

5

Nós Legendreanos em T^3

5.1

Elemento de Contato

Definição 5.1.1 Um elemento de contato do ponto $(x, y) \in T^2$ é uma reta no plano tangente $T_{(x,y)}T^2$ passando por (x, y) .

Definição 5.1.2 A co-orientação de um elemento de contato é uma escolha de um dos semi-planos de $T_{(x,y)}T^2$ dividido pelo elemento de contato.

Podemos caracterizar essa escolha por um vetor unitário normal ao elemento de contato. Por outro lado podemos representar os elementos de $T^2 \times S^1$ por vetores unitários aplicados em um ponto de T^2 . Assim o espaço de todos os elementos de contato co-orientados pode ser identificado com $T^2 \times S^1$, o qual é difeomorfo a T^3 .

Consideremos a 1-forma

$$\alpha_n = \cos(2\pi n z) dx + \sin(2\pi n z) dy, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

em T^2 com coordenadas (x, y) . O núcleo de α_n é uma reta em $T_{(x,y)}T^2$. A equação de tal reta é

$$\cos(2\pi n z) dx + \sin(2\pi n z) dy = 0. \tag{5-1}$$

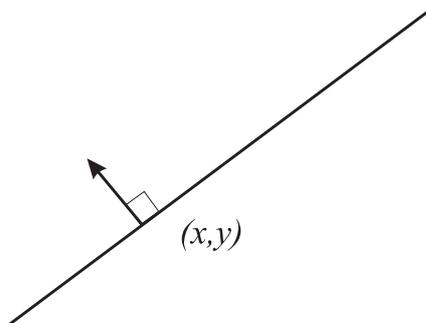


Figura 5.1: Elemento de contato co-orientado.

Observemos que o espaço de todos os elementos de contato co-orientados é dado pela equação (5-1) e cada elemento de contato tem co-orientação $(\cos(2\pi n z), \text{sen}(2\pi n z))$ para algum $z \in S^1$.

Agora não mais olhando z como parâmetro mas como coordenada temos que

$$\alpha_n = \cos(2\pi n z) dx + \text{sen}(2\pi n z) dy$$

é uma 1-forma em $T^2 \times S^1$ com coordenadas (x, y, z) . Aliás α_n é uma forma de contato em T^3 como vimos no exemplo 3.2.4.

Vamos considerar $T^3 = T^2 \times S^1$ com coordenadas (x, y, z) e a forma de contato $\alpha_1 = \cos(2\pi z) dx + \text{sen}(2\pi z) dy$ em T^3 .

Lembre-se que cada plano de contato desse campo de planos contém o vetor na direção z , mais geral que isso: o campo $\ker \alpha_1$ é gerado pelo vetor $\frac{\partial}{\partial z}$ e o elemento de contato em (x, y) ortogonal a $(\cos(2\pi z), \text{sen}(2\pi z))$. Assim $\kappa : S^1 \rightarrow T^2 \times S^1$ definida por $\kappa(t) = (x_0, y_0, z(t))$ é um nó legendreano, pois

$$\dot{\kappa}(t) = (0, 0, \dot{z}(t)) = \dot{z}(t) \frac{\partial}{\partial z},$$

logo $\alpha_1(\dot{\kappa}(t)) = 0$.

Agora vejamos como a partir de uma projeção que seja uma imersão, obtemos um levantamento que seja um nó legendreano. Seja $\kappa_P : S^1 \rightarrow T^2$ uma imersão genérica, ou seja, κ_P é uma imersão cuja imagem possui apenas pontos duplos transversais. Suponhamos que κ_P é parametrizada por $\kappa_P(t) = (x(t), y(t))$. Nosso objetivo é encontrar uma aplicação $z : S^1 \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que satisfaça a equação:

$$\dot{x}(t) \cos(2\pi z(t)) + \dot{y}(t) \text{sen}(2\pi z(t)) = 0 \tag{5-2}$$

de modo que $\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t))$ seja um nó legendreano. Podemos obter unicamente $z(t)$ (módulo 1) resolvendo a equação (5-2) com a condição que os vetores $\dot{\kappa}_P = (\dot{x}, \dot{y})$ e $v = (\cos(2\pi z), \text{sen}(2\pi z))$ estão orientados de $\dot{\kappa}_P$ para v . Assim obtemos um levantamento $\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde κ é um mergulho, pois κ_P é uma imersão genérica, e portanto κ é um nó legendreano.

