

## 2

## Nós e Enlaces

### 2.1

#### Preliminares

Ao longo de todo o texto o conjunto dos números naturais (começando em 1), o conjunto dos inteiros e o conjunto dos números reais serão representados pelos símbolos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{R}$ , respectivamente. Denotaremos por  $\mathbb{R}^n$  o espaço  $n$ -dimensional, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\},$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, indicaremos por  $I$  o intervalo fechado  $[0, 1]$ . A  $n$ -esfera é definida por:

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\},$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades em  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é um mergulho se  $f : M \rightarrow f(M)$  é um homeomorfismo. Diremos que uma função  $f$  é diferenciável (ou suave) se ela for de classe  $C^\infty$ , isto é, se ela possui derivadas de todas as ordens. Caso a derivada de  $f$ ,  $Df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ , seja injetiva  $f$  chama-se imersão.

Duas aplicações contínuas  $h_0, h_1 : M \rightarrow N$  são ditas homotópicas se existe uma aplicação contínua

$$h : M \times I \rightarrow N$$

tal que  $h(x, 0) = h_0(x)$  e  $h(x, 1) = h_1(x)$ . Neste caso  $h$  chama-se homotopia. Fazendo  $h_t(x) = h(x, t)$  obtemos uma família a um parâmetro  $\{h_t\}_{t \in I}$  que começa em  $h_0$  e termina em  $h_1$ ; então podemos pensar a aplicação  $h_t$  como uma deformação contínua.

Estamos aqui interessados em estudar os nós no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  ou no toro tridimensional  $T^3$  que é identificado como  $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ . Sendo assim, quando estivermos nos referindo a um nó (ou enlace) em  $M$ , onde  $M$

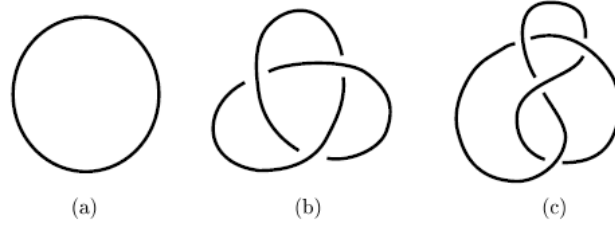


Figura 2.1: (a) nó trivial; (b) nó trevo; (c) a figura oito nó.

é uma variedade de dimensão 3, estaremos implicitamente supondo  $M = \mathbb{R}^3$  (ou  $M = T^3$ ).

**Definição 2.1.1** Um nó em  $M$  é um mergulho  $\kappa : S^1 \rightarrow M$ .

**Definição 2.1.2** Um enlace com  $n$  componentes é um mergulho

$$\ell : \coprod_{i=1}^n S_i^1 \rightarrow M,$$

onde  $\coprod$  denota a união disjunta e cada  $S_i^1$  é uma cópia de  $S^1$ .

Às vezes, quando não houver ambigüidade nos referiremos a um enlace  $\ell$  pela sua imagem

$$\ell\left(\coprod_{i=1}^n S_i^1\right) = L.$$

Assim podemos escrever  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ , onde cada  $L_i$  é um nó. A orientação de  $S_i^1$  induz uma orientação natural em cada  $L_i$ . Note que todos os enlaces com  $n$  componentes são homeomorfos e que um enlace com uma componente é um nó.

**Definição 2.1.3** Seja  $h : M \times I \rightarrow M$  uma homotopia. Dizemos que  $h$  é uma isotopia ambiente se  $h_0$  é a identidade e  $h_t$  é um homeomorfismo,  $\forall t \in I$ .

**Definição 2.1.4** Dois enlaces  $L_0$  e  $L_1$  são ditos isotópicos (ou equivalentes, com notação  $L_0 \sim L_1$ ) se existe uma isotopia ambiente  $h$  tal que  $h_1(L_0) = L_1$ . Caso  $L_0$  e  $L_1$  sejam orientados além disso,  $h$  deve preservar a orientação.

A relação de  $\sim$  é uma relação de equivalência no conjunto de todos os enlaces. De fato, dado um enlace  $L$  em  $M$  temos que a aplicação  $h : M \times I \rightarrow M$  definida por  $h(x, t) = x$  é uma isotopia ambiente entre  $L$  e  $L$ , logo  $\sim$  é reflexiva. Sejam  $L_0$  e  $L_1$  dois nós tais que  $L_0 \sim L_1$ . Daí existe uma isotopia

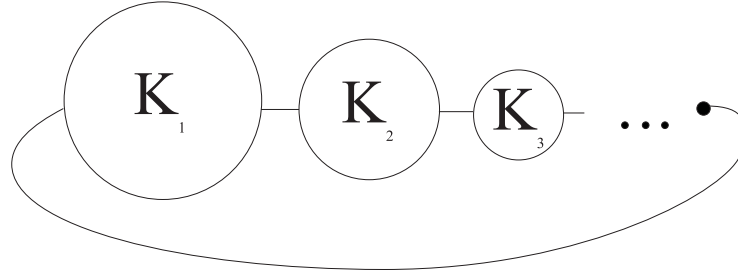


Figura 2.2: Nó selvagem.

ambiente  $h : M \times I \rightarrow M$  entre os nós  $L_0$  e  $L_1$ . Considere  $\tilde{h} : M \times I \rightarrow M$  definida por  $\tilde{h}(x, t) = h_t^{-1}(x)$ . Temos que  $\tilde{h}_0$  é identidade e  $\tilde{h}_1(L_1) = L_0$ . Logo  $L_1 \sim L_0$ . Suponhamos agora que  $L_0 \sim L_1$  e  $L_1 \sim L_2$ . Daí existem isotopias  $h : M \times I \rightarrow M$  entre  $L_0$  e  $L_1$ , e  $g : M \times I \rightarrow M$  entre  $L_1$  e  $L_2$ . Tomemos

$$\bar{h}(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t), & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ g(h_1(x), 2t - 1), & \text{se } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A aplicação  $\bar{h}$  definida como acima é uma isotopia ambiente entre  $L_0$  e  $L_2$ , logo  $L_0 \sim L_2$ .

