

2 Preliminares

Nesta seção vamos rever alguns conceitos preliminares que estarão presentes ao longo deste trabalho.

2.1 Objetos Gráficos Discretos

2.1.1 Simplexos

Definição 2.1 *Politopo:* Seja K um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^K , chamaremos de *Politopo* o fecho convexo de K .

Um k -politopo é um politopo de dimensão k .

Definição 2.2 *Simplexos:* Um *simplexo* σ de dimensão k , é o fecho convexo de $k + 1$ pontos $\{v_0, \dots, v_k\}$, onde $v_i \in \mathbb{R}^m$, em posição geral, ou seja, os vetores formados $v_j - v_0$, com $j = 1 \dots k$ são linearmente independentes.

Um simplexo de dimensão k é chamado de k -simplexo, em particular, 0-simplexo é chamado de *ponto* ou *vértice*, 1-simplexo é chamado de *segmento* ou *aresta* e 2-simplexo é chamado de *triângulo*.

Também podemos definir k -simplexo como um k -politopo com $k + 1$ vértices.

Dado um k -simplexo σ , sua dimensão será denotada por $\dim(\sigma) = k$ e o conjuntos dos seus vértices por V_σ .

Definição 2.3 *p-Face:* Um p -simplexo γ gerado a partir de um subconjunto $V_\gamma \subseteq V_\sigma$, dos vértices de um k -simplexo σ , com $p \leq k$, é chamado de p -face de σ ;

Quando não houver ambigüidade, a dimensão de γ será omitida e será dito somente que γ é uma face de σ . E sendo γ uma face de σ será dito que σ é incidente a γ e que σ é uma co-face de γ .

Um simplexo é uma face própria de um simplexo σ se $\dim(\gamma) < \dim(\sigma)$. O simplexo gerado a partir do subconjunto vazio $V_\gamma = \emptyset$ é, por convenção, uma (-1) -face de todo k -simplexo, com $k \geq 0$.

Definição 2.4 *Bordo de um simplexo: O bordo de um p -simplexo σ , denotado por $\partial\sigma$, é a coleção de todas as faces próprias de σ .*

O interior de um simplexo σ , é definido como $Int(\sigma) = \sigma - \partial\sigma$

2.1.2

Complexos Simpliciais

Definição 2.5 *Complexo Simplicial: um complexo simplicial Σ é um conjunto finito de simplexos tais que:*

1. Se $\sigma \in \Sigma$, então todas as faces de σ pertencente a Σ .
2. Se $\sigma, \gamma \in \Sigma$, então $\sigma \cap \gamma$ é uma face própria de σ e γ .

Esta segunda condição faz com que dois 2-simplexos possuam apenas como interseção vértices ou arestas.

A dimensão de um complexo simplicial Σ é definida como um número inteiro $d = \max \{ \dim(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma \}$, e dizemos que Σ é um *complexo simplicial d -dimensional* ou *d -complexo simplicial*.

O poliedro de um d -complexo simplicial Σ imerso em \mathbb{R}^m , com $0 \leq d \leq m$, denotado por $|\Sigma|$, é o subconjunto de \mathbb{R}^m definido pela união, como conjunto de pontos, de todos os simplexos Σ . Um *subcomplexo simplicial* de Σ é qualquer subconjunto Σ^* composto por simplexos Σ tal que Σ^* também é um complexo simplicial.

2.1.3

Relações entre simplexos

A conectividade de um complexo se refere às relações entre os seus simplexos, caracterizados pelas duas definições seguintes:

Definição 2.6 *Estrela: A Estrela de um simplexo $\sigma \in \Sigma$, denotada por $star(\sigma, \Sigma)$, é a união de todos os simplexos $\gamma \in \Sigma$ que são co-face de σ .*

Definição 2.7 *Elo: O Elo de um simplexo $\sigma \in \Sigma$, denotado por $link(\sigma, \Sigma)$, é o subconjunto de simplexos $\gamma \in \Sigma$ tais que:*

1. γ é face de algum simplexo $\psi \in star(\sigma, \Sigma)$
2. $\gamma \notin star(\sigma, \Sigma)$

Um simplexo $\sigma \in \Sigma$ é chamado de *simplexo topo* se $star(\sigma, \Sigma) = \{\sigma\}$. Se um d -complexo Σ é tal que todos os seus d -simplexos são de topo, então Σ é um *complexo regular*.

