

## 4

### Nós Legendreanos

De agora em diante  $M$  denotará uma variedade orientada de dimensão 3. Nesse capítulo trataremos os nós legendreanos em uma variedade  $M$  dando destaque ao caso  $M = \mathbb{R}^3$ .

#### 4.1

##### Conceitos Básicos

De agora em diante vamos considerar apenas os nós que são imersões.

**Definição 4.1.1** *Seja  $\kappa : S^1 \rightarrow M$  um nó na variedade de contato  $(M, \xi)$ . Dizemos que  $\kappa$  é um **nó legendreano** na variedade de contato  $(M, \xi)$  se*

$$\dot{\kappa}(t) \in \xi_{\kappa(t)}, \quad \forall t \in S^1.$$

*Se  $K$  é a imagem de  $\kappa$ , então equivalentemente  $K$  é legendreano se*

$$T_p K \subset \xi_p, \quad \forall p \in K.$$

Embora nosso interesse seja pelos nós legendreanos, convém mencionarmos aqui a definição de **nó transverso**. Um nó suave  $\kappa : S^1 \rightarrow M^3$  numa variedade de contato  $(M, \xi)$  é dito nó transverso se  $\dot{\kappa}(t)$  é transverso a  $\xi$  em todo ponto  $\kappa(t)$ . Se  $K$  é a imagem de  $\kappa$ , então equivalentemente  $K$  é transverso se

$$T_p K \oplus \xi_p = T_p M, \quad \forall p \in K.$$

**Definição 4.1.2** *Sejam  $\kappa_0, \kappa_1 : S^1 \rightarrow M$  nós legendreanos e  $I = [0, 1]$ . Dizemos que  $\kappa_0$  e  $\kappa_1$  são **isotópicos por isotopia legendreana** se existe uma isotopia  $h : S^1 \times I \rightarrow M$  entre  $\kappa_0$  e  $\kappa_1$ , onde  $h_t : S^1 \rightarrow M$  é um nó legendreano para cada  $t \in I$ . Neste caso  $h$  chama-se **isotopia legendreana**.*

Observemos que se  $K_0$  e  $K_1$  são as imagens dos nós legendreanos  $\kappa_0$  e  $\kappa_1$  respectivamente, então  $\kappa_0$  e  $\kappa_1$  são isotópicos por isotopia legendreana se, e somente se, existe uma família contínua  $\{K_t\}_{t \in I}$  de nós legendreanos que começa em  $K_0$  e termina em  $K_1$  e, além disso, o campo de vetores tangentes é não singular e varia continuamente.

**Definição 4.1.3** *Sejam  $K_0$  e  $K_1$  nós legendreanos em  $M$ . Dizemos que  $K_0$  e  $K_1$  são isotópicos por contato se existe uma família contínua de difeomorfismos  $\{\phi_t : M \rightarrow M\}_{t \in I}$  tal que  $\phi_t$  é um contatomorfismo,  $\forall t \in I$ ,  $\phi_0 = id$  e  $\phi_1(K_0) = K_1$ .*

**Teorema 4.1.4** *A classificação de nós legendreanos por isotopia de contato é equivalente à classificação por isotopia legendreana.*

*Prova.* Sejam  $K_0$  e  $K_1$  nós legendreanos numa variedade de contato  $(M, \xi)$ . Se  $K_0$  e  $K_1$  são isotópicos por contato, então existe uma família  $\{\phi_t\}$  como na definição 4.1.3. Fazendo  $K_t = \phi_t(K_0)$ , temos que

$$T_{\phi_t(p)}K_t = T_p\phi_t(K_0) = D\phi_t(T_pK_0) \subset D\phi_t(\xi_p) = \xi_p, \quad \forall p \in K_0.$$

Assim obtemos uma família  $\{K_t\}$  de nós legendreanos que começa em  $K_0$  e termina em  $K_1$ . Reciprocamente, se  $\kappa_t$  é uma família contínua de nós legendreanos em  $(M, \xi)$  que começa em  $\kappa_0$  e termina em  $\kappa_1$ , então existe uma família contínua de difeomorfismos  $\phi_t : M \rightarrow M$ ,  $t \in [0, 1]$ , tal que  $\phi_t(K_0) = K_t$ . Além disso, é fácil fazer com que  $\phi_t^*(\xi|_{K_t}) = \xi|_{K_0}$ , pois podemos girar o campo normal aos nós de modo que os planos de contato sejam preservados. Consideremos  $\xi_t = \phi_t^*(\xi)$ ; temos que  $\{\xi_t\}$  é uma família a um parâmetro de estruturas de contato, com  $\xi_t = \xi_0$  ao longo de  $K_0$ . Pelo teorema de Gray (teorema 3.2.20) existe uma família de difeomorfismos  $\psi_t$  tal que  $\psi_t^*(\xi_t) = \xi_0$  e  $\psi_t$  é a identidade em  $K_0$ . Tomemos  $f_t = \phi_t \circ \psi_t$ . Note que

$$f_t^*(\xi_0) = \psi_t^*(\phi_t^*(\xi_0)) = \psi_t^*(\xi_t) = \xi_0.$$

Assim  $f_t$ , para  $t \in [0, 1]$  é um contatomorfismo de  $\xi_0 = \xi$ . Além disso,  $f_t \circ \kappa_0 = \phi_t \circ \kappa_0 = \kappa_t$ .  $\square$