Cada classe de equivalência de um nó,  $\mathcal{K}$ , é chamada **nó tipo**. Assim nós equivalentes tem o mesmo nó tipo.

**Observação 2.1.5** *Um nó equivalente a uma circunferência em  $\mathbb{R}^3$  chama-se nó trivial.*

Um nó pode ter um comportamento estranho, como por exemplo ter uma sequência infinita de malhas convergindo para um ponto limite. Este é um exemplo de um nó selvagem (veja figura 2.2). Para evitarmos essas patologias vamos considerar em nosso estudo apenas os nós comportados cuja definição segue abaixo.

Um nó cuja imagem é uma união finita de segmentos de reta chama-se **nó poligonal**, os segmentos de retas que compõem a imagem do nó chamam-se lados e os pontos de encontro entre dois lados chamam-se vértices. Um enlace poligonal é um enlace onde cada uma de suas componentes é um nó poligonal.

**Definição 2.1.6** *Um enlace é dito **comportado** se é equivalente à um enlace poligonal. Caso contrário chama-se enlace selvagem.*

Chamamos de **isotopia elementar** uma reparametrização de um lado  $\overline{AB}$  com dois lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$ , veja figura 2.3. Dizemos que dois enlaces poligonais são **isotópicos por isotopia elementar** se existe uma sequência de isotopias elementares que transforma um no outro.

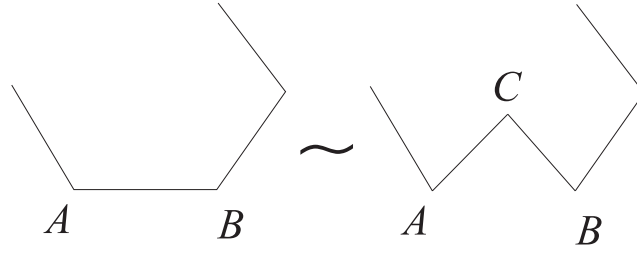


Figura 2.3: Isotopia elementar.

**Observação 2.1.7** Obviamente, dado um enlace comportado  $L$  existe um enlace poligonal equivalente a  $L$ . Chamamos esse enlace de **representante poligonal** de  $L$ . Um fato conhecido (veja corolário 3.16 do livro (BZ)) é que: dois enlaces comportados são equivalentes se, e somente se, seus representantes são isotópicos por isotopia elementar. Agora se quisermos mostrar que dois nós são equivalentes precisamos apenas mostrar que seus representantes poligonais são isotópicos por isotopia elementar, o que em geral é muito mais fácil.

Um nó  $\kappa : S^1 \rightarrow M$  é dito **suave** se  $\kappa$  é uma aplicação diferenciável. Os nós suaves (resp. comportados) podem ser entendidos como uma curva suave (resp. suave por partes) fechada simples  $\alpha : I \rightarrow M$ . Um **arco** é a imagem de um mergulho  $f : J \rightarrow M$ , onde  $J$  é um intervalo contido em  $I$ . Um **nó com referencial** é um nó que tem uma base ordenada do plano normal que varia continuamente. Se  $M$  é orientada basta ter o primeiro campo normal.

**Proposição 2.1.8** *Todo nó suave parametrizado pelo comprimento de arco é comportado.*

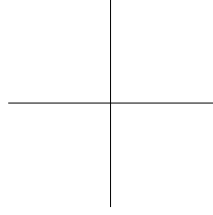
Uma prova desta última proposição é dada no apêndice I do livro (CF).

## 2.2

### Diagramas

A **projeção** de um enlace  $L$  em  $M = \mathbb{R}^3$  (ou  $M = T^3$ ) é a projeção  $\pi|_L : L \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ou  $T^2$ ). Um ponto  $q \in \pi(L)$  é dito **regular** se  $\pi^{-1}(q)$  é unitário, caso contrário dizemos que  $q$  é **ponto múltiplo**. Se  $\#\pi^{-1}(q) = 2$ , então dizemos que  $q$  é **ponto duplo**. Um ponto duplo  $q$  é dito **transversal** se existem uma vizinhança  $U$  de  $q$  e um homeomorfismo em  $U$  que leva um arco em  $U$  no eixo  $x$  e o outro arco em  $U$  no eixo  $y$ , onde o eixo  $x$  é unido com o eixo  $y$  como ilustra a figura 2.4.

**Definição 2.2.1** Dizemos que a projeção  $\pi$  é uma **projeção regular** do enlace  $L$  se  $\pi(L)$  tem um número finito de pontos múltiplos e todos eles são pontos duplos transversais.

Figura 2.4: Duas retas em  $\mathbb{R}^2$ 

**Teorema 2.2.2** *Todo enlace poligonal possui uma projeção regular.*

*Prova.* Seja  $L$  um enlace poligonal e consideremos uma projeção  $\pi : M \rightarrow P$ . Podem ocorrer as seguintes situações:

- o enlace  $L$  tem algum lado paralelo à direção da projeção  $\pi$ ;
- existe um ponto múltiplo  $q$  tal que  $\#\pi^{-1}(q) > 2$ ;
- um ponto duplo produzido por um vértice de  $L$ ;
- dois lados paralelos de  $L$  transversais a uma mesma reta que contenha a direção da projeção  $\pi$ .

Em todos esse casos é possível fazer uma pequena perturbação em  $L$  de modo que nenhum desses casos citados aconteça (ver teorema 3.2.1 de (Cr)). Obtemos assim uma projeção  $\pi$  que possui apenas pontos duplos transversais.