Definição 2.8 *Simplexos h -Adjacentes:* Dois simplexos σ e γ são p -adjacentes quando existe uma h -face comum a eles.

Definição 2.9 *h -Conectados:* Dois simplexos ψ e γ são h -conectados se e somente se existe uma seqüência de simplexos $(\sigma_i), i \in 0 \cdots n$ tal que:

1. Dois simplexos consecutivos σ_{i-1}, σ_i são h -adjacentes;
2. ψ e γ são faces de σ_0 e σ_n respectivamente.

2.1.4

Componentes Conexas

Um subcomplexo Σ^* de um complexo simplicial Σ é h -conexo se e somente se todos os seus vértices são h -conectados. Um subcomplexo maximal em Σ^* , h -conexo, é chamado de h -componente conexa de Σ .

Definição 2.10 *Componente conexa:* Seja Σ^* um subcomplexo simplicial de Σ , então Σ^* é uma componente de Σ se e somente se Σ^* é uma 0 -componente conexa de Σ .

2.1.5

Variedade

Definição 2.11 *Simplexo Variedade:* Um $(d-1)$ -simplexo σ de um d -complexo simplicial Σ é um $(d-1)$ -simplexo variedade se e somente se existem no máximo dois d -simplexos em Σ incidentes a σ .

Caso σ não seja um simplexo variedade, então σ será chamado de *simplexo não-variedade*.

Definição 2.12 *Homeomorfismo:* Dizemos que dois subconjuntos de um espaço topológico são homeomorfos se existe uma bijeção contínua de um subconjunto para o outro cuja inversa também é contínua.

Definição 2.13 *Pseudo-Variedade Combinatória:* um d -complexo Σ , $|\Sigma| \subset \mathbb{R}^m$, é uma pseudo-variedade combinatória de dimensão d , se e somente se:

1. Σ é um complexo regular $(d-1)$ -conectado;
2. Todo $(d-1)$ -simplexo $\sigma \in \Sigma$ é um $(d-1)$ -simplexo variedade.

Uma pseudo-variedade combinatória de dimensão p , será chamada de *pseudo- p -variedade*.

Um complexo simplicial Σ , imerso em \mathbb{R}^m possui as seguintes propriedades:

1. Σ é uma pseudo- m -variedade;
2. Os simplexos topo incidentes a um $(d - 2)$ -simplexo σ podem ser ordenados em torno de σ .

Definição 2.14 *Variedade Combinatória:* Uma pseudo- k -variedade Σ , $|\Sigma| \subset \mathbb{R}^m$, tal que, para todo vértice $v \in \Sigma$, $\text{star}(v, \Sigma)$ é homeomorfa a \mathbb{R}^k ou $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{k-1}$ é chamada de variedade combinatória de dimensão k , ou simplesmente de k -variedade combinatória.

Definição 2.15 *Orientabilidade:* Seja Σ uma k -variedade combinatória. A orientação de dois k -simplexos adjacentes σ e γ pertencentes a Σ é coerente se o $(k - 1)$ -simplexo ψ que compartilham tem orientações opostas em cada um dos simplexos.

A variedade Σ é orientável se podemos escolher uma orientação que é coerente para cada par de simplexos.

Para facilitar o entendimento e simplificar a notação, uma k -variedade combinatória orientada será chamada de k -variedade, o número de 0-simplexos, 1-simplexos e 2-simplexos existentes em Σ será denotado respectivamente por v , e e f e o número de k -simplexos existentes em Σ será denotado por n_k .

Definição 2.16 *Simplexos de Bordo:* Um $(k - 1)$ -simplexo de uma k -variedade incidente a somente um k -simplexo é chamado de simplexo de bordo.

Os simplexos que não são de bordos são chamados de *simplexos interiores*. Todas as faces de um simplexo de bordo também são simplexos de bordos.

Definição 2.17 *bordo de Variedades:* O bordo de uma k -variedade Σ , é a união de todos os seus simplexos de bordo, e será denotado por $\partial\Sigma$.

2.1.6

Triangulações e Malhas Triangulares

Definição 2.18 *Triangulação:* Uma d -triangulação é definida como um d -complexo simplicial.

Uma triangulação é dita planar se todos seus pontos pertencem a um mesmo plano.