Agora nos limitaremos a estudar o caso em que  $M = \mathbb{R}^3$  com estrutura de contato canônica  $\xi_{can}$ . Existem duas motivações para nos limitarmos a esse caso. A primeira delas é que toda variedade de contato de dimensão 3 é localmente “parecida” com  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ . Esse fato segue do teorema de Darboux visto no capítulo anterior. E a segunda se dá pelo fato de podermos definir projeções que vão nos ajudar a entender melhor os nós legendreanos.

## 4.2

### Projeções Frontal e Lagrangeana

Seja  $K$  um nó legendreano na variedade de contato  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ , isto é,  $K$  é um nó em  $\mathbb{R}^3$  tal que a campo de vetores tangentes a  $K$  esta em  $\xi_{can}$ .

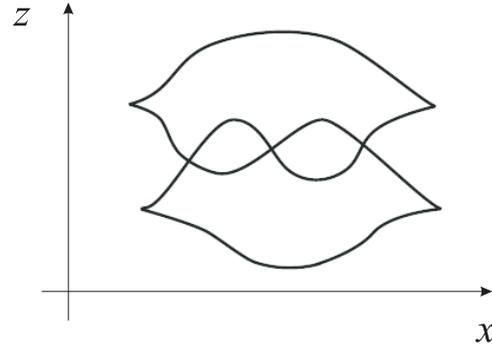


Figura 4.1: Projeção frontal do nó trevo legendreano.

Consideremos  $\kappa : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização do nó legendreano  $K$  definida por:

$$\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{4-1}$$

e suponhamos que  $\kappa$  seja uma imersão de classe  $C^1$ .

Como  $K$  é um nó legendreano temos que  $K$  é tangente à  $\xi_{can}$ . Daí

$$\dot{\kappa}(t) \in \xi_{can}(\kappa(t)),$$

mas  $\xi_{can} = \ker(dz - ydx)$ . Assim

$$\dot{z}(t) - y(t)\dot{x}(t) = 0 \tag{4-2}$$

**Definição 4.2.1** *Seja  $\pi_F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção definida por*

$$\pi_F(x, y, z) = (x, z).$$

*A imagem  $\pi_F(K)$  é chamada **projeção frontal** de  $K$ .*

Consideremos  $\kappa_{\pi_F} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\kappa_{\pi_F} = (\pi_F \circ \kappa)(t) = (x(t), z(t)).$$

Embora  $\kappa$  seja uma imersão  $\kappa_{\pi_F}$  nunca será uma imersão, pois caso  $\kappa_{\pi_F}$  fosse uma imersão  $x(t)$  seria monótona, mas  $x(t)$  é periódico.

**Definição 4.2.2** *Dizemos que  $\kappa$  é **genérico** se  $\kappa_{\pi_F}$  é uma projeção regular (vide def. 2.2.1) e o conjunto*

$$\mathfrak{S} = \{t \in S^1; \dot{x}(t) = 0\}$$

*é discreto e além disso,  $\ddot{x}(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathfrak{S}$ . Os pontos  $(x(t), y(t), z(t))$  tais que  $\dot{x}(t) = 0$  são chamados **pontos cúspides**.*

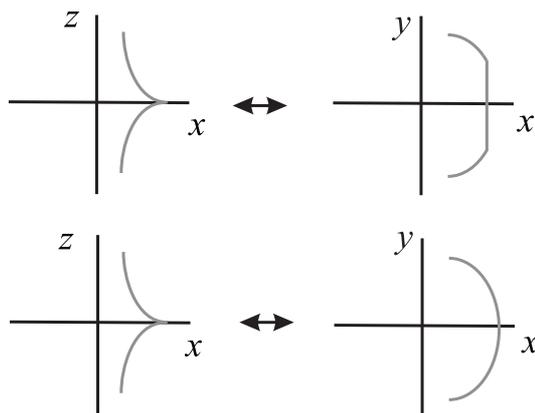


Figura 4.2: Mudança de um arco legendreano onde  $\dot{x}(t) = 0$ .