Note que cada ponto duplo transversal é produzido por um par de lados de  $L$ . Como o enlace  $L$  possui um número finito de lados segue que  $\pi(L)$  possui um número finito de pontos duplos transversais. Portanto  $\pi$  é uma projeção regular do enlace  $L$ .  $\square$

Na imagem de uma projeção regular chamamos de **cruzamentos** os pontos que correspondem a pontos duplos transversais.

**Definição 2.2.3** *Sejam  $L$  um enlace e  $\pi : M \rightarrow P$  uma projeção regular de  $L$ . O **diagrama** de  $L$  é a imagem  $\pi(L)$  com a informação em cada cruzamento de qual arco está por cima e qual está por baixo.*

Por definição, o número de cruzamentos no diagrama de um enlace é finito. Um nó orientado dá uma orientação natural para o seu diagrama. Assim classificamos como **cruzamentos positivos** e **cruzamentos negativos** os cruzamentos no diagrama de um nó (veja figura 2.5).

**Corolário 2.2.4** *Todo nó poligonal possui um diagrama.*

Com este último corolário podemos admitir que para cada enlace comportado  $L$  existe um enlace equivalente a  $L$  que possui um diagrama.

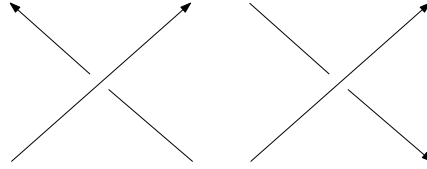


Figura 2.5: Cruzamentos positivo e negativo, respectivamente, no diagrama orientado.

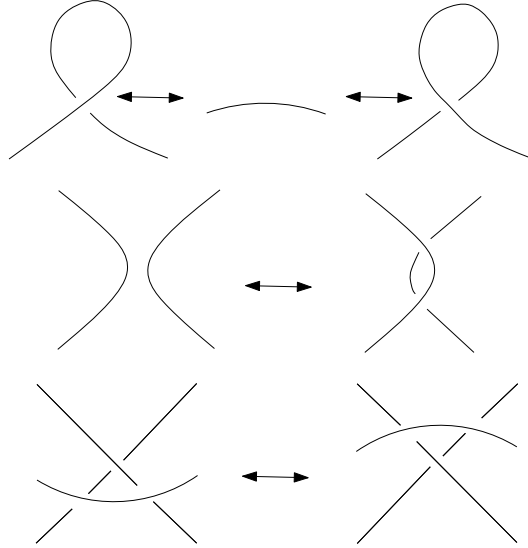


Figura 2.6: Movimentos de Reidemeister:  $R_1$  (em cima),  $R_2$  (no meio) e  $R_3$  (em baixo).

**Definição 2.2.5** *Seja  $\mathcal{D}$  o diagrama de um enlace em  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $T^3$ ). Uma isotopia planar (resp. toroidal) do diagrama  $\mathcal{D}$  é um isotopia do plano (resp.  $T^2$ ) em si próprio que não muda a configuração do diagrama.*

## 2.3

### Movimentos de Reidemeister

Existem três movimentos  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  ilustrados na figura 2.6. Esses movimentos são chamados de **movimentos de Reidemeister**.

**Proposição 2.3.1** *Dois enlases poligonais em  $\mathbb{R}^3$  (ou  $T^3$ ) são isotópicos por isotopia elementar se, e somente se, o diagrama de um pode ser obtido do diagrama do outro por uma sequência finita de isotopias planares (ou toroidais) e movimentos de Reidemeister.*

*Prova.* Observemos que os movimentos de Reidemeister e as isotopias planares não mudam a classe de isotopia de um enlace. Assim basta provarmos a outra implicação.

Sejam  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  dois diagramas de dois enlases poligonais equivalentes  $L_1$  e  $L_2$  em  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente. Pela definição de isotopia entre  $L_1$  e  $L_2$  temos

que existe um número finito de isotopias elementares tal que  $\overline{AB} \mapsto \overline{AC} \cup \overline{CB}$  (veja figura 2.3). Este primeiro enlace é reconstruído tornando-se um segundo enlace. Sem perda de generalidade podemos supor que cada passo nos dá um triângulo  $ABC$ , onde os segmentos  $\overline{DA}$  e  $\overline{BE}$  que vem do final do segmento  $AB$  não intersectam o interior de  $ABC$ . Caso contrário, podemos obtê-lo por  $R_1$ .

Seja  $\mathcal{D}$  o diagrama do primeiro enlace citado anteriormente no plano  $ABC$ . Agora separamos a interseção das componentes de  $ABC$  e  $\mathcal{D}$  em dois conjuntos: superior e inferior de acordo com a localização dos arcos do enlace cujo diagrama é  $\mathcal{D}$  com respeito ao plano  $ABC$ .

Consideremos uma triangularização de  $ABC$ . Podemos supor que esses triângulos são dos tipos seguintes:

- Primeiro tipo, contém apenas um cruzamento de  $\mathcal{D}$ ; neste caso os lados de  $\mathcal{D}$  cruzam dois lados de  $ABC$ ;
- Segundo tipo, contém apenas um vértice de  $\mathcal{D}$  e partes dos dois lados de  $\mathcal{D}$  que se ligam ao vértice;
- Terceiro tipo, contém apenas parte de um lado de  $\mathcal{D}$ ;
- Quarto tipo, não contém vértices nem lado de  $\mathcal{D}$ .

Estes triângulos exceto, o quarto tipo, estão ilustrados na figura 2.7.

Tal decomposição em triângulos pode ser feita da seguinte maneira: primeiro corte todos os cruzamentos e vértices por um triângulo do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Depois triangularize a parte restante do triângulo  $ABC$  com os dois outros tipos de triângulos restantes.