Note que em geral se κ é um nó legendreano em T^3 sua projeção κ_P não é uma imersão, pois o nó κ pode ter algum vetor tangente na direção z .

Proposição 5.1.3 *A projeção de um nó legendreano genérico κ tem apenas pontos duplos transversais e pontos cúspides como suas singularidades.*

Prova. Seja $\kappa = (x(t), y(t), z(t))$ um nó legendreano em T^3 .

Por uma pequena perturbação legendreana podemos assumir que $A = \{t \in S^1; \dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0\}$ é finito. Para $t \notin A$ a projeção $\kappa_P = (x(t), y(t))$ é

uma imersão. Por outra perturbação legendreana pequena podemos fazer com que todos os pontos duplos sejam transversais e também eliminar os pontos tríplexes. Assim podemos assumir que κ_P tem apenas pontos cúspides e pontos duplos transversais.

Próximo de um ponto de κ_P onde $\dot{x} = \dot{y} = 0$, temos que o vetor normal $(\cos(2\pi z), \sin(2\pi z))$ percorre suavemente este ponto, pois κ é legendreano. Num primeiro caso, se as orientações de T^2 dadas por $(\cos(2\pi z), \sin(2\pi z))$ e $\dot{\kappa}_P$ antes e depois desse ponto singular são os mesmos, podemos perturbar κ_P para eliminar esse ponto singular, usando uma deformação arbitrariamente pequena.

Assumiremos que as orientações de T^2 dadas por $\dot{\kappa}_P$ e $(\cos 2\pi z, \sin 2\pi z)$ antes e depois do ponto singular são diferentes. Um modelo típico dessa situação é a seguinte singularidade:

$$(x(t), y(t)) = (t^3, -t^2), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

com $\epsilon > 0$ pequeno.

A singularidade é em $t = 0$. Resolvendo a equação:

$$\dot{x} \cos(2\pi z) + \dot{y} \sin(2\pi z) = 0$$

temos que $z(t) = \frac{1}{2\pi} \arctan(\frac{3t}{2})$. Esta é uma função suave. Não é difícil ver que sempre podemos modificar κ_P próximo de um ponto singular por uma isotopia legendreana suave e perturbá-la de forma que se tenha esta forma canônica. \square

Pelo teorema 4.2.5 temos a seguinte:

Proposição 5.1.4 *Todo nó em T^3 é isotópico a um nó legendreano.*

5.2

Números de Thurston-Bennequin e Maslov de nós em T^3

Consideremos agora a identificação $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

Definição 5.2.1 *Um nó K em T^3 é chamado de **nó quase linear** se existe um nó γ em T^3 tal que K é isotópico a γ e o levantamento $\tilde{\gamma}$ ao recobrimento universal $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow T^3$ seja uma reta racional.*

Note que a identificação $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ induz uma identificação $H_1(T^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$. Dessa maneira uma orientação de um nó quase linear representa uma classe de homologia que corresponde a um vetor $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3$, onde as coordenadas v_1, v_2, v_3 são primos entre si. Tal vetor chama-se **vetor primitivo**.

Definição 5.2.2 O vetor (v_1, v_2, v_3) que corresponde à classe de homologia de um nó quase linear K chama-se **direção**.

Definição 5.2.3 Seja $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3$ um vetor primitivo. Definimos um **nó tipo direcionado** $\mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)$ como o conjunto de todos os nós quase lineares em T^3 com direção (v_1, v_2, v_3) .

Denotaremos o conjunto de todos os nós quase lineares $K \in \mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)$, com K legendreano em (T^3, ξ_n) (vide ex. 3.2.4) por $\mathcal{L}_n(v_1, v_2, v_3)$.

Definição 5.2.4 Um 2-toro T mergulhado em M^3 por $f : T \rightarrow M^3$ é dito **incompressível** se o homeomorfismo induzido do grupo fundamental $f_* : \pi_1(T, x_0) \rightarrow \pi_1(M^3, f(x_0))$ é injetor.