Definição 2.19 *Malha Triangular:* $S = (V, E, F)$ é dita uma malha triangular, se $V = \{1, \dots, n\}$ representa o conjunto de índices dos vértices, E o conjunto das arestas e F o conjunto de faces triangulares.

A valência de um vértice i , denotada por d_i , é determinada pelo número de vértices j que formam uma aresta com i , podemos dizer que os vértices j são vizinhos do vértice i , que estão na vizinhança de i , ou ainda que são os vértices j pertencentes ao elo do vértice i .

2.1.7

Propriedades Topológicas

Determinadas propriedades de uma malha S não dependem da triangulação, mas são determinadas pelas propriedades topológicas de $|S|$. Por exemplo, adotando v como o número de pontos, e como o número de arestas e f como o número de faces de S . Então a Característica de Euler $\chi(S)$ é definida por:

$$\chi(S) = v - e + f$$

Teorema 2.20 *Seja Σ um poliedro sem bordo em \mathbb{R}^3 , com genus $g(S)$, então:*

$$\chi(S) = 2 - 2g(S)$$

Corolário 2.21 *Seja Σ um poliedro com genus $g(S)$ sem bordo, onde v é o número de vértices, e é o número de arestas e f é o número de faces, então:*

$$\begin{aligned} f &\leq 2v - 4 + 4g(S) \\ e &\leq 3v - 6 + 6g(S) \end{aligned}$$

a igualdade vale se somente se Σ for poliedro simplicial.

Sendo S uma triangulação sem bordo então, leva-se em conta a multiplicidades, cada face contribui com 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, daí:

$$3f = 2e$$

Então, em uma malha triangular

$$\chi(S) = v - \frac{f}{2} = v - \frac{e}{3}$$

Desta forma tem-se duas vezes mais faces que vértices e três vezes mais arestas que vértices.

2.2

Minimização Quadrática

2.2.1

Método dos Mínimos Quadrados

O problema linear de mínimos quadrados é um importante problema computacional, que originalmente surgiu da necessidade de adaptar um modelo linear matemático a observações dadas, reduzindo assim a influência de erros nessas observações. Em geral temos um número maior de observações do que o número de parâmetros desconhecidos no modelo. O problema resultante é modelado como um sistema de equações lineares com mais equações do que variáveis: em termos matriciais, dado um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, encontrar um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que Ax é a melhor aproximação para b .

Existem alguns caminhos possíveis de definir a melhor solução. Uma escolha que frequentemente motiva argumentos estatísticos e que também conduz a um problema computacional simples é definir x como a solução para a minimização do problema :

$$\min_x \|Ax - b\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m,$$

onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma vetorial euclidiana. Este problema é chamado de *problema linear de mínimos quadrados* e x uma *solução linear de mínimos quadrados* de um sistema $Ax = b$. O vetor $r = b - Ax$ é o *vetor residual*. Se o posto da matriz A é menor que n , então a solução x não é única. No entanto, dentre todas as soluções de mínimos quadrados existe uma única solução que minimiza $\|x\|_2$.

Uma caracterização do conjunto de todas as soluções do problema de mínimos quadrados descrito acima pode ser definida da seguinte maneira:

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|Ax - b\|_2 = \min\}$ o conjunto de todas as soluções do problema. Então $x \in S$ se e somente se a seguinte condição de ortogonalidade assegura $A^T Ax = A^T b$, a equação normal ou $A^T (b - Ax) = 0$, a equação normal fatorada.

2.2.2

Métodos Iterativos

Considerando o problema de mínimos quadrados:

$$\min_x \|Ax - b\|_2$$

A princípio todo método iterativo para um sistema linear simétrico definido positivo pode ser aplicado ao sistema de equações normais $A^T Ax = A^T b$. No entanto, a explícita formação da matriz $A^T A$ pode ser evitada usando

a forma fatorada das equações normais:

$$A^T (b - Ax) = 0$$

A manipulação com A e A^T separadamente possui duas vantagens importantes. Em primeiro lugar uma pequena perturbação em $A^T A$ pode mudar muito mais a solução do problema do que a mesma perturbação na própria matriz A . Em segundo, a formação $A^T A$ pode gerar uma matriz não esparsa, e mesmo que gere uma matriz esparsa, forçosamente a representação destas matrizes não será otimizada.