Em vez de executar isotopia elementar ao triângulo  $ABC$  vamos executar passo-à-passo isotopias elementares em pequenos triângulos que compõem  $ABC$ .

Agora observemos que o triângulo do primeiro tipo gera uma combinação de  $R_2$  e  $R_3$ , os triângulos do segundo e terceiro tipo geram  $R_2$  ou uma isotopia planar e o quarto triângulo gera uma isotopia planar. Logo isotopias podem ser representadas por uma combinação de movimentos de Reidemeister e isotopias planares.

A mesma demonstração pode ser feita para o caso de enlaces em  $T^3$ , pois a projeção em  $\mathbb{R}^2$  é localmente equivalente a projeção em  $T^2$ .  $\square$

**Observação 2.3.2** *Existe uma versão mais geral da proposição que acabamos de provar cujo enunciado afirma que dois enlaces comportados são isotópicos se e somente se seus diagramas podem ser obtidos um do outro por uma sequência finita de movimentos de Reidemeister e isotopias planares. A demonstração*

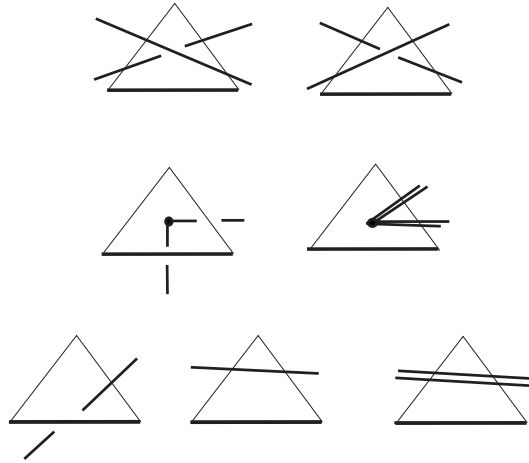


Figura 2.7: Triângulo do primeiro tipo (em cima), triângulo do segundo tipo (no meio) e triângulo do terceiro tipo (em baixo).

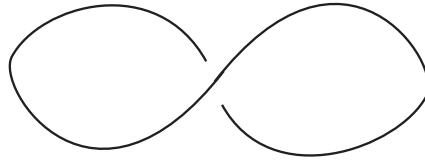


Figura 2.8: Diagrama do nó trivial.

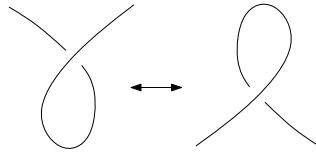


Figura 2.9: Movimento  $R'_1$ .

desse resultado pode ser encontrada em (PS). Ao contrário da demonstração do caso de nós poligonais a demonstração desse caso mais geral não é nada simples.

**Proposição 2.3.3** *Os movimentos de Reidemeister são independentes.*

Apenas iremos ilustrar esse fato com um simples exemplo de que realizando apenas os movimentos  $R_2$  e  $R_3$  não obtemos um diagrama que foi obtido realizando-se apenas o movimento  $R_1$ , ou seja,  $R_2$  e  $R_3$  não implicam  $R_1$ . Para mais exemplos e a demonstração da proposição 2.3.3, indicamos ao leitor ver o apêndice A do livro (Ma).

**Exemplo 2.3.4** *A figura 2.8 ilustra um diagrama de um nó trivial com um cruzamento. Realizando apenas o movimento  $R_1$  nesse diagrama é fácil ver que podemos obter um novo diagrama sem cruzamentos. Por outro lado o movimento  $R_2$  cria ou destrói dois cruzamentos num diagrama, logo não muda a paridade do número de cruzamentos do diagrama. Realizando o movimento  $R_3$  continuamos com o mesmo número de cruzamentos, logo também não muda*



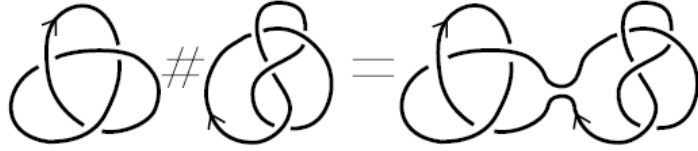


Figura 2.10: Soma conexa de dois nós.

a paridade do número de cruzamentos no diagrama. Portanto é impossível transformar tal diagrama num diagrama sem cruzamentos usando apenas os movimentos  $R_2$  e  $R_3$ .

Introduzimos mais um movimento que denotaremos por  $R'_1$  ilustrado na figura 2.9. Uma sequência finita de movimentos  $R'_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  realizados sobre o diagrama de um nó (ou enlace) chama-se **isotopia regular**. Dizemos que dois diagramas são **isotópicos por isotopia regular** se podemos obter um através do outro por isotopia regular.

## 2.4

### Aritmética dos Nós

Nesta seção vamos considerar apenas os nós em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 2.4.1** *Sejam  $K_1$  e  $K_2$  dois nós orientados. A soma conexa de  $K_1$  com  $K_2$  é um nó  $K_1 \# K_2$  obtido colocando  $K_i$  numa 3-bola  $B_i$  tais que  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  e de forma que algum arco curto de  $K_i$  esteja no bordo de  $B_i$ , apague parte desses arcos, e em seguida identifique as extremidades de  $K_1$  às extremidades de  $K_2$  via um homeomorfismo que preserva a orientação (veja figura 2.10 para uma ilustração).*

A soma conexa está bem definida para nós orientados em  $\mathbb{R}^3$ , isto é, a soma conexa não depende da escolha dos arcos a serem apagados.