**Observação 4.2.3** *Existem nós legendreanos tais que  $\dot{x}(t) = 0$  para  $t$  pertencente a algum intervalo aberto. Neste caso, podemos fazer com que a cúspide fique “mais pontiaguda” (ver figura 4.2). Isso pode ser feito por isotopia legendreana no arco, onde  $\dot{x}(t) = 0$ . Assim para uma imersão genérica que é um mergulho suave em  $\mathbb{R}^3$  podemos fazer com que  $\dot{x}(t) = 0$  apenas em pontos isolados, de modo que nestes pontos  $\ddot{x} \neq 0$ .*

**Lema 4.2.4** *Seja  $\kappa : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um nó legendreano genérico. Então  $\kappa$  pode ser reobtido de sua projeção frontal  $\kappa_{\pi_F}(t) = (x(t), z(t))$ .*

*Prova.* Para  $t \in S^1$  tal que  $\dot{x}(t) \neq 0$ , segue da equação (4-2) que

$$y(t) = \frac{\dot{z}(t)}{\dot{x}(t)}$$

e para  $t_0 \in S^1$  tal que  $\dot{x}(t_0) = 0$  fazamos

$$y(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{z}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Esse limite existe pela regra de L'Hospital, pois  $\ddot{x}(t_0) \neq 0$ . Segue disto e da observação 4.2.3 o resultado.  $\square$

**Teorema 4.2.5** *Todo nó em  $M^3$  pode ser  $C^0$  aproximado por um nó legendreano isotópico por uma isotopia  $C^0$ -pequena. Em particular, existem nós legendreanos que representam qualquer nó topológico.*

*Prova.* Seja  $\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t))$  um nó em  $\mathbb{R}^3$  e seja  $\kappa_{\pi_F} = (x(t), z(t))$  a projeção frontal de  $\kappa$ . Para encontrarmos uma aproximação  $C^0$  do nó dado precisamos apenas encontrar um nó cuja projeção frontal não tenha tangentes

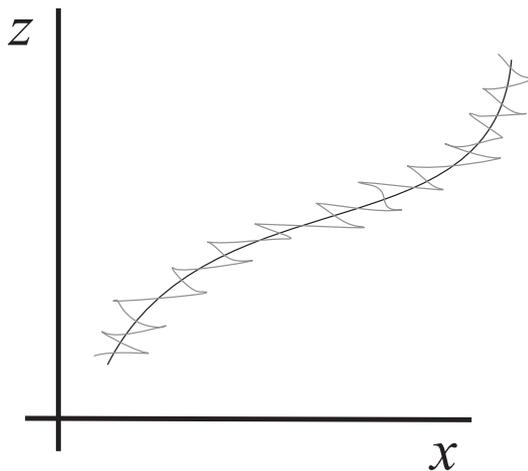


Figura 4.3: Aproximação  $C^0$  por um arco legendreano.

verticais, que possua pontos cúspides isolados e que o coeficiente angular da projeção frontal no tempo  $t$  seja  $C^0$ -próximo de  $y(t)$ . Se  $\kappa$  é legendreano no intervalo  $(a, b)$  podemos tomar a aproximação de  $\kappa_{\pi_F}$  como sendo a própria projeção de  $\kappa_{\pi_F}$  no intervalo  $(a, b)$ . Desta forma o levantamento legendreano de  $\kappa_{\pi_F}$  coincide com o levantamento de  $\kappa$ . Caso  $\kappa$  não seja legendreano no intervalo  $(a, b)$  podemos aproximar a projeção deste nó num subintervalo fechado de  $(a, b)$ , como mostra a figura 4.3. Utilizando esse procedimento em cada arco da projeção do nó dado obtemos uma projeção com as características descritas anteriormente.

Agora usamos o procedimento descrito na prova da proposição 4.2.4 para reobtermos o nó legendreano  $C^0$ -próximo e isotópico ao nó original.

Segue pelo teorema de Darboux que localmente todas as estruturas de contato tem comportamento semelhante ao comportamento da estrutura de contato  $\xi_{can}$  em  $\mathbb{R}^3$ . Logo o resultado é valido para qualquer variedade de contato  $(M^3, \xi)$ .

□

Podemos adaptar os movimentos de Reidemeister de nós topológicos para o contexto dos nós legendreanos (veja figura 4.4 que mostra os movimentos legendreanos de Reidemeister na projeção frontal no plano  $xz$ ).

Vale observarmos aqui que são permitidos reflexões. Por exemplo o movimento ilustrado na figura 4.5 é uma reflexão do segundo movimento de Reidemeister apresentado na figura 4.4.

**Teorema 4.2.6 ((Sw))** *Sejam  $K$  e  $K'$  dois nós legendreanos genéricos. Os nós  $K$  e  $K'$  são isotópicos por isotopia legendreana se, e somente se, a projeção frontal de um pode ser obtido do outro por um número finito de movimentos*

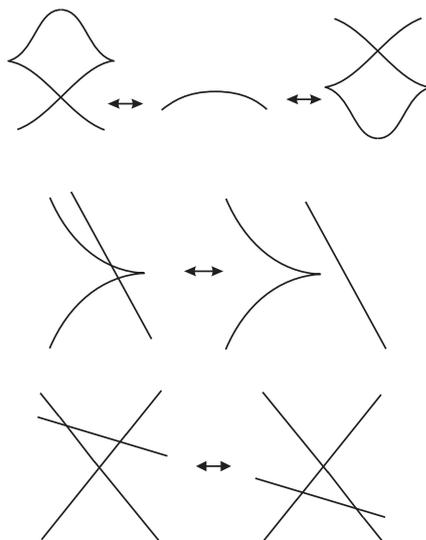


Figura 4.4: Movimentos Legendreanos de Reidemeister.