Para algumas classes de problemas esparsos fornecer a solução através de métodos diretos faz com que o armazenamento das informações e operações sejam caros. Por exemplo, quando $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz esparsa grande, $A^T A$ é uma matriz quase densa. Note que se $A^T A$ é densa e se A tem uma série de fortes propriedades, então o fator de Cholesky R também será denso, tirando de qualquer possibilidade os métodos baseados na decomposição QR . Isto contrasta com o caso denso onde os elementos na parte triangular superior de $A^T A$ são sempre menores que mn ($m \geq n$) elementos de A diferentes de zero. Esta tese trabalha com uma matriz esparsa $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ grande, onde $m > n$.

Considerando também o método iterativo para computar uma solução que minimiza a norma de um consistente sistema indeterminado,

$$\min \|y\|_2, \quad A^T y = c$$

Se A^T tiver posto máximo a solução única satisfaz as equações normais.

$$y = Az, \quad A^T(Az) = c$$

Nos métodos iterativos uma solução aproximada inicial é trabalhada sucessivamente até que uma solução aceitável seja obtida. A matriz A não necessita ser armazenada, pois pode ser substituída por vetores que armazenam as suas informações essenciais. Isto faz com que os métodos iterativos sejam especialmente atrativos para solucionarem problemas com matrizes esparsas.

A principal desvantagem dos métodos iterativos é sua escala pobre de robustez que muitas vezes limitam sua gama de aplicabilidade. Uma solução iterativa particular pode ser encontrada eficientemente para uma específica classe de problemas, mas se usada para outros casos pode ser excessivamente lenta ou perder a validade. Métodos iterativos pré-condicionados, que são baseados em uma fatoração aproximada, podem ser considerados como uma

solução conciliatória entre métodos diretos e iterativos.

A implementação eficiente de um método iterativo depende substancialmente do desempenho do produto entre a matriz esparsa e um vetor (Av e $A^T u$). Em algumas aplicações pode ser possível expressar os elementos do produto entre matriz-vetor através de uma simples fórmula, desta forma eliminando a necessidade de explicitar a matriz A . Quando este não é o caso, a escolha da estrutura de dados que armazena a matriz esparsa A é crucial para eficiência. Idealmente somente os elementos de A diferentes de zero devem ser armazenados e operados. Observamos desde já que este foi o caso deste trabalho onde a matriz esparsa é armazenada diretamente na estrutura da triangulação, como será apresentado na seção 3.2.

2.2.3

Gradiente Conjugado

O método de Gradiente Conjugado foi desenvolvido na década de cinquenta por Hestenes e Stiefel (6). Como sua convergência é dada em até n passos foi primeiramente considerado como um método direto. Porém, não temos garantia da precisão alcançada, e o método entrou em pleno uso nos meados dos anos setenta quando foi considerado um método iterativo. Assim tornou-se uma ferramenta padrão para as soluções de sistemas lineares esparsos e problemas lineares de mínimos quadrados. No trabalho original de Hestenes e Stiefel, foi dada uma versão do método do gradiente conjugado para solução de equações normais. Läuchli (11) foi o primeiro a discutir o método de Gradiente Conjugado pré-condicionado e aplicá-lo para resolver problemas geodésicos por mínimos quadrados.

O método do Gradiente Conjugado é um caso especial do Método do Espaço de Krylov (1). Segue um resumo dessa teoria:

Definição 2.22 *Subespaço de Krylov: Dada a Matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um vetor $c \in \mathbb{R}^n$ o Subespaço de Krylov $K_k(B, c)$ é:*

$$K_k(B, c) = \text{span} \{c, Bc, \dots, B^{k-1}c\}$$

A k -ésima iteração no método do gradiente conjugado é unicamente determinada pela seguinte propriedade variacional. Seja $\hat{x} = A^T b$ a solução pseudo-inversa e $\hat{r} = b - A\hat{x}$ o resíduo correspondente. Então $x^{(k)}$ minimiza o erro funcional

$$E_\mu(x^{(k)}) = (\hat{x} - x^{(k)})^T (A^T A)^\mu (\hat{x} - x^{(k)})$$

Sobre todo vetor $x^{(k)}$ no subespaço finito.