Sejam  $K_1$  e  $K_2$  dois nós em  $\mathbb{R}^3$ . Para obtermos o nó  $K_1 \# K_2$  escolhemos um arco de  $K_1$  para ser preso a um arco escolhido de  $K_2$ , podemos considerar que o nó  $K_2 \# K_1$  foi obtido prendendo-se o mesmo arco de  $K_1$  ao mesmo arco de  $K_2$  agora observe que os diagramas de  $K_1 \# K_2$  e  $K_2 \# K_1$  são “idênticos”. Logo pela observação 2.3.2 temos que  $K_1 \# K_2$  e  $K_2 \# K_1$  são equivalentes. Assim, podemos concluir que a soma conexa  $\#$  é comutativa.

Note que além de ser comutativa a soma conexa é associativa. Note também que a soma conexa do nó trivial com um outro nó  $K$  é o próprio nó  $K$ . Assim o conjunto de todos os nós com a operação soma conexa é um semi-grupo comutativo. Veremos que o conjunto de todos os nós com a operação soma conexa não é um grupo.

**Teorema 2.4.2** *Sejam  $K$  e  $\tilde{K}$  dois nós. Se  $K$  não é equivalente ao nó trivial, então  $K \sharp \tilde{K}$  não é equivalente ao nó trivial.*

*Prova.* Seja  $K$  um nó não trivial e  $\tilde{K}$  um nó qualquer. Suponhamos que  $K \sharp \tilde{K}$  é um nó trivial. Consideremos a sequência

$$\underbrace{K \sharp \tilde{K}}_{K_1}, \underbrace{(K \sharp \tilde{K}) \sharp (K \sharp \tilde{K})}_{K_2}, \underbrace{(K \sharp \tilde{K}) \sharp (K \sharp \tilde{K}) \sharp (K \sharp \tilde{K})}_{K_3}, \dots,$$

onde  $K_1$  esta dentro de uma bola de raio 1,  $K_2$  esta dentro uma bola de raio  $\frac{1}{2}$ ,  $K_3$  esta dentro de uma bola de raio  $\frac{1}{4}$ , e assim por diante.

Formamos deste modo uma série infinita num compacto, veja figura 2.2. Daí obtemos um nó

$$\bar{K} = (K \sharp \tilde{K}) \sharp (K \sharp \tilde{K}) \sharp (K \sharp \tilde{K}) \sharp \dots$$

que possivelmente é selvagem.

Como o nó  $K \sharp \tilde{K}$  é trivial temos que o nó  $\bar{K}$  é trivial também. Sendo a soma conexa infinita associativa podemos escrever

$$\bar{K} = K \sharp (\tilde{K} \sharp K) \sharp (\tilde{K} \sharp K) \sharp \dots$$

Como a soma conexa é comutativa segue que  $\tilde{K} \sharp K$  é trivial. Logo  $K$  é equivalente à  $\bar{K}$  o que é uma contradição.  $\square$

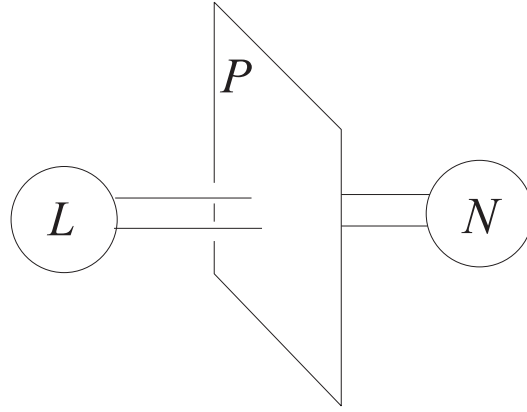
**Corolário 2.4.3** *Sejam  $K$  e  $\tilde{K}$  dois nós. Se  $K \sharp \tilde{K}$  é equivalente ao nó trivial, então  $K$  e  $\tilde{K}$  são equivalentes ao nó trivial.*

O teorema 2.4.2 nos diz que um nó não trivial não possui um simétrico com relação à operação soma conexa, assim o conjunto de todos os nós com a operação soma conexa não é um grupo.

**Definição 2.4.4** *Um nó  $K$  é dito **composto** se dados dois nós  $K_1$  e  $K_2$  tais que  $K = K_1 \sharp K_2$  tem-se que  $K_1$  e  $K_2$  não são equivalentes ao nó trivial. Um nó que não é composto chama-se **nó primo**.*

**Definição 2.4.5** *Sejam  $K$  e  $L$  dois nós. Dizemos que  $L$  divide  $K$  se existe um nó  $N$  tal que  $K = L \sharp N$ .*

**Proposição 2.4.6** *Sejam  $L$  e  $N$  dois nós. Se  $K$  é um nó primo que divide  $L \sharp N$ , então  $K$  divide  $L$  ou  $K$  divide  $N$ .*

Figura 2.11: Plano separando  $L$  de  $N$ .

*Prova.* Consideremos um nó  $L \sharp N$  e algum plano  $P$ , intersectando  $L \sharp N$  em dois pontos e separando  $L$  de  $N$  como na figura 2.11. Como  $L \sharp N$  é divisível por  $K$  existe uma 2-esfera  $S^2$  que intersecta o nó  $L \sharp N$  em dois pontos e tal que o nó  $K$  está dentro de  $S^2$ .

Se essa esfera não intersecta  $P$  acabou. Caso contrário, a esfera  $S^2$  intersecta o plano em algum ponto que não é um cruzamento de curvas simples, neste caso circunferências. Se cada uma dessas circunferências forem enlaçadas com  $L \sharp N$  então elas podem ser removidas por uma deformação simples. No caso restante segue do fato que  $K$  é primo que pelo menos uma parte da esfera contém a parte trivial do nó  $K$ . Logo eles também podem ser removidos por alguma deformação da esfera, daí segue o resultado.  $\square$

## 2.5

### Superfície de Seifert

**Definição 2.5.1** *Seja  $K$  um nó (ou enlace) orientado. Uma superfície de Seifert para  $K$  é uma superfície mergulhada em  $\mathbb{R}^2$  conexa compacta e orientada em  $\mathbb{R}^3$ , onde o bordo é  $K$  e a orientação de  $K$  induz a orientação da superfície.*

**Teorema 2.5.2** *Para cada nó (ou enlace) orientado  $K$  em  $\mathbb{R}^3$  existe uma superfície de Seifert de  $K$ .*

*Prova.* Consideremos um diagrama  $\mathcal{D}$  do nó  $K$ . Podemos suavizar os cruzamentos do nó como mostra a figura 2.12, levando em conta as orientações. Assim obtemos um conjunto de curvas simples fechadas que não se intersectam no plano. Tais curvas são chamadas de **circunferências de Seifert**.