Observe que dado um nó legendreano K quase linear em T^3 , existe um toro incompressível que contém K . De fato, como K é quase linear existe um nó \tilde{K} linear que é isotópico a K . Podemos fazer uma mudança de base usando uma matriz $A_{3 \times 3}$ com entradas inteiras cujo determinate é igual a 1 de modo que a matriz A leve o nó \tilde{K} num nó vertical, e é evidente que um nó vertical está contido num 2-toro linear, portanto incompressível.

Lema 5.2.5 Seja K um nó legendreano em T^3 quase linear. Dados dois toros incompressíveis T_1 e T_2 que contêm K , se X_i é campo de vetores não singular ao longo de K ortogonal a \dot{K} e tangente a T_i , então no plano ortogonal a \dot{K} o número de giros de X_1 com respeito a X_2 é zero.

Prova. Seja K um nó legendreano quase linear em T^3 . Existe uma projeção linear $T^3 \rightarrow T^2$ tal que a direção de K será a fibra da projeção. Sendo K isotópico à sua direção podemos mudar a projeção por uma isotopia a uma projeção de fibrado $\pi : T^3 \rightarrow T^2$ que tem K como fibra. Provemos que dado um toro incompressível T contendo K o referencial em K induzido por T é homotópico ao referencial induzido por π .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times S^1 & \longrightarrow & T^3 \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\Psi} & T^2 \end{array}$$

Sejam $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ o recobrimento universal e $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o pull-back de π . O toro T levanta a um análogo \mathcal{T} com bordo $\partial\mathcal{T} = \tilde{K}_0 - \tilde{K}_1$, onde \tilde{K}_0 e \tilde{K}_1 são componentes conexas da pré imagem de K . A diferença entre o referencial induzido por T e a projeção do referencial é o número de pontos

de interseção (contando-se com sinal) entre \mathcal{T} e uma fibra \tilde{K}' de $\tilde{\pi}$ próxima à \tilde{K}_0 . Mas toda fibra é homóloga à fibra disjunta de \mathcal{T} , logo a diferença entre os dois referenciais é zero. \square

Definição 5.2.6 *Sejam K um nó quase linear legendreano na variedade de contato (T^3, ξ_n) e T um toro incompressível contendo K . O **número de Thurston-Bennequin**, $\beta(K)$, é definido como o número de giros do referencial de K induzido por ξ_n com respeito ao referencial induzido pelo toro T .*

Definição 5.2.7 *Seja $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3$ um vetor primitivo. O **número máximo de Bennequin** do nó tipo direcionado $\mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)$ relativo a ξ_n é definido por:*

$$\bar{\beta}(\mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)) = \max\{\beta(K); K \in \mathcal{L}_n(v_1, v_2, v_3)\}.$$

Proposição 5.2.8 (Ver (Kan)) *Seja $\mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)$ um nó tipo direcionado com (v_1, v_2, v_3) primitivo e considere a estrutura de contato ξ_n em T^3 . Então*

$$\bar{\beta}(\mathcal{L}_n(v_1, v_2, v_3)) = |nv_3|.$$

Definição 5.2.9 *Sejam X uma seção de ξ_n que não se anula e K um nó legendreano orientado na variedade de contato (T^3, ξ_n) . Definimos o número de Maslov de K com relação a X em ξ_n , denotado por $\mu_X(K)$, como o número de giros de \dot{K} em ξ_n com respeito a X ao longo de K .*

Vamos calcular o número de Maslov de K , nó legendreano em (T^3, ξ_1) com respeito a seção

$$X = \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} + \sin \theta \left(\sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

na sua projeção em T^2 . Suponhamos que κ é uma parametrização genérica do nó K tal que sua projeção κ_P em T^2 tem apenas pontos duplos transversais e singularidades cúspides. Num ponto cúspide em κ_P temos que

$$\dot{\kappa} = \pm \frac{\partial}{\partial z},$$

onde o sinal de $\frac{\partial}{\partial z}$ é positivo (negativo) se o ângulo z é crescente (decrecente) quando se move ao longo de κ em uma dada direção. Esses casos correspondem aos pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ respectivamente.