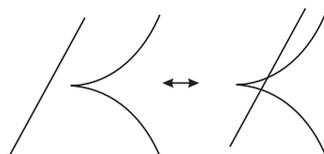


Figura 4.5: Reflexão do segundo movimento de Reidemeister.

*legendreanos de Reidemeister e isotopias planares que não admitem tangentes verticais.*

Seja  $K$  um nó legendreano orientado. Na projeção frontal de  $K$  dizemos que um cruzamento é positivo se com respeito a orientação de  $K$  os dois arcos cruzam a reta vertical na mesma direção. Caso contrário dizemos que o cruzamento é negativo (veja figura 4.6).

Na projeção frontal chamaremos de cúspides subindo e cúspides descendo as cúspides da figura 4.7, respectivamente. Observe que a reta tangente numa cúspide não precisa ser necessariamente horizontal.

**Definição 4.2.7** *Sejam  $K$  um nó legendreano em  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$  e  $\pi_L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção definida por  $\pi_L(x, y, z) = (x, y)$ . Chama-se **projeção lagrangeana** a imagem  $\pi_L(K)$ .*

Considerando  $K$  parametrizado como na fórmula (4-1) temos que

$$\kappa_{\pi_L}(t) = (x(t), y(t)).$$

Ao contrário da projeção frontal a projeção lagrangeana sempre pode ser parametrizada por uma imersão. Isso é o que garante a seguinte:

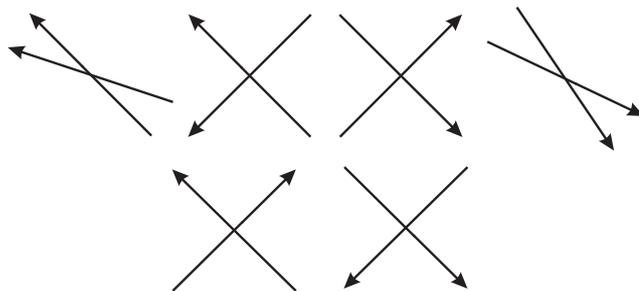


Figura 4.6: Cruzamentos positivos (em cima) e cruzamentos negativos (em baixo).

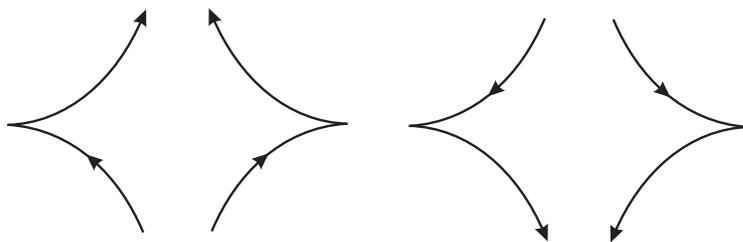


Figura 4.7: Cúspides subindo e cúspides descendo.

**Proposição 4.2.8** *Seja  $\kappa : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um nó legendreano. Se  $\kappa$  é uma imersão, então sua projeção lagrangeana  $\kappa_{\pi_L}$  é uma imersão. O nó  $\kappa$  pode ser reobtido (a menos de translação vertical) de  $\kappa_{\pi_L}$  por*

$$z(t) = z(0) + \int_0^t y(t)\dot{x}(t)dt.$$

*Prova.* Da equação (4-2) temos que se  $\dot{x}(t) = 0$  então  $\dot{z}(t) = 0$ . Do fato de  $\kappa$  ser uma imersão segue que  $\dot{y}(t) \neq 0$ . Assim  $\kappa_{\pi}$  é uma imersão. Vamos obter  $z(t)$  integrando a equação

$$\dot{z}(t) = y(t)\dot{x}(t).$$

Daí segue o resultado. □

Note que podemos escrever

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{z}(t)dt = z(t_0) + \int_{t_0}^t y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Como  $\kappa_{\pi_L}$  é uma curva fechada no plano  $xy$  tem-se  $\oint_{\kappa_{\pi_L}} ydx = 0$  e a integral  $\oint_{\kappa_{\pi_L}} ydx$  é a área (contada com o sinal) da curva orientada limitada por  $\kappa_{\pi_L}$ , dada por esta integral, é zero.

### 4.3

#### Números de Thurston-Bennequin e Maslov

Seja agora  $K$  um nó legendreano orientado na variedade de contato  $(M, \xi)$ , onde  $\xi$  é orientada. Se movimentarmos ligeiramente o nó  $K$  na direção positiva ou negativa do campo de vetores normais  $v$  de  $K$  no campo de hiperplanos  $\xi$  de forma que  $\{\kappa', v\}$  é a orientação positiva de  $\xi$  ao longo de  $K$  (onde  $\kappa$  é uma parametrização de  $K$ ) obteremos dois novos nós  $K_+$  e  $K_-$  respectivamente. Note que os nós  $K_+$  e  $K_-$  são transversos a  $\xi$ , e conseqüentemente tem orientação natural. A orientação natural de  $K_-$  corresponde a orientação de  $K$  e a orientação natural de  $K_+$  corresponde a orientação oposta de  $K$ .