Seja agora um disco preso em cada circunferência de Seifert. Embora o interior de um desses discos no plano pudesse conter um outro disco, no espaço tridimensional podemos prender esses discos sem interseções.

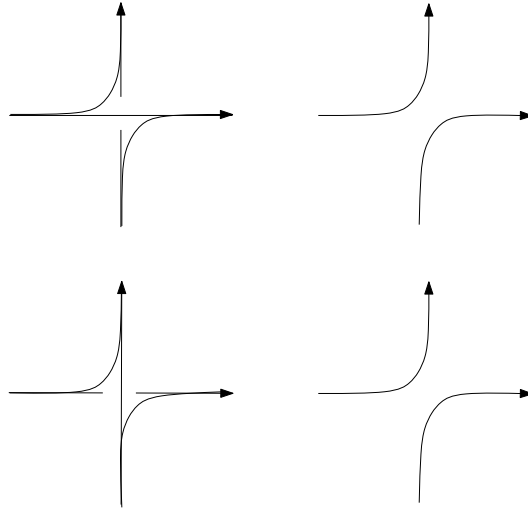


Figura 2.12: Suavisando os cruzamentos no diagrama

Na vizinhança de cada cruzamento, dois discos encontram-se cada um com outro. Escolhamos dois intervalos fechados no bordo de seus discos e conectemos eles por uma faixa torcida (veja figura 2.5 na pag. 18 do livro (BZ)). Os bordos de suas faixas são dois arcos do nó incidente à escolha dos cruzamentos.

Agora vamos verificar se a superfície obtida é orientada. Para isso observe que a orientação de cada circunferência de Seifert induz uma orientação no disco oposto. Em cada cruzamento as duas orientações são opostas o que corresponde a faixa colocada no cruzamento.

Daí obtemos uma superfície orientada que poderia não ser conexa. Conectando diferentes componentes destas superfícies por tubos “magros” de modo a respeitar a orientação, obtemos uma superfície conexa com o mesmo bordo.

□

Note que o teorema anterior não é verdadeiro em geral para um nó em uma outra variedade. Por exemplo o nó em  $T^3$ , ilustrado na figura 2.13, não possui uma superfície de Seifert.

**Definição 2.5.3** *Seja  $K$  um nó (ou enlace) em  $\mathbb{R}^3$ . O gênero de  $K$ ,  $g(K)$ , é definido como o gênero mínimo dentre as superfícies de Seifert de  $K$ .*

Um resultado conhecido sobre o gênero de um nó é que dados dois nós  $K$  e  $K'$ , tem-se

$$g(K \# K') = g(K) + g(K').$$

A prova para esse resultado pode ser encontrada em vários livros que tratam de gênero de um nó, por exemplo em (Cr).

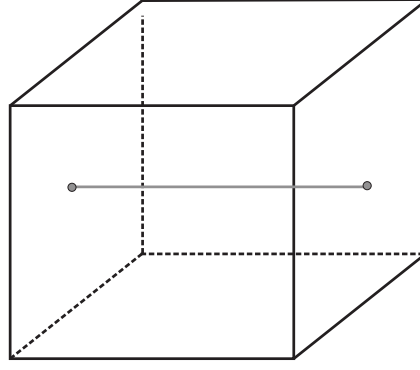


Figura 2.13: Nó em  $T^3$ .

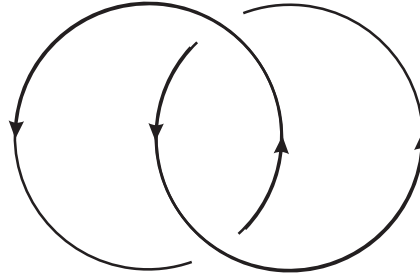


Figura 2.14: Diagrama de dois nós triviais.

## 2.6

### Invariantes Numéricos

**Definição 2.6.1** Dados dois nós orientados  $K$  e  $\tilde{K}$  em  $\mathbb{R}^3$ , definimos o **número de enlaçamento** por

$$lk(K, \tilde{K}) = \frac{1}{2} \sum_{p \in K \cap \tilde{K}} c_p,$$

onde  $K \cap \tilde{K}$  denota o conjunto dos cruzamentos de  $K$  sobre  $\tilde{K}$  no diagrama de  $K \cup \tilde{K}$ .

$$c_p = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é um cruzamento positivo} \\ -1, & \text{se } p \text{ é um cruzamento negativo.} \end{cases}$$

**Exemplo 2.6.2** A figura 2.14 representa o diagrama de dois nós triviais nesse diagrama. Temos dois cruzamentos positivo, logo o número de enlaçamento é 1.

**Proposição 2.6.3** Sejam dois nós  $K$  e  $\tilde{K}$ . Se  $\Sigma_K$  é uma superfície de Seifert de  $K$  tal que  $\tilde{K}$  é transversal a  $\Sigma_K$ , então  $lk(K, \tilde{K})$  é o número de interseções de  $\tilde{K}$  com  $\Sigma_K$  contadas com sinal.