$$x^{(k)} \in x^{(0)} + K_k(A^T A, s^{(0)}), \quad s^{(0)} = A^T(b - Ax^{(0)})$$

Somente os valores $\mu = 0, 1, 2$ são usados na prática, e seus correspondentes para cada caso: $\mu = 0$ minimiza $\|\hat{x} - x^{(k)}\|_2$,
 $\mu = 1$ minimiza $\|\hat{r} - r^{(k)}\|_2^2 = \|r^{(k)}\|_2^2 - \|\hat{r}\|_2^2$,
 $\mu = 2$ minimiza $\|A^T(\hat{r} - r^{(k)})\|_2^2 = \|s^{(k)}\|_2^2$

Considerar $\mu = 0$ é somente praticável quando o sistema $Ax = b$ é consistente. Neste caso, denotando por $s^{(k)} = A^T r^{(k)}$ o resíduo da equação normal, então:

$$(s^{(k)})^T (A^T A)^{-1} s^{(k)} = (b - Ax^{(k)})^T A (A^T A)^{-1} A^T (b - Ax^{(k)}) = (r^{(k)})^T r^{(k)}$$

onde $A (A^T A)^{-1} A^T$ é a projeção ortogonal de $\mathfrak{R}(A)$, sendo que $\mathfrak{R}(A) = \{z = Ax \mid x \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$ denota o do espaço coluna da matriz A . A expressão para $E_1(x^{(k)})$ segue do fato que $\hat{r} \perp \hat{r} - r^{(k)}$.

A propriedade variacional do gradiente conjugado implica que o erro funcional $E_\mu(x^{(k)})$ diminui monotonamente. Para $\mu = 1$, $\|r^{(k)}\|$ também diminuirá monotonamente. A seguinte estimativa da taxa de convergência é conhecida por assegurar:

$$E_\mu(x^{(k)}) < 2 \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^k E_\mu(x^{(0)}),$$

onde $k = k(A) = \sqrt{k(A^T A)}$.

Para $\mu = 1$ é assumido que tanto $\|\hat{r} - r^{(k)}\|$ quanto $\|\hat{x} - x^{(k)}\|$ diminuem monotonamente, mas $\|A^T r^{(k)}\|$ frequentemente exibirá oscilações quando $k(A)$ é grande. Este comportamento não é um resultado dos erros de arredondamentos. Para $\mu = 2$, $\|A^T r^{(k)}\|$ também diminui monotonamente, mas esta escolha $\mu = 2$ atrasa a convergência e diminui a precisão final em $\|\hat{r} - r^{(k)}\|$ e $\|\hat{x} - x^{(k)}\|$. Isto também requer mais operações e passos.

No capítulo 3 será exposto o algoritmo do método de gradiente conjugado.

2.3

Operadores Laplacianos

O Operador Laplaciano apareceu primeiramente para formalizar a difusão térmica através da equação do calor, essa equação descreve a maneira como calor se difunde em um meio homogêneo, e serve também para a difusão de qualquer substância que obedeça a Lei de Difusão de Fick . Essa equação

já gerou muitas aplicações em processamento de imagens (17).

A discretização do Operador Laplaciano (ou Operador de Laplace) de funções suaves para malhas simpliciais pode ser obtida de algumas maneiras diferentes. O operador laplaciano pode incluir mais informações combinatórias ou mais informações geométricas, dependendo da estrutura da malha ou de outras informações relacionadas a malha.

Laplaciano

O ponto de visão puramente combinatório ignora informações métricas como comprimentos de arestas ou ângulos da malha. Toda informação sobre uma malha combinatória é baseada na sua conectividade. A conectividade da malha pode ser expressa através de Matriz de Adjacência.

Definição 2.23 *Matriz Adjacência:* Seja E o conjunto das arestas de uma malha $M = (V, E, F)$, então a matriz de adjacência A de uma malha conexa é uma matriz $n \times n$ dada por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Se } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

A matriz A é uma matriz esparsa, ou seja é uma matriz que possui relativamente poucas entradas diferentes de zero. E mais que isso o somatório das entradas da i -ésima linha é igual a valência d_i do vértice i . Na nossa implementação o armazenamento de uma matriz esparsa não é feito explicitamente.