**Definição 4.3.1** *Seja  $K$  um nó legendreano homólogo à zero na variedade de contato  $(M, \xi)$ , com  $\xi$  orientada. O número de Thurston-Bennequin é definido por:*

$$\beta(K) = lk(K, K_+),$$

onde  $lk(K, K_+)$  é o número de enlaçamento de  $K$  com  $K_+$ .

Consideremos  $K$  um nó transverso orientado homólogo a 0 em uma variedade orientada  $M$  de dimensão 3 tal que  $H_1(M^3) = 0$  com uma estrutura de contato paralelizável (vide 3.2.9) dada pela forma de contato  $\alpha$ . Então existe um campo de vetores não nulo  $X$  em  $M$  tal que  $X(p) \in \ker(\alpha_p)$  para todo  $p$  em  $M$ . Podemos obter outro nó  $\tilde{K}$  por um ligeiro movimento na direção do campo de vetores  $X$  de forma que  $K$  e  $\tilde{K}$  são disjuntos. E definimos

$$\tau(K) = lk(K, \tilde{K}).$$

**Proposição 4.3.2** *O número  $\tau(K)$  não depende da escolha do campo de vetores.*

*Prova.* Sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores não nulos tais que  $X, Y \in \ker \alpha$ . Consideremos uma estrutura quase complexa  $J$  em  $\ker \alpha$  compatível com a forma  $d\alpha$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $d\alpha(X, JX) = d\alpha(Y, JY) = 1$ . Logo  $Y = e^{i\theta}X$ , onde  $e^{i\theta}$  define uma função de  $M$  em  $S^1$ . Como  $K$  é homologicamente trivial em  $M$ , esta função restrita a  $K$  é homotopicamente trivial. Daí podemos obter uma família  $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$ , onde  $K_t$  é disjunto de  $K \forall t \in [0, 1]$ , é obtido movendo-se  $K$  ligeiramente de modo que  $K_0 = \tilde{K}$  é obtido por um ligeiro movimento de  $K$  na direção do campo  $X$ , e  $K_1$  é obtido por um ligeiro movimento de  $K$  na direção do campo  $Y$ . Portanto  $\ell(K, \tilde{K}) = \ell(K, K_1)$ .  $\square$

**Proposição 4.3.3 (Ver (Lin))** *Seja  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  e  $\xi_{sim}$  a estrutura de contato dada pela forma de contato  $\lambda = dz + r^2 d\theta$ . Se  $K$  é um nó transverso em  $(\mathbb{R}^3, \xi_{sim})$ , então*

$$\tau(K) \leq -\chi(\Sigma_K),$$

onde  $\chi(\Sigma_K)$  é a característica de Euler da superfície de Seifert do nó  $K$ .

Sejam  $K$  um nó legendreano orientado homólogo à zero na variedade de contato  $(M, \xi)$ , com  $\xi$  transversalmente orientada e paralelizável e  $\Sigma_K$  a superfície de Seifert de  $K$ . Restringindo o campo de planos  $\xi$  a superfície  $\Sigma_K$  obtemos um campo de planos trivial  $\xi|_{\Sigma_K}$ . Esta trivialização do campo de planos  $\xi|_{\Sigma}$  induz uma trivialização  $\xi|_K = L \times \mathbb{R}^2$ . Como  $K$  é orientado podemos tomar o campo de vetores tangentes,  $\dot{K}$  a  $K$  na direção da orientação de  $K$ . Como  $K$  é legendreano o campo de vetores  $\dot{K}$  está em  $K \times \mathbb{R}^2$ . Então podemos pensar  $\dot{K}$  como um caminho de vetores não nulo. Logo o campo de vetores  $\dot{K}$  tem um número de giros em  $\xi|_K$  com respeito a trivialização.

**Definição 4.3.4** *Definimos o número de Maslov,  $\mu(K)$ , como o número de giros de  $\dot{K}$  em  $\xi|_K$ .*

Se  $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$ , então  $\mu(K)$  depende apenas da orientação de  $K$  e  $\xi$ . O sinal de  $\mu(K)$  muda se invertemos a orientação de  $K$ . Sendo assim denotaremos o número de Maslov de um nó orientado  $\kappa(S^1) = K$  numa variedade de contato  $(M, \xi)$ , onde  $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$ , por  $\mu(K)$ .