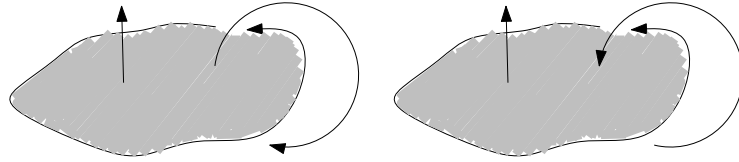


Figura 2.15: Interseção positiva e negativa, respectivamente.

*Prova.* Primeiramente observe que cada interseção de  $\tilde{K}$  com  $\Sigma_K$  nos dá pelo menos dois cruzamentos de  $K$  sobre  $\tilde{K}$  em algum diagrama  $\mathcal{D}$  de  $K \cup \tilde{K}$ . Podemos supor que cada interseção nos dá apenas dois cruzamentos. Além disso, cada um desses cruzamentos no diagrama dados por essa interseção tem o mesmo sinal. A interseção do nó  $\tilde{K}$  com  $\Sigma_K$  pode ser contada com sinal; basta considerarmos a orientação  $\Sigma_K$  quando o nó  $\tilde{K}$  intersecta  $\Sigma_K$ . Indo na direção positiva da orientação de  $\Sigma_K$  dizemos que tal interseção é positiva e contamos  $(+1)$ . Caso contrário dizemos que a interseção é negativa e contamos  $(-1)$ . Veja figura 2.15 para uma ilustração.

Agora note que os dois cruzamentos que correspondem a interseção positiva (resp. negativa) são dois cruzamentos positivos (resp. negativos) no diagrama  $\mathcal{D}$ . Daí segue o resultado.  $\square$

**Proposição 2.6.4** *O número de enlaçamento é invariante sob movimentos de Reidemeister.*

*Prova.* Sejam  $K$  e  $\tilde{K}$  dois nós. O primeiro movimento,  $R1$ , age ou sobre  $K$  ou sobre  $\tilde{K}$  exclusivamente, assim não altera  $lk(K, \tilde{K})$ . O segundo movimento, se envolve só  $K$  (ou só  $\tilde{K}$ ), não muda o número de cruzamentos de  $K$  com  $\tilde{K}$ . Aplicando o segundo movimento entre um fio de  $K$  e outro de  $\tilde{K}$  perde-se ou ganha um cruzamento positivo e um cruzamento negativo, logo não altera  $lk(K, \tilde{K})$ . E o terceiro movimento não altera o tipo dos cruzamentos, portanto não altera o número de enlaçamento.  $\square$

Se invertemos a orientação de um dos nós o número de enlaçamento muda de sinal, caso invertemos a orientação dos dois nós o número de enlaçamento não é alterado. Além disso temos que  $lk(K, \tilde{K}) = lk(\tilde{K}, K)$ . De fato, basta observar que os cruzamentos do diagrama de  $K \cup \tilde{K}$  são os mesmo do diagrama de  $\tilde{K} \cup K$ .

**Definição 2.6.5** *Seja  $L$  um enlace orientado. A torção de  $L$  é definida por:*

$$\omega(L) = \sum_{p \in \mathcal{C}} c_p,$$

onde  $\mathcal{C}$  é o conjunto de todos os cruzamentos no diagrama de  $L$ .

**Observação 2.6.6** *Ao contrário do número de enlaçamento a torção não é um invariante sob movimentos de Reidemeister, pois o movimento  $R_1$  cria ou remove um cruzamento no diagrama de um enlace, adicionando ou subtraindo uma unidade à torção.*

## 2.7

### Polinômios

Nesta seção faremos uma breve apresentação sobre alguns polinômios de enlaces, pois nosso interesse em tal assunto se restringe, uma vez que iremos apresentar posteriormente “poucos” resultados relacionando polinômios com invariantes de nós legendreanos. Para mais detalhes sobre os polinômios aqui apresentados o leitor interessado pode ver (Ma).

Consideremos um diagrama do enlace orientado  $L$ . A este diagrama associaremos um polinômio  $P_L \in \mathbb{Q}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$  que é definido pelos seguintes axiomas:

1.  $P_L$  é invariante sob isotopia. Mais precisamente: se  $L \sim L'$ , então  $P_L(v, z) = P_{L'}(v, z)$ ;
2. se  $L$  é equivalente ao nó trivial, então  $P_L(v, z) = 1$ ;
3.  $v^{-1}P_{L_+}(v, z) - vP_{L_-}(v, z) = zP_{L_0}(v, z)$ , onde  $L_+$ ,  $L_-$  e  $L_0$  são enlaces cujos diagramas diferem apenas localmente num cruzamento como ilustrado na figura 2.16.

Uma das primeiras perguntas que pode surgir nesse momento é: se o polinômio  $P_L$  de fato existe? E a resposta para essa pergunta é dada pelo seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em (Ka1).

**Teorema 2.7.1** *Existe um único polinômio  $P_L$  que satisfaz os axiomas 1, 2 e 3.*

O polinômio  $P_L \in \mathbb{Q}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$  definido pelos axiomas 1, 2 e 3 chama-se **polinômio de HOMFLY**.

O polinômio  $P_L$  foi descoberto por J. Hoste, P. Freyd, W. B. R. Lickorish, D. Yetter, K. C. Millett e A. Ocneanu por volta de 1985 e publicado no artigo (HOMFLY). Antes da descoberta do polinômio  $P_L$  já eram conhecidos dois outros polinômios: polinômio de Jones e polinômio de Conway que também são invariantes sob isotopia. O polinômio de HOMFLY (ver (HOMFLY)) surge como uma generalização desses dois polinômios. Para uma abordagem mais detalhada sobre os polinômios de Jones e Conway sugerimos o leitor ver (Ma).

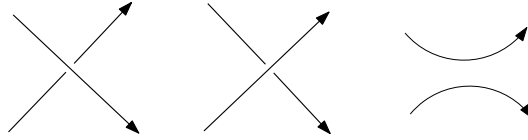


Figura 2.16: Os cruzamentos que diferem  $L_+$ ,  $L_-$  e  $L_0$ , respectivamente.