Definição 2.24 *Matriz Laplaciana:* Seja D uma matriz diagonal com entradas $d_{ii} = \frac{1}{d_i}$ onde d_i é a valência do vértice v_i , com $i \in V$, então a matriz

$$L = I - DA$$

Isto é,

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Se } i = j \\ \frac{-1}{d_i} & \text{Se } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

é o Laplaciano Combinatório da malha, Laplaciano da malha, ou Matriz Laplaciana da malha.

Laplaciano Simétrico

Definição 2.25 *Matriz Laplaciana Simétrica:* Seja D uma matriz diagonal com entradas $d_{ii} = \frac{1}{d_i}$ onde d_i é a valência do vértice v_i , com $i \in E$, então a matriz

$$LS = D^{-1} - A$$

Isto é,

$$LS_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{Se } i = j \\ -1 & \text{Se } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

é a Matriz Laplaciana Simétrica da Malha

2.4

Curvatura

Seja S uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 , descrita por uma parametrização arbitrária. Para cada ponto sobre a superfície, podemos aproximar localmente a superfície pelo seu plano tangente, ortogonal ao vetor normal n . Variações locais da superfície são medidas pelas curvaturas. Para toda direção e_θ no plano tangente, a curvatura normal $K^N(\theta)$ é definida como a curvatura da curva que percorre a própria superfície e o plano que contém n e e_θ . As curvaturas principais K_1 e K_2 da superfície S , com as suas direções ortogonais associadas e_1 e e_2 são os valores extremos de todas as curvaturas normais. A curvatura média K_H é definida como a média da curvatura normal:

$$K_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K^N(\theta) d\theta.$$

Expressando a curvatura normal em termos das principais curvaturas, $K^N(\theta) = K_1 \cos^2(\theta) + K_2 \sin^2(\theta)$, assim a curvatura média pode ser descrita como: $K_H = (K_1 + K_2) / 2$. A curvatura gaussiana K_G é definida como o produto das curvaturas principais:

$$K_G = K_1 K_2$$

As curvaturas gaussiana e média representam importantes propriedades locais de uma superfície. Lagrange observou que $K_H = 0$ minimização a área da superfície. Isto deu atenção a um considerável corpo da literatura sobre superfícies mínimas e fornece a relação direta entre minimização da área de

uma superfície e curvatura média:

$$2K_H n = \lim_{diam(A) \rightarrow 0} \frac{\nabla A}{A}$$

onde A é uma área infinitesimal em torno de um ponto v sobre a superfície, $diam(A)$ é o seu diâmetro, e ∇ é o gradiente com respeito as coordenadas do ponto v . K é definido como o operador que faz aplicação de um ponto v sobre a superfície para o vetor $K(v) = 2K_H(v) n(v)$, onde K_H é a curvatura média e n é o vetor normal. Este operador é conhecido como Operador de Laplace-Beltrami para a superfície S .

2.4.1

Curvatura Gaussiana Discreta

Sobre uma superfície triangulada, a curvatura gaussiana discreta é concentrada em seus vértices isoladamente, desde que todos os outros pontos sobre a superfície possuam uma vizinhança isométrica a um domínio Euclidiano planar com curvatura zero.

Definição 2.26 *Seja S uma superfície triangulada e $v \in S$ um vértice. Seja $\{f_1, \dots, f_m\}$ o conjunto de faces da estrela de v , e seja θ_i o ângulo da face f_i no vértice v . Então o ângulo total $\theta(v)$ é dado por:*

$$\theta(v) = \sum_{i=1}^m \theta_i(v)$$

Todos os pontos de uma superfície triangulada podem ser classificados de acordo com o sinal resultante do ângulo excedente $2\pi - \theta(v)$

Definição 2.27 *Um vértice v de uma superfície triangulada S com ângulo total do vértice $\theta(v)$ é definido como Euclidiano, Esférico ou Hiperbólico se seu ângulo excedente $2\pi - \theta(v)$ é igual a zero, maior que zero e menor que zero.*

Os ângulos dos vértices determinam diretamente a curvatura gaussiana discreta em termos métricos de uma superfície triangulada S .