**Teorema 4.3.5** *Se  $K$  é um nó legendreano orientado homólogo à zero, então*

$$\tau(K_+) = \beta(K) + \mu(K), \quad \tau(K_-) = \beta(K) - \mu(K).$$

*Prova.* Primeiramente consideremos  $\kappa, \kappa_+, \kappa_- : S^1 \rightarrow M$  tais que  $\kappa(S^1) = K$ ,  $\kappa_+(S^1) = K_+$  e  $\kappa_-(S^1) = K_-$ , onde  $K_+$  e  $K_-$  tem a mesma orientação do que  $K$ . Seja  $X$  um campo de vetores não nulo no campo de hiperplanos parametrizável  $\xi$ . O número  $\tau(K_+)$  é o número de enlaçamento de  $\kappa_+ = \kappa + \epsilon v$  e  $\kappa_+ + \epsilon' X = \kappa + \epsilon v + \epsilon' X$ , para  $\epsilon' > 0$  pequeno. Como  $v$  é perpendicular à  $\kappa$ , o número  $\beta(K)$  é o número de enlaçamento de  $\kappa$  e  $\kappa + \epsilon v$ , e por conseguinte é também o número de enlaçamento de  $\kappa + \epsilon' X$  e  $\kappa + \epsilon v + \epsilon' X$ . Assim,  $\tau(K_+) - \beta(K)$  é o número de rotações de  $v$  com respeito a  $X$  que é igual à  $\mu(K)$ . Isto prova a primeira inequação. A prova da segunda inequação é análoga.  $\square$

**Corolário 4.3.6** *Se  $\kappa$  é um nó legendreano em  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ , então*

$$\beta(K) + |\mu(K)| \leq -\chi(\Sigma_K),$$

onde  $\chi(\Sigma_K)$  é a característica de Euler da superfície de Seifert de  $K$ .

*Prova.* Do fato de  $\kappa_-$  e  $\kappa_+$  serem nós transversos à  $\xi_{can}$  e serem isotópicos à  $\kappa$  pela proposição 4.3.3 temos que

$$\beta(K) \leq -\chi(\Sigma_K) - \mu(K) \text{ e } \beta(K) \leq -\chi(\Sigma_K) + \mu(K).$$

Logo  $\beta(K) \leq -\chi(\Sigma_K) - |\mu(K)|$ . □

**Corolário 4.3.7** *Se  $K$  é um nó trivial legendreano em  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$  então*

$$\beta(K) < 0.$$

*Prova.* Como  $K$  é um nó trivial temos que  $\chi(\Sigma_K) = 1$ . Pelo corolário 4.3.6 segue que

$$\beta(K) \leq -1 - |\mu(K)| < 0.$$

□

**Teorema 4.3.8 (Ver (FT))** *Seja  $K$  um nó legendreano. Então*

1.  $\beta(K) + |\mu(K)| < e_v(K)$ ;
2.  $\beta(K) < \eta(K)$ ,

onde  $e_v(K)$  é o grau mínimo de  $v$  no polinômio de HOMFLY  $P_K(v, z)$  e  $\eta(K)$  é o grau mínimo de  $a$  no polinômio de Kauffman de  $K$ , reduzido módulo 2.

Seja agora  $K$  um nó legendreano em  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ . Podemos calcular os números de Thurston-Bennequin e Maslov facilmente. Basta considerarmos as projeções frontal e lagrangeana de  $K$ .

**Proposição 4.3.9** *Na projeção frontal de um nó legendreano orientado  $K$  em  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$  tem-se*

$$\mu(K) = \frac{1}{2}(C_+(K) - C_-(K)),$$

onde  $C_+(K)$  é o número de cúspides subindo e  $C_-(K)$  é o número de cúspides descendo.

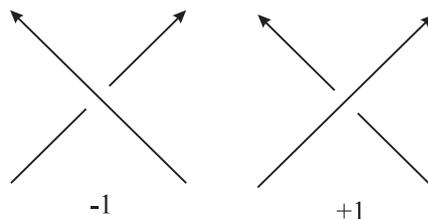


Figura 4.8: Interseção positiva e negativa que satisfaz a regra da mão esquerda.

*Prova.* Seja  $w = \frac{\partial}{\partial y}$  em  $\mathbb{R}^3$ . É um campo vertical não nulo em  $\xi$ . Assim pode ser usado para trivializar  $\xi|_K$  independente da superfície de Seifert achada para  $K$ . Agora para calcularmos o número de Maslov do nó  $K$  precisamos ver quantas vezes o campo de vetores  $v$  tangente a  $K$  gira, pensando tal campo como um campo em  $\mathbb{R}^2$  pela trivialização dada por  $w$ , isto é o mesmo que contar com o sinal quantas voltas  $v$  dá em volta da origem de  $\mathbb{R}^2$ . Mas, isto equivale a fazer uma conta (considerando-se o sinal) de quantas vezes  $v$  e  $w$  apontam para a mesma direção, chamaremos isto de interseção de  $v$  e  $w$ . O “sinal da interseção” é determinado por  $(+1)$  se  $v$  passa por  $w$  no sentido anti-horário ou por  $(-1)$  se  $v$  passa por  $w$  no sentido horário. Na projeção frontal  $v$  aponta na direção de  $\pm w = \pm \frac{\partial}{\partial y}$  nas cúspides. Pode-se facilmente verificar que a interseção será positiva ao descer uma cúspide (cúspide descendo) e negativa ao subir uma cúspide (cúspide subindo). Além disso, isto conta o número de vezes que  $v$  “cruza”  $\pm w$ , mas para obtermos  $\mu$  temos que dividir por 2.  $\square$