Vamos avaliar os casos quando κ_P passa por um ponto cúspide.

Caso 1: Se o ângulo z é crescente e o sinal de $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de $-$ para $+$, então $\dot{\kappa}$ movimenta-se até $\theta = 0$. Assim esse ponto cúspide contribui uma unidade positiva para o número de Maslov.

Caso 2: Se o ângulo z é crescente e o sinal de $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de $+$ para $-$, então $\dot{\kappa}$ movimenta-se até $\theta = \pi$. Assim esse ponto cúspide contribui uma unidade negativa para o número de Maslov.

Caso 3: Se o ângulo z é decrescente e o sinal de $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de $-$ para $+$, então $\dot{\kappa}$ movimenta-se até $\theta = \pi$. Assim esse ponto cúspide contribui uma unidade negativa para o número de Maslov.

Caso 4: Se o ângulo z é decrescente e o sinal de $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de $+$ para $-$, então $\dot{\kappa}$ movimenta-se até $\theta = 0$. Logo esse ponto cúspide contribui uma unidade positiva para o número de Maslov.

Definição 5.2.10 *Um ponto é dito cúspide positiva se quando passa-se por este ponto ao longo de κ numa direção dada tem-se:*

1. z é crescente e $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de sinal de $-$ para $+$; ou
2. z é decrescente e $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de sinal de $+$ para $-$.

Caso contrário chama-se cúspide negativa.

Denotando-se o número de cúspides positivas por μ_+ e o número de cúspides negativas por μ_- temos a seguinte:

Proposição 5.2.11 *Se K é um nó legendreano em (T^3, ξ_1) , então*

$$\mu_X(K) = \frac{1}{2}(\mu_+ - \mu_-).$$

Definição 5.2.12 *Sejam K e K' nós legendreanos em (T^3, ξ_n) isotópicos por isotopia legendreana e $\Sigma \subset T^3$ uma superfície compacta orientada mergulhada com $\partial\Sigma = K - K'$. Definimos o número relativo de Maslov de K com respeito a K' como a obstrução à estender \dot{K} e \dot{K}' para uma trivialização de $\xi_n|_\Sigma$. Denotaremos o número relativo de Maslov de K com respeito a K' por $\mu(K, K')$.*

Proposição 5.2.13 *Sejam K e K' nós legendreanos quase lineares em (T^3, ξ_n) isotópicos suavemente por isotopia legendreana. Se K e K' atingem o número máximo de Thurston-Bennequin para o nó tipo deles, então $\mu(K, K') = 0$.*

Prova. Seja $\Sigma \subset T^3$ uma superfície convexa mergulhada com bordo K e K' . Observemos que a equação $\mu(K, K') = 0$ é válida se Σ é um cilindro. De fato, Γ_Σ não contém arco que divide paralelamente ao bordo, pois $\beta(K) = \beta(K')$ é máximo no nó tipo de K e K' . Daí

$$\mu_\Sigma = \chi(\Sigma_+) - \chi(\Sigma_-) = 0.$$

Se Σ não é um cilindro, considere um recobrimento finito $\Upsilon : T^3 \rightarrow T^3$ que é trivial quando restrito à K e K' , e escolha um levantamento $\hat{\Sigma}$ de Σ . Seja $\hat{\xi}$ o pull-back esticado da estrutura de contato, e $\partial\hat{\Sigma} = \hat{K} \cup \hat{K}'$. Se o recobrimento $\Upsilon : T^3 \rightarrow T^3$ tem um número suficientemente grande de folhas, podemos assumir que existe um β máximo de um nó legendreano linear \hat{K}_0 tal que \hat{K} e \hat{K}_0 são ligados por um cilindro C e \hat{K}' e \hat{K}_0 são ligados por um cilindro C' . Então

$$\mu_{\hat{\Sigma}}(\hat{K}, \hat{K}') + \mu_{C'}(\hat{K}', \hat{K}_0) + \mu_C(\hat{K}_0, \hat{K}) = \langle v_1(\hat{\xi}), [\hat{\Sigma} \cup C \cup C'] \rangle = 0,$$

daí $\mu_\Sigma(K, K') = 0$, pois $\mu_{C'}(\hat{K}', \hat{K}_0) = \mu_C(\hat{K}', \hat{K}_0) = 0$. \square

Pela proposição 5.2.13 podemos escolher um campo X em ξ_n de modo que qualquer $\bar{\beta}$ de um nó legendreano quase linear K em um dado nó tipo que tem número de Maslov $\mu_X(K) = 0$. No seguinte, sempre que essa escolha é determinada, escrevemos simplesmente $\mu(K)$.