Definição 2.28 *A curvatura gaussiana discreta $K(v)$ de um vértice v de uma superfície triangulada S é definida como o ângulo excedente:*

$$\begin{aligned} K(v) &= 2\pi - \theta(v) \\ &= 2\pi - \sum_{i=1}^m \theta_i(v) \end{aligned}$$

A curvatura gaussiana total $K(S)$ de uma superfície poliédrica S é o somatório da curvatura gaussiana de todos os vértices de S . Assim:

$$K(S) = \sum_{v \in S} K(v)$$

2.4.2

Curvatura Média Discreta

O vetor curvatura média sobre uma superfície determina uma medida de modo que a área da superfície possa ser comparada a uma superfície aproximada, que significa, se uma superfície é deslocada constantemente ao longo da superfície normal, então uma aproximação será usada para medir a variação de uma pequena região.

A área de uma superfície triangulada é definida como o somatório da área de todos os seus elementos, esta relação pode ser expressa em termos dos vértices e ângulos dos vértices. Seja T um triângulo com vértices v_i e os ângulos α_i , então:

$$area T = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \cot \alpha_j |v_{j-1} - v_{j+1}|^2$$

Para aplicações práticas a fórmula do gradiente da área em termos intrínsecos da malha poliédrica pode ser derivada.

Laplaciano, Curvatura Média e Superfície Mínima

O vetor curvatura média (H) pode ser definido como o vetor constituído dos Laplacianos das funções coordenadas $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, ou seja:

$$H = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

o que nos leva a:

$$H(i) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{vizinhanca de } i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (v_i - v_j)$$

onde α_{ij} e β_{ij} são os ângulos opostos a aresta cujos extremos são os vértices v_i e v_j .

Superfícies Mínimas são caracterizadas por terem uma área mínima quando comparada a superfícies com o mesmo bordo. Esta propriedade variacional originou o interesse em superfícies mínimas. Superfícies mínimas podem

ser geometricamente caracterizadas por terem curvatura média nula, isto é:

$$H(i) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{vizinhanca de } i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (v_i - v_j) = 0$$

Nesse trabalho, usamos Laplacianos discretos para completar superfícies, considerando que minimizar um laplaciano gera de alguma forma a superfície “mais simples”.

A curvatura média discreta está diretamente ligada a variação da área de uma superfície (7)(14).

2.5

Estrutura de Dados

A estrutura de dados usada neste trabalho é uma estrutura topologicamente escalonável chamada Compact Half-Edge (10). Tal estrutura é composta por 4 níveis que são diferenciados pela razão entre a quantidade de dados armazenados e a eficiência computacional. A medida que o nível da estrutura aumenta armazenamos mais informações, evitando recalcular informações já armazenadas e assim aumentando a eficiência computacional.

O Nível 0 é o primeiro nível e é comumente chamado de “sopa de triângulos”, pois não há a intenção de armazenar diretamente e eficientemente relações de adjacências e incidências. Armazena apenas informações essenciais para a representação de uma malha triangular, como a geometria dos vértices e os triângulos que a compõe.

Os elementos referentes aos triângulos são acessados através do conceito de Half-Edge, que é uma aresta dotada de uma orientação por um dos seus triângulos incidentes. A manipulação destes é feita através de regras aritméticas, ou por algoritmos simples.

No Nível 1 a malha deixa de ser tratada como uma “sopa de triângulos” e relações de adjacência entre triângulos são armazenadas. Esta relação de adjacência permite que triângulos sejam percorridos de maneira eficiente e assim o acesso a Half-Edge oposta passa a ser em tempo constante.

Note que cada aresta é incidente a no máximo dois triângulos. O que permite classificá-las como de interior ou de bordo, considerando que uma aresta terá duas Half-Edge quando for de interior e uma quando for de bordo.

O Nível 2 representa explicitamente cada simplexo da variedade combinatoria. Em particular fornece uma representação explícita para cada vértice da malha, o que será de grande interesse para este trabalho.

Tal representação consiste em identificar uma aresta por meio de uma das suas Half-Edges e em armazenar para cada vértice o índice de uma Half-

Edge incidente. Esta ultima possibilita a classificação de forma simples de um vértice da malha como interior ou exterior.

No Nível 3 é adicionada a representação explícita para as curvas de bordos. Esta representação permite a obtenção da primeira Half-Edge incidente de cada curva de bordo da malha, e a partir desta, percorrer todas as Half-Edges de bordo do Modelo.

Este trabalho foi desenvolvido no Nível 2 desta estrutura de dados, pois fornece o melhor meio-termo entre espaço para armazenamento e tempo de computação para as aplicações implementadas.