**Proposição 4.3.10** *Na projeção lagrangeana de um nó legendreano orientado  $K$  tem-se*

$$\mu(K) = \text{número de giros de } \pi_L(K).$$

*Prova.* Seja  $w = \frac{\partial}{\partial y}$  em  $\mathbb{R}^3$ . Na projeção lagrangeana  $w$  projeta a  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Assim o número de Maslov é visto como o número de giros do vetor tangente a  $\pi(K)$  no plano  $xy$ .  $\square$

**Observação 4.3.11** *Uma interseção é positiva se satisfaz a regra da mão direita e negativa se satisfaz a regra da mão esquerda (ver figura 4.8).*

**Proposição 4.3.12** *Seja  $K$  um nó legendreano em  $\mathbb{R}^3$ . Na projeção frontal de  $K$  tem-se*

$$\beta(K) = Cr_+(K) - Cr_-(K) - \frac{1}{2}C(K),$$

onde  $Cr_+(K)$  é o número de cruzamentos positivos da projeção  $\pi_F(K)$ ,  $Cr_-(K)$  é o número de cruzamentos negativos e  $C(K)$  é o número de cúspides.

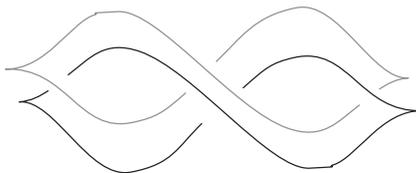


Figura 4.9: Nó  $K$  em preto e o nó  $K^+$  em cinza usado para o cálculo de  $\beta(K)$ .

*Prova.* Seja  $v = \frac{\partial}{\partial z}$  em  $\mathbb{R}^3$ . Assim  $v$  é um campo de vetor transverso à  $\xi$  ao longo de  $K$ . Temos que  $\beta(K)$  é o enlaçamento de  $K$  com  $K_+$ . Assim na projeção frontal  $K$  e  $K_+$  são como na figura 4.9. Agora o número de enlaçamento de  $K$  e  $K_+$  é necessariamente a metade das vezes (contados com o sinal) que as projeções  $\pi_F(K)$  e  $\pi_F K_+$  se intersectam. Note que cada cruzamento de  $\pi_F(K)$  dá duas interseções de  $\pi_F(K)$  e  $\pi_F(K_+)$ , ambas com o mesmo sinal do cruzamento. Numa cúspide positiva ou negativa de  $\pi_F(K)$  haverá um cruzamento negativo de  $K$  e  $K_+$ . Portanto na projeção frontal de  $K$  temos que  $\beta(K) = Cr_+(K) - Cr_-(K) - \frac{1}{2}(C(K))$ .  $\square$

**Proposição 4.3.13** *Na projeção lagrangeana de um nó legendreano  $K$  tem-se*

$$\beta(K) = \omega(K),$$

onde  $\omega(K)$  é a torção de  $K$  calculada através do diagrama dado pela projeção lagrangeana de  $K$ .

*Prova.* O número  $\beta(K)$  é definido por  $\beta(K) = lk(K, K_+)$ . Assim na projeção lagrangeana se ao levantarmos  $K_+$ ,  $K_+$  não intersecta  $K$  então o número de enlaçamento deles é zero. Além disso, cada cruzamento do diagrama de  $K$  contribui em  $(\pm 1)$  para o número de enlaçamento. Logo segue o resultado.  $\square$

Os dois próximos resultados sobre nós legendreanos em  $\mathbb{R}^3$  nos garantem que os números de Bennequin e Maslov são invariantes sobre isotopia legendreana.

**Proposição 4.3.14** *O número de Thurston-Bennequin de um nó legendreano é invariante por movimentos legendreanos de Reidemeister sobre a projeção frontal.*

*Prova.* Nós aproximamos esta prova examinando os três movimentos legendreanos de Reidemeister ilustrados na figura 4.4. Se o primeiro movimento for executado, duas cúspides e um cruzamento positivo estão perdidos, produzindo uma mudança líquida de zero, ou duas cúspides e um cruzamento positivo são ganhos, produzindo uma mudança líquida de zero. Assim, o primeiro

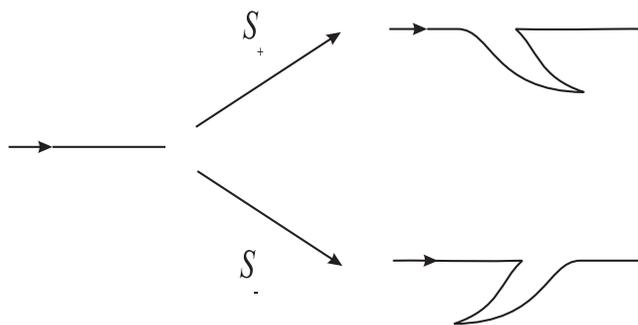


Figura 4.10: Estabilização positiva e negativa na projeção frontal.