Aqui vamos apresentar esses polinômios como casos particulares do polinômio de HOMFLY.

Fazendo  $\nabla_L(z) = P_L(1, z)$  obtemos o polinômio  $\nabla_L \in \mathbb{Q}[z^{\pm 1}]$  que é invariante sob isotopia que satisfaz  $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$  e

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z),$$

onde  $\bigcirc$  denota o nó trivial cujo diagrama não possui cruzamentos. O polinômio  $\nabla_L(z)$  chama-se **polinômio de Conway** (ver (Co)).

Agora fazendo  $z = v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}}$  obtemos um polinômio  $V_L(v) = P_L(v, v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}}) \in \mathbb{Q}[v^{\pm 1}]$  com as seguintes propriedades:  $V_L(v)$  é invariante sob isotopia,  $V_{\bigcirc}(v) = 1$  e

$$v^{-1}V_{L_+}(v) - vV_{L_-}(v) = (v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(v).$$

O polinômio  $V_L(v)$  é conhecido como **polinômio de Jones** (ver (Jo)).

**Observação 2.7.2** *O polinômio de HOMFLY pode ser calculado recursivamente usando-se o axioma 3. Apagamos e suavizamos os cruzamentos no diagrama do enlace até obtermos o diagrama de um enlace que é constituído de componentes que são nós triviais distantes. Com auxílio do exemplo anterior e fazendo  $\delta = z^{-1}(v^{-1} - v)$  não é difícil ver que  $P_{L \sqcup \bigcirc}(v, z) = \delta P_L$ , onde  $L \sqcup \bigcirc$  denota a união distante com o nó trivial, ou seja, dois enlaces cujos diagramas não se intersectam. Mais geralmente  $P_{L \sqcup L'} = \delta P_L P_{L'}$ , aqui novamente  $L \sqcup L'$  denota a união distante.*

**Teorema 2.7.3** *Se  $K$  é um nó (ou enlace), então*

$$P_K = P_{-K},$$

onde  $-K$  denota o nó com orientação oposta a de  $K$ .

*Prova.* Por definição de  $P_K$  temos que  $P_K = P_{-K}$ . □

**Teorema 2.7.4** *Sejam  $K$  e  $K'$  dois nós (ou enlaces). Então*

$$P_{K \# K'} = P_K P_{K'}.$$



*Prova.* Pelo axioma 3 temos que

$$v^{-1}P_{K\sharp K'} - vP_{K\sharp K'} = zP_{K\sqcup K'}.$$

Mas pela observação 2.7.2  $P_{K\sqcup K'} = \delta P_K P_{K'}$  temos que

$$v^{-1}P_{K\sharp K'} - vP_{K\sharp K'} = z\delta P_K P_{K'},$$

onde  $\delta = z^{-1}(v - v^{-1})$ . Então

$$(v - v^{-1})P_{K\sharp K'} = (v - v^{-1})P_K P_{K'},$$

logo  $P_{K\sharp K'} = P_K P_{K'}$ . □

Apresentaremos em seguida o polinômio de Kauffman, que foi publicado pela primeira vez por Louis H. Kauffman em 1990. E por isso ficou conhecido como polinômio de Kauffman.

Primeiramente consideremos o diagrama de um enlace não orientado  $L$  e associamos a esse diagrama um polinômio  $R_L(x, a) \in \mathbb{Q}[x^{\pm 1}, a^{\pm 1}]$  que é definido pelos seguintes axiomas:

1.  $R_L$  é invariante sob isotopia regular, isto é, se  $L$  e  $L'$  são isotópicos por isotopia regular, então

$$R_L = R_{L'};$$

- 2.

$$R_{\bigcirc}(a, x) = 1 + \frac{a - a^{-1}}{x},$$

$$R_{L+} = aR_L,$$

$$R_{L-} = a^{-1}R_L;$$

3.  $R_{L+} - R_{L-} = x(R_{L_0} - R_{L_\infty})$ , onde  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L^+$ ,  $L^-$ ,  $L_0$ ,  $L_\infty$  e  $L$  são os enlaces cujos diagramas diferem apenas localmente como ilustrados na figura 2.17.

**Teorema 2.7.5** *Existe um único polinômio  $R_L \in \mathbb{Q}[x^{\pm 1}, a^{\pm 1}]$  que satisfaz os axiomas acima.*

A demonstração para este fato pode ser encontrada na seção 14 do livro (Ka3).

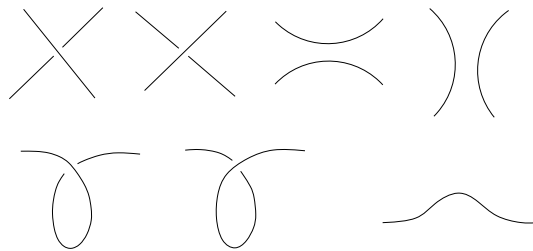


Figura 2.17: As relações entre os diagramas de  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  e  $L_\infty$  (em cima) e  $L^+$ , e  $L^-$  e  $L$  (em baixo).

**Definição 2.7.6** O polinômio de Kauffman  $F_L$  para um enlace não orientado  $L$  é definido pela fórmula

$$F_L(x, a) = a^{-\omega(L)} R_L(x, a),$$

onde  $\omega(L)$  é a torção do enlace  $L$ .

Aqui devemos ter um certo cuidado, pois a torção de  $L$  deve ser calculada através de um diagrama que é isotópico por isotopia regular ao diagrama usado para se calcular  $R_L$ .

O polinômio de Kauffman existe de fato e é o único polinômio como definido acima. Além disso, o polinômio de Kauffman,  $F_L(x, a)$ , é invariante sob movimentos de Reidemeister, consequentemente um invariante sob isotopia.