{B.6})$$

Observe que, se o termo entre parênteses for muito maior que 1, o raio começa a aumentar linearmente com a distância, de forma que podemos definir um *ângulo* de divergência dado por:

$$\theta_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\omega(z)}{z} = \frac{\omega_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \quad (\text{B.7})$$

De forma análoga ao parâmetro confocal, alguns autores preferem utilizar o ângulo $\Theta = 2\theta$. A figura B.1 ilustra alguns dos termos definidos.

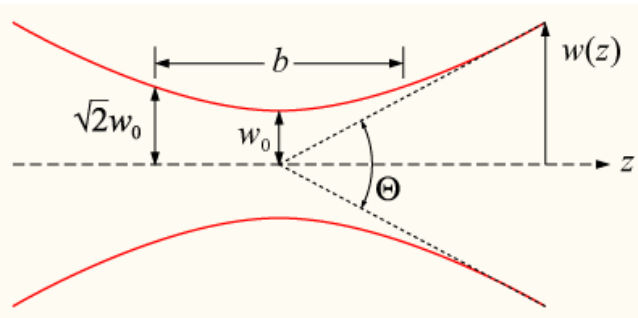


Figura B.1. Feixe Gaussiano.

Muitas vezes, estamos interessados não no campo elétrico mas na *intensidade* do feixe gaussiano. Usando a relação $I = \frac{1}{2\eta}|E|^2$, obtemos:

$$I(r, z) = I_0 \left[\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right]^2 \exp \left[-\frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right] \quad (\text{B.8})$$

O valor máximo da intensidade ocorre em $(z, r) = (0, 0)$; esse valor decai gradualmente conforme z aumenta, atingindo metade de seu valor em $z = z_0$, e também decai se nos movermos para longe do eixo z . Também é possível escrever (B.8) em termos da potência total do feixe, usando a relação:

$$I_0 = \frac{2P}{\pi\omega_0^2} \quad (\text{B.9})$$

No capítulo 4, na seção 4.1.2, utilizamos componentes ópticos para alterarmos a forma dos feixes gaussianos. A figura B.2 ilustra uma situação na qual uma lente convergente é utilizada. É possível mostrar que as seguintes relações são satisfeitas [59]:

$$X' = \frac{f^2 X}{X^2 + z_0^2} \quad (\text{B.10})$$

$$z_0' = z_0 \frac{X'}{X} \quad (\text{B.11})$$

Usando essas duas expressões, concluímos, portanto, que a cintura de feixe após a focalização é dada por:

$$\omega_0' = \omega_0 \left[\frac{f^2}{X^2 + z_0^2} \right]^{1/2} \quad (\text{B.12})$$

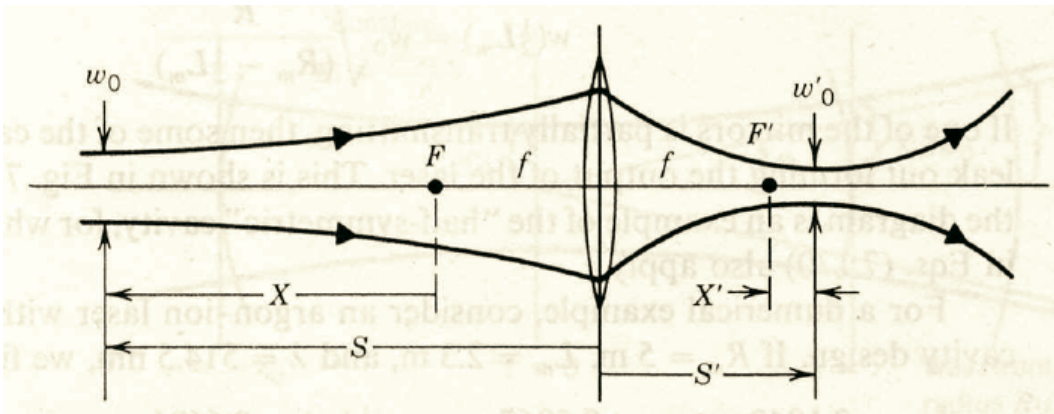


Figura B.2. Focalização de um feixe gaussiano.

Uma importante observação a respeito de feixes gaussianos é que, se o comprimento de onda do feixe for conhecido, basta que apenas um parâmetro do feixe seja conhecido para que todos os outros possam ser derivados a partir dele. Em geral, utiliza-se ω_0 ou z_0 para tal.