movimento de Reidemeister não muda o número de Thurston-Bennequin. Se o segundo movimento for executado, um cruzamento positivo e um cruzamento negativo estão perdidos, produzindo uma mudança líquida de zero. Isto também não altera o número de Bennequin. Se o terceiro movimento for executado, um cruzamento positivo e um cruzamento negativo estão perdidos, e um cruzamento positivo e um negativo são ganhos, também produzindo uma mudança líquida de zero.  $\square$

**Proposição 4.3.15** *O número de Maslov de um nó legendreano orientado é invariante por movimentos legendreanos de Reidemeister sobre a projeção frontal.*

*Prova.* Temos que o segundo e terceiro movimento de Reidemeister não alteram nem o número de cúspides descendo nem o número de cúspides subindo, logo tudo que nós necessitamos verificar é a invariância sob o primeiro movimento. Não obstante a orientação, o primeiro movimento de Reidemeister remove ou adiciona uma cúspide subindo e uma descendo. Nenhuma adição ou remoção muda o número de Maslov.  $\square$

Seja um nó legendreano orientado  $K$  em  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ . Podemos obter um outro nó legendreano do mesmo tipo topológico que o nó  $K$  acrescentando zig-zag a sua projeção frontal e chamamos essa operação de **estabilização**. Classificamos a estabilização como estabilização positiva (negativa) e denotamos por  $S_+(K)$  ( $S_-(K)$ ) a estabilização na estrutura canônica de  $\mathbb{R}^3$  na figura 4.10.

Note que

$$\beta(S_{\pm}(K)) = \beta(K) - 1$$

e

$$\mu(S_{\pm}(K)) = \mu(K) \pm 1.$$

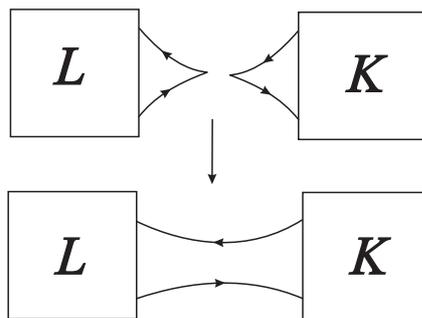


Figura 4.11: Soma conexa na projeção frontal

A operação de estabilização é bem definida, em  $\mathbb{R}^3$ . Basta observar que os zig-zags podem ser movidos passando por cúspides e cruzamentos na projeção frontal. Além disso, a operação de estabilização pode ser estendida para qualquer variedade de contato  $(M^3, \xi)$ . Para mais detalhes ver (Et2).

Chamaremos uma composição de estabilizações de estabilização múltipla e somente uma estabilização chamaremos de estabilização simples.

Podemos realizar a estabilização de maneira análoga na projeção lagrangeana.

**Teorema 4.3.16 (Ver (FT))** *Sejam  $K_1$  e  $K_2$  nós legendreanos em  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ . Se  $K_1$  e  $K_2$  são topologicamente isotópicos, então depois que cada um for estabilizado em algum número de vezes eles serão isotópicos por isotopia legendreana.*

**Definição 4.3.17** *Seja  $K$  um nó legendreano. Dizemos que  $K$  é **destabilizável** se existe um nó legendreano  $K'$  tal que  $S_{\pm}(K) = K'$ .*

Seja  $\mathcal{K}$  um nó tipo em  $\mathbb{R}^3$  (ver p. 14). Denotaremos por  $\mathcal{L}(\mathcal{K})$  o conjunto dos nós legendreanos na variedade de contato  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$  que pertencem a  $\mathcal{K}$ .

**Definição 4.3.18** *Seja  $\mathcal{K}$  um nó tipo em  $\mathbb{R}^3$  com estrutura de contato  $\xi_{can}$ . Definimos o **número máximo de Thurston-Bennequin** por:*

$$\bar{\beta}(\mathcal{K}) = \max\{\beta(L); L \in \mathcal{L}(\mathcal{K})\}.$$

O número máximo de Thurston-Bennequin está bem definido uma vez que pelo corolário 4.3.6 temos que o conjunto  $\{\beta(L); L \in \mathcal{L}(\mathcal{K})\}$  é limitado superiormente e por definição de  $\beta$  este conjunto é subconjunto não vazio de  $\mathbb{Z}$ , logo  $\bar{\beta}(\mathcal{K})$  existe. Além disso, como o número de Thurston-Bennequin de um nó legendreano é um invariante segue que  $\bar{\beta}$  é um invariante de nós topológicos.

Na figura 4.11 ilustramos a soma conexa  $K\sharp L$  na projeção frontal de dois nós legendreanos orientados  $K$  e  $L$  na variedade de contato  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ .

Utilizando a projeção frontal e proposição 4.3.12 e proposição 4.3.9 é fácil ver que

$$\beta(K\sharp L) = \beta(K) + \beta(L) + 1$$

e

$$\mu(L\sharp K) = \mu(K) + \mu(L).$$