Seja T^3 com estrutura de contato ξ_n e seja v um campo de vetores de contato em M , isto é, um campo de vetores cujo fluxo preserva ξ_n . O **conjunto característico** C de v é o conjunto de todos os pontos x em M tal que v é tangente à ξ_n em x . Se Σ é transversal a v (em outras palavras Σ é convexo), então o **conjunto divisor** de Σ , é o conjunto Γ_Σ dos pontos x em Σ tal que v é tangente a ξ_n em x . Note que o conjunto divisor Γ_Σ é igual a interseção de Σ com o conjunto característico de Σ .

A próxima proposição descreve o conjunto divisor de um toro convexo incompressível.

Proposição 5.2.14 *Sejam $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ vetores de uma base de \mathbb{Z}^3 e T a imagem de um mergulho $f : T^2 \rightarrow T^3$ induzido por*

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ru_1 + sv_1 \\ ru_2 + sv_2 \\ ru_3 + sv_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Então T é um toro convexo com declive $s(T) = -\frac{u_3}{v_3}$ e $\#\Gamma_T = 2n \operatorname{mdc}(u_3, v_3)$, onde $\operatorname{mdc}(u_3, v_3)$ é o maior divisor comum entre u_3 e v_3 .

Prova. Como $v_3 \neq 0$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ é transverso à T . Para todo n as estruturas de contato ξ_n são invariantes na direção x e y , logo T é convexo, pois X é um campo de vetores de contato. O conjunto característico $\Sigma = \{p \in T^3; X(p) \in \xi_n(p)\}$ consiste de $2n$ cópias paralelas de um toro horizontal da forma $\{z \in \mathbb{Z}\}$, assim o conjunto $\Gamma_T = T \cap \Sigma$ consiste de $2n$ cópias do conjunto $\{ru_3 + sv_3 \in \mathbb{Z}\}$. Calculando temos que $s(T) = -\frac{u_3}{v_3}$ e $\#\Gamma_T = 2n \operatorname{mdc}(u_3, v_3)$. \square

Por fim apenas enunciaremos os principais resultados demonstrados por Ghiggini em seu artigo (Gh).

Teorema 5.2.15 *Sejam K_1 e K_2 nós legendreanos em $\mathcal{L}_n(v_1, v_2, v_3)$, com $v_3 \neq 0$. Então K_1 é isotópico por isotopia legendreana a K_2 se, e somente se, $\beta(K_1) = \beta(K_2)$ e $\mu(K_1) = \mu(K_2)$.*

Teorema 5.2.16 *Todo nó quase linear K em $\mathcal{K}_n(v_1, v_2, 0)$ possui $\beta \leq 0$. Todo nó legendreano $K \in \mathcal{L}_n(v_1, v_2, 0)$ com $\beta(K) < 0$ é isotópico por isotopia legendreana a uma estabilização (múltipla) de um nó legendreano K' com $\beta(K') = 0$. Dois nós legendreanos $K_1, K_2 \in \mathcal{L}_n(v_1, v_2, 0)$ são isotópicos por isotopia legendreana se, e somente se, $\beta(K_1) = \beta(K_2)$, $\mu(K_1) = \mu(K_2)$ e pelo menos uma das seguintes afirmações é verificada:*

1. K'_1 e K'_2 são isotópicos por isotopia legendreana;
2. $|\mu(K_i)| < |\beta(K_i)|$, $i = 1, 2$;
3. $|\mu(K_i)| = |\beta(K_i)|$, e K'_1 e K'_2 correspondem a um nó divisor de T limitando uma região R , e o sinal de R é oposto ao sinal de $\mu(K_i)$, $i = 1, 